Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 90-92.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__90_1>

CORRESPONDANCE.

Nous mettons sous les yeux de nos lecteurs une Note intéressante de M. Catalan sur un de nos derniers numéros.

Le théorème de M. Lemoine, cité par M. Laurent, et démontré par M. Doucet (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VIII, p. 266), ne me paraît pas nouveau. Vers 1841, avant la publication des *règles* de Bertrand (*Journal de Liouville*, t. VII), j'avais eu l'idée de comparer une série à *termes positifs* :

$$(1)\qquad \frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}+\ldots+\frac{1}{A_n}+\ldots$$

a la série

$$(2)\qquad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} a_1 &= A_2 - A_1 = \Delta . A_1, \\ a_2 &= A_3 - A_2 = \Delta . A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n &= A_{n+1} - A_n = \Delta . A_n . \end{aligned}$$

En cherchant aujourd'hui dans mes anciens cahiers, j'ai retrouvé la Note que j'avais préparée sur ce sujet, mais que je n'ai pas fait imprimer, les *règles* de Bertrand rendant inutiles les règles particulières auxquelles j'étais arrivé. Quoi qu'il en soit, j'extrais de cette Note le passage suivant :

1° *Si la série* (2) *a le même degré de divergence que la série harmonique, ou si elle est moins divergente que celle-ci, la série* (1) *est convergente ;*

2° *Si la série* (2) *est plus divergente que la série harmonique, et que le dénominateur* a_n *ait une limite, la série* (1) *est divergente ;*

3° *Si la série* (2) *est plus divergente que la série harmonique, et que le dénominateur* a_n *croisse indéfiniment avec* n, *on ne peut rien affirmer touchant la convergence ou la divergence de la série* (1).

Le théorème de M. Lemoine est compris dans la première partie du mien ; car la relation

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n = \text{const.},$$

ou

$$\Delta^2 . A_n = \text{const.} \ (*)$$

entraîne celle-ci :

$$A_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 ;$$

et, du moment que A_n est sensiblement proportionnel à n^2, la série (1) est convergente.

Du reste, comme je le disais tout à l'heure, ces diverses règles particulières sont devenues inutiles depuis la publication de l'intéressant Mémoire de Bertrand et de mon *Traité élémentaire des séries* (p. 17, Théorème XIII).

(*) Ainsi que le fait observer M. Doucet, il suffit de considérer le cas où $\Delta^2 . A_n = \text{const.}$

· En réponse aux observations de M. Vallès (p. 20, numéro de janvier 1870), M. Catalan nous écrit qu'il croit n'avoir à modifier, en rien, la démonstration donnée à la page 458 des *Nouvelles Annales* (octobre 1869). M. Catalan admet l'équation $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}$, et nie qu'elle conduise à l'équation $e^{-2\pi} = e^{-4\pi}$.