

Propriétés générales et applications physiques d'un groupe vectoriel remarquable : $C, +'$

par H.W. VANDERSCHUEREN,

Service Mesures et Instrumentation – Institut Montefiore

INTRODUCTION OU MOTIVATION

Lorsqu'on passe en revue les sciences ou les techniques « apparentées à l'électricité », de l'électrotechnique à l'électronique en passant par la physique statistique, la physique du solide, la cristallographie ou la physique des particules élémentaires, on ne peut qu'être frappé par la fréquence d'intervention et l'importance à tous niveaux des graphes circulaires.

Des graphes fonctionnels aux trajectoires matérielles ou aux diagrammes directionnels, on retrouve partout la circonférence ou l'arc de circonférence exacts ou très approchés : diagramme d'Argand de la fonction de transfert du second ordre, diagramme de Cole ou de Cole-Cole, diagramme de Smith, projection stéréographique, fonction de distribution spatiale des vitesses des porteurs de charges selon Boltzmann, focalisation « faible » ou « forte » des trajectoires électroniques ou ioniques dans les tubes cathodiques ou les spectromètres de masses, diagrammes de rayonnement dipolaire, diagramme de sensibilité transversale des capteurs, méridienne de l'indicatrice d'émission selon Lambert...

Cette richesse dans la diversité justifie ou au moins peut excuser la tentative d'aborder ces problèmes de manière globale selon une voie non conventionnelle.

Le présent travail est subdivisé en deux parties. La première introduit de manière générale le groupe vectoriel remarquable sur lequel repose l'ensemble en faisant ressortir ses caractéristiques « théoriques » propres les plus importantes : sous-groupes, classes, demi-groupes... La seconde partie développe deux applications conduites à leur terme, en mettant en exergue l'enrichissement apporté par cette voie d'approche particulière.

PREMIERE PARTIE

DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES DU GROUPE EVOQUE

1. DEFINITION DU GROUPE

Le groupe évoqué est constitué par l'ensemble des circonférences du plan ayant un point commun fixe, qui sera dénommé pôle ou origine, et muni de la loi binaire interne d'additivité polaire.

La figure 1 illustre cette définition.

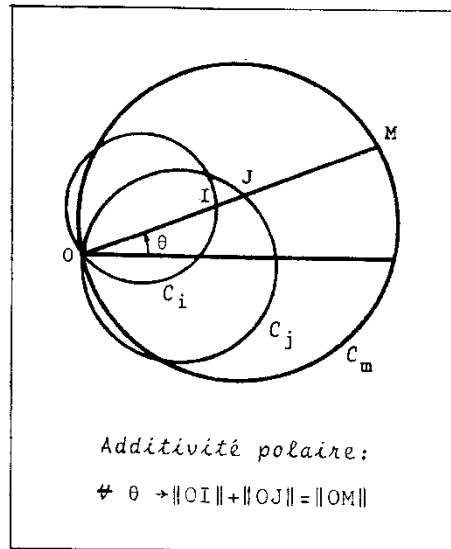


Figure 1.

Toute circonférence de l'ensemble est vue comme lieu de l'extrémité d'un vecteur issu de O. Dans ces conditions, si l'on additionne colinéairement les vecteurs délimités par deux circonférences quelconques de l'ensemble (C_i, C_j sur la figure), on démontre facilement que l'on obtient une troisième circonférence appartenant à l'ensemble (C_m sur la figure).

En d'autres termes, en désignant simplement par C l'ensemble en question et conventionnellement par $+'$ la loi d'additivité polaire que nous avons définie, nous pourrions traduire la loi binaire opérant sur l'ensemble par :

$$\forall C_i, C_j \in C \exists C_m \in C \rightarrow C_i +' C_j = C_m \quad (1)$$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (1)

L'équation polaire d'une circonférence passant par le pôle est évidemment, avec les notations de la figure 2 :

$$\rho = a \cos \theta + b \sin \theta \quad (2)$$

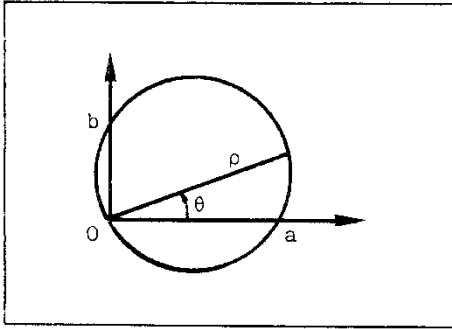


Figure 2.

