Nouvelles annales de mathématiques

Eugène Catalan

Rectification et addition à la «note sur un problème d'analyse indéterminée»

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 276-278.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__276_0>

RECTIFICATION ET ADDITION A LA « NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE »

(voir p. 63);

PAR M. EUGÈNE CATALAN.

Actes de l'Académie de' Nuovi Lincei, 3 février 1867.

M. Le Besgue m'a fait observer que les formules (6) et (6′) ne sont pas assez générales : en les écrivant, j'ai supposé, tacitement, les valeurs de t, $\mu^2 - 1$ et $2\alpha + \mu^2 - 1$, premières entre elles deux à deux. Le même manque de généralité se remarque sur les formules (11) et (11′). Néanmoins les résultats indiqués dans le § V sont exacts, comme tous ceux que l'on déduirait des formules citées.

En cherchant à corriger la faute dont je viens de parler, je me suis aperçu que le problème en question se ramène très-simplement à la résolution, en nombres entiers, d'une équation de la forme

$$Ax^2 - By^2 = 1.$$

Cette nouvelle solution du problème est l'objet de la présente Note.

I.

Reprenons les équations

$$(a) \qquad 2x + y - 1 = z,$$

$$(b) \qquad 2yz = \alpha,$$

$$(c) \qquad y^2 + z^2 - 1 = \beta,$$

$$(d) \qquad \alpha\beta = 16t^2,$$

$$(e) \qquad s = t^2.$$

D'après (a), *y et z sont de parités différentes;* donc

α, β *sont des multiples de* 4. Soient

$$\alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta' v^2,$$

θ, θ' ne contenant aucun facteur carré; autrement dit,

$$\theta = abcde\ldots, \quad \theta' = a'b'c'd'e'\ldots,$$

a, b, c, d, e,..., d'une part, et a', b', c', d', e',..., de l'autre, étant des facteurs premiers *inégaux*. A cause de l'équation (d), $\theta\theta'$ doit être un carré; donc

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \ldots,$$

ou

$$\theta' = \theta;$$

et, par conséquent,

$$(f) \qquad \alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta v^2.$$

Soient

$$(g) \qquad y = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

p, q étant deux nombres donnés, l'un *pair*, l'autre *impair*, *premiers entre eux*. Les équations (b), (c) deviennent, à cause des valeurs (f),

$$(h) \qquad pq\gamma^2 = 2\theta u^2,$$

$$(k) \qquad (p^2+q^2)\gamma^2 - 1 = 4\theta v^2.$$

Éliminant θ, on trouve

$$(p^2+q^2)u^2 - 2pqv^2 = \frac{u^2}{\gamma^2};$$

donc u est divisible par γ,

$$(l) \qquad u = \gamma u',$$

et la relation (h) devient

$$(\mathrm{A}) \qquad pq = 2\theta u'^2.$$

II.

Dans chaque cas particulier, on décomposera donc $\frac{pq}{2}$ en deux facteurs u'^2, θ, dont l'un soit un carré, l'autre n'admettant aucun facteur carré; après quoi l'on cherchera les solutions entières de l'équation

$$(p^2+q^2)\gamma^2 - 4\theta v^2 = 1. \tag{B}$$

Si elle en admet, on emploiera les formules

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} x = \dfrac{(q-p)\gamma+1}{2}, \quad x+y-1 = \dfrac{(q+p)\gamma-1}{2}, \\ s = (u'v\theta\gamma)^2. \end{cases}$$