

E. CATALAN

Sur un paradoxe algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8 (1869), p. 456-458.

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__456_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UN PARADOXE ALGÈBRIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Un ouvrage remarquable, récemment publié (*), contient, parmi beaucoup de bonnes choses, les deux propositions suivantes :

« ... Dans la suite d'égalités

$$(A) \quad e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} = \dots = e^{2k\pi\sqrt{-1}},$$

qu'on élève tous les membres à la puissance $\sqrt{-1}$, et l'on aura

$$(B) \quad e^{-2\pi} = e^{-4\pi} = e^{-6\pi} = \dots = e^{-2k\pi},$$

conséquence complètement inadmissible (p. 254). »

.....

« On est par conséquent autorisé à substituer à la formule non démontrée d'Euler, la suivante :

$$(\sqrt{-1})^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha,$$

ou, si l'on veut,

$$(C) \quad (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha,$$

dont la justification est parfaitement établie (p. 257). »

(*) *Des formes imaginaires; leur interprétation en abstrait et en concret;* par M. VALLÈS, ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées. Paris; Gauthier-Villars; 1869.

Les assertions de l'honorable auteur sont trop graves pour passer inaperçues. Je vais donc essayer de montrer : 1° que la formule *proposée* (C) est loin d'être préférable à celle d'Euler ; 2° que les égalités (B) ne sont pas des *conséquences* de (A).

I.

Considérons d'abord la relation (C). Si l'on y suppose

$$\alpha = \frac{p}{q} \pi,$$

p et q étant des entiers premiers entre eux, elle devient

$$(D) \quad (-1)^{\frac{p}{q}} = \cos \frac{p}{q} \pi + \sqrt{-1} \sin \frac{p}{q} \pi.$$

Celle-ci, *évidente* lorsque $q = 1$, n'est pas admissible en général. En effet, le premier membre a q valeurs, et le second en a seulement *une*. Comme l'apprend la théorie des équations binômes, ce second membre doit être remplacé par

$$\cos \frac{2k\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{q},$$

si p est pair ; et par

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{q} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{q},$$

si p est *impair*.

II.

J'arrive maintenant à l'équation *absurde*

$$(B) \quad e^{-2\pi} = e^{-4\pi},$$

déduite de l'équation *exacte*

$$(A) \quad e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}.$$

Par définition, $e^{2k\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi + \sqrt{-1} \sin 2k\pi = 1$.
 Ainsi, déjà, chacun des deux membres de l'équation (A) représente l'unité. D'un autre côté, l'expression « puissance $\sqrt{-1}$ » n'ayant aucun sens à priori, nous admettrons que $(e^{2k\pi\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = 1^{\sqrt{-1}}$; et il nous suffira de définir ce dernier symbole.

Or, si l'on fait

$$1^{\sqrt{-1}} = y,$$

on a, en général (*),

$$ly = \sqrt{-1} l(1) = \sqrt{-1} \cdot 2k'\pi \sqrt{-1} = -2k'\pi;$$

donc

$$y = e^{-2k'\pi}.$$

Autrement dit :

La puissance $\sqrt{-1}$ de l'expression $e^{2k\pi\sqrt{-1}}$ a une infinité de valeurs réelles, inégales, et formant une progression par quotient. En particulier, si l'on élève à la puissance marquée par $\sqrt{-1}$, les deux expressions (A), égales chacune à l'unité, on reproduit deux fois cette progression. Mais de ce que $e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}}$, on ne peut pas conclure $e^{-2\pi} = e^{-4\pi}$.