Deux telles circonférences se différencient par leurs paramètres a et b.

Leur somme polaire

$$\Sigma \rho = (\Sigma a) \cos \theta + (\Sigma b) \sin \theta \quad (3)$$

correspond donc encore à une circonférence passant par le pôle.

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE

Il est pratiquement évident que $C, +'$ possède la structure de GROUPE. On constate en effet que :

— l'ensemble contient un élément neutre unique, à gauche et à droite, C_0 , constitué par le pôle lui-même :

$$\forall C_i \in C \rightarrow C_i +' C_0 = C_0 +' C_i = C_i \quad (4)$$

— tout élément C_i de l'ensemble possède son inverse \bar{C}_i (ou symétrique) constitué par la circonférence symétrique, au sens géométrique du terme, par rapport à l'origine (fig. 3) :

$$\forall C_i \in C \rightarrow C_i +' \bar{C}_i = \bar{C}_i +' C_i = C_0 \quad (5)$$

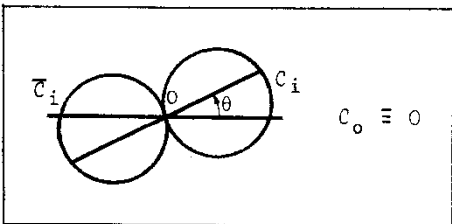


Figure 3.

— l'opération est associative :

$$\forall C_i, C_j, C_k \in C \rightarrow C_i +' (C_j +' C_k) = (C_i +' C_j) +' C_k \quad (6)$$

cette assertion est évidente puisque la construction, point par point, est vectorielle.

II. PROPRIETES ESSENTIELLES DU GROUPE

1. LE GROUPE $C, +'$ EST ABELIEN

Cela résulte immédiatement du fait que la loi de composition n'est qu'un cas particulier de l'opération vectorielle (sous-ensemble de $\vec{V}, +$, colinéarité).

Cette propriété est par ailleurs évidente par simple inspection de la figure 1.

2. LE GROUPE $C, +'$ CONSTITUE UN ESPACE VECTORIEL

Cela découle de ce que :

- le groupe est abélien ;
- la loi, externe, de multiplication scalaire lui est évidemment applicable et elle jouit des propriétés de distributivité et d'associativité.

3. ISOMORPHISMES

a) **Ensemble des vecteurs polaires associés aux centres** (fig. 4)

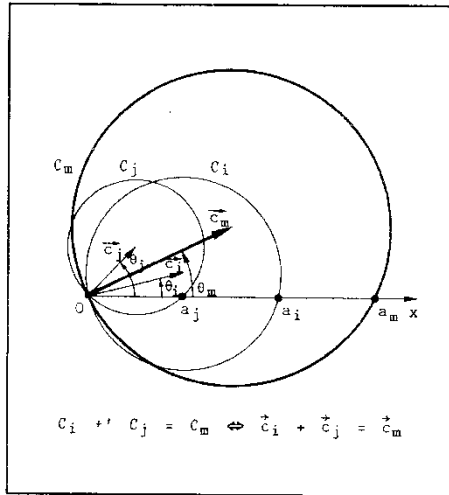


Figure 4.

L'ensemble des vecteurs polaires \bar{c}_i associés aux centres des circonférences C_i (vecteurs que nous dénommerons dans la suite *vecteurs centraux*), muni de la loi d'additivité vectorielle constitue un groupe isomorphe au groupe $C, +'$.

Nous désignerons ce groupe vectoriel par la notation $\bar{c}, +$.

Démonstration

- La structure de groupe de $\bar{c}, +$ est évidente.
- La correspondance bijective entre les éléments des deux groupes se démontre quant à elle très aisément en passant aux composantes cartésiennes des vecteurs.

En se référant aux notations de la figure 4, les projections des diamètres polaires des circonférences s'écrivent selon Ox :

$$\begin{aligned} 2 c_i \cos \theta_i &= a_i \\ 2 c_j \cos \theta_j &= a_j \\ 2 c_m \cos \theta_m &= a_m \end{aligned}$$

Par définition du groupe de départ $C, +'$, on sait par ailleurs que :

$$a_i + a_j = a_m$$

Il en résulte donc évidemment la relation entre les composantes des vecteurs évoqués :

$$c_i \cos \theta_i + c_j \cos \theta_j = c_m \cos \theta_m. \quad (7)$$

Procédant de même pour les projections selon l'axe normal, on obtient la relation :

$$c_i \sin \theta_i + c_j \sin \theta_j = c_m \sin \theta_m. \quad (8)$$

Les relations (7) et (8) expriment l'additivité vectorielle des vecteurs centraux des circonférences obéissant à la loi du groupe de départ :

$$C_i +' C_j = C_m.$$

Remarque

La mise en évidence de cet isomorphisme est, de toutes les propriétés avancées, la plus féconde car elle permet l'illustration et la démonstration très simple de nombre de propositions ultérieures.

b) Groupe des complexes

Le groupe $C, +$ des complexes, muni de la loi d'addition ordinaire, constitue un groupe isomorphe au groupe de départ $C, +'$ puisque l'on sait qu'il est lui-même isomorphe au groupe vectoriel.

c) Groupe matriciel

Le groupe $M, +$ des matrices carrées antisymétriques

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

muni de la loi interne d'additivité matricielle ordinaire, constitue un groupe isomorphe au groupe de départ $C, +'$ puisqu'on sait évidemment qu'il est isomorphe aux deux précédents (sous b et a).

d) Groupe des droites inverses

Le groupe, que nous désignerons conventionnellement par $\bar{D}, +$, des droites du plan, muni de la loi d'additivité des inverses des distances polaires par rapport à un point fixe est isomorphe au groupe de départ.

Ceci résulte directement du fait connu que l'inversion d'une circonférence, au sens géométrique du terme, par rapport à l'un de ses points (ici l'origine) fournit une droite (fig. 5).

4. SOUS-GROUPES

En plus de deux sous-groupes impropres communs à tout groupe — soit le groupe lui-même et le neutre — le groupe $C, +'$ comporte des sous-groupes intéressants.

Ceux-ci sont automatiquement des sous-groupes invariants, ou *diviseurs normaux*, puisque le groupe est commutatif.

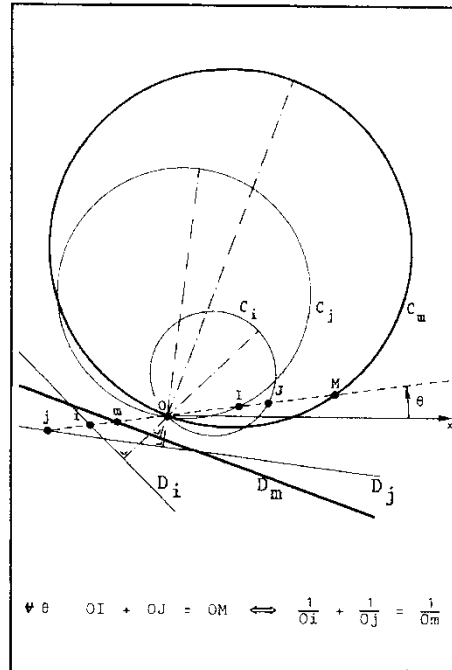


Figure 5.

a) Sous-groupes axiaux

Tout sous-ensemble constitué des circonférences dont les centres appartiennent à un même axe polaire, et que nous dénommerons circonférences *axiales*, est un sous-groupe, que nous dénommerons *sous-groupe axial* et désignerons conventionnellement par $S_a, +'$.

Cela