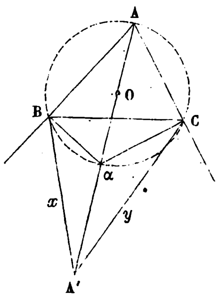
ces courbes par le principe de dualité, on aura un système de courbes douées de points de rebroussement imaginaires et le lieu de ces points de rebroussement se composera de deux coniques. Ces courbes corrélatives feront partie du système (2, 1), c'est-à-dire qu'il en existera une seule tangente à une droite donnée et qu'il en passera deux par chaque point du plan.

SUR LA CIRCONFÉRENCE DES NEUF POINTS;

PAR M. E. CATALAN.

1. *Triangles annexes.* — Par le sommet B d'un triangle ABC, menons la droite Bx, symétrique de BC, relativement à AB; et, par le sommet C, menons Cy, symétrique de BC, relativement à AC. En général, ces



droites Bx, Cy déterminent, avec BC, un triangle BCA' [1]. Pour abréger, je dirai que ce triangle est l'*annexe* de ABC, suivant BC.

D'après la construction, les angles CBA', BCA' sont

[1] Si l'angle A est droit, les lignes Bx, Cy sont parallèles.

donnés par les formules

$$B' = 2^d - 2B, \quad C' = 2^d - 2C;$$

d'où il résulte, semblablement,

$$A' = 2^d - 2A.$$

Ainsi, *les angles du triangle annexe de* ABC *sont les suppléments des doubles des angles du triangle* ABC.

2. Remarque. — *Les trois annexes d'un triangle donné sont semblables entre elles.*

3. Théorème I. — *La circonférence circonscrite à un triangle* ABC *contient les centres des cercles inscrits aux trois annexes de* ABC. *De plus, ces centres sont les points diamétralement opposés aux sommets* A, B, C.

Soit α le centre du cercle inscrit au triangle BCA′. La droite $B\alpha$, bissectrice de l'angle CBA′, est, par la construction même, perpendiculaire à BA′. Semblablement, $C\alpha$ est perpendiculaire à CA. Donc la circonférence, décrite sur $A\alpha$ comme diamètre, est circonscrite au triangle donné.

4. Théorème II. — *Les sommets* A, A′ *et les centres* O, α *appartiennent à une même droite, bissectrice de l'angle* A′.

Soit $A'\alpha$ cette bissectrice. On a

$$B\alpha A' = 2^d - \tfrac{1}{2}(A' + B') = A + B.$$

D'un autre côté, les angles $B\alpha C$, BCA sont égaux, comme inscrits au même segment :

$$B\alpha C = C;$$

donc

$$B\alpha A' + B\alpha C = A + B + C = 2^d.$$

5. Remarques. — 1° A *est le centre du cercle ex-inscrit au triangle* A′BC, *tangent au côté* BC; 2° *le rayon de ce cercle est la hauteur du triangle* ABC, *opposée au côté* BC.

6. *Relations entre les éléments des quatre triangles.* — Ces relations donnent lieu à d'intéressants exercices trigonométriques. En général, elles sont assez compliquées, sauf celle-ci :

Soit R *le rayon du cercle circonscrit au triangle donné; soient* λ, μ, ν *les distances* AA′, BB′, CC′. *On a*

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=\frac{1}{R}.$$

7. *Circonférence des neuf points.* — Supposons que A, B, C soient les milieux des côtés d'un triangle MNP. La circonférence ABC devient la *circonférence des neuf points* (milieux des côtés; pieds des hauteurs; milieux des segments compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs); elle contient donc les centres des cercles inscrits aux annexes de ABC. Autrement dit :

Théorème. — *La circonférence des neuf points, relative à un triangle* MNP, *contient les centres des cercles inscrits aux annexes du triangle dont les sommets sont les milieux des côtés de* MNP.

Voilà donc *trois* points, ajoutés aux *neuf* que l'on connaissait (1).

---

(1) Nous faisons abstraction des autres points remarquables, *en nombre indéfini*, situés sur la *circonférence des neuf points*. Voir *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édit., p. 181.