3. *Alcune applicazioni del principio del minimo lavoro all' equilibriò di sistemi vincolati.* Nota del S. C. prof. G. Bardelli. (Estratto dai *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie II, vol. XVII, fasc. II). Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini E. C.; 1884.

4. *Sopra tre Teoremi del Cesaro.* Note del prof. G.-B. Rafanelli. (Estratto dal fascicolo Maggio-Giugno del *Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche.*) Genova, tipografia di Angelo Ciminago, vico Mele, numero 7, secondo piano; 1884.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1469

(voir 3ᵉ série, t. II, p. 431);

PAR M. E. CATALAN.

a, b étant des nombres entiers, la quantité

$$\frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{2n-1}+\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

est la somme de deux carrés, et aussi la somme de trois carrés $(n \overline{\gtrless} 2)$.

I. Soient

$$\alpha = a+\sqrt{a^2+b^2}, \quad \beta = -a+\sqrt{a^2+b^2}.$$

On a, *identiquement*,

$$(1)\quad \frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta} = \left(\frac{\alpha^n \pm \beta^n}{\alpha+\beta}\right)^2 + \left(b\,\frac{\alpha^{n-1} \mp \beta^{n-1}}{\alpha+\beta}\right)^2 \text{ (1)}.$$

En effet, si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned}
&(\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1})(\alpha+\beta)\\
&\quad = \alpha^{2n} \pm 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} + \alpha\beta(\alpha^{2n-2} \mp 2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} + \beta^{2n-2})\\
&\quad = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-1}\beta + \alpha\beta^{2n-1};
\end{aligned}$$

ce qui est exact.

Il reste à prouver que chacun des termes, dans l'identité (1), est un *nombre entier*.

Considérons, par exemple, la fraction

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha+\beta} = \frac{(a+\sqrt{a^2+b^2})^n + (-a+\sqrt{a^2+b^2})^n}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Si, comme on l'a supposé, n est *impair*, cette quantité se réduit à

$$\frac{n}{1}a^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(a^2+b^2) + \ldots + (a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

et celle-ci est un *nombre entier*.

Le *premier théorème* est donc démontré.

II. *Remarque.* — Si α, β sont des nombres entiers, pris arbitrairement, le premier membre de l'égalité (1) peut n'être point la somme de deux carrés.

Exemple :

$$\frac{3^3+1}{3+1} = 7.$$

---

(1) Les signes supérieurs, si n est *impair*.

III. D'après l'identité (1) :

1° Si n est *impair*,

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} = f^2 + g^2.$$

Donc

$$\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}\right)^2 = (f^2 + g^2)^2 = (f^2 - g^2)^2 + (2fg)^2.$$

2° Si n est *pair*, et supérieur à 2,

$$\frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} = f^2 + g^2;$$

puis

$$\left(b\,\frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{\alpha + \beta}\right)^2 = b^2(f^2 - g^2)^2 + (2bfg)^2.$$

Dans les deux cas, *la quantité*

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta}$$

est une somme de trois carrés.

IV. *Application.* $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 2 + \sqrt{13}$, $\beta = -2 + \sqrt{13}$, $n = 3$.

On trouve :

1° $$\frac{\alpha^5 + \beta^5}{\alpha + \beta} = 769$$

$$= \left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta}\right)^2 + \left(b\,\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}\right)^2 = 35^2 + 12^2;$$

2° $$\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta}\right)^2 = 7^2 + 24^2;$$

$$769 = 7^2 + 24^2 + 12^2.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Goffart; Genty.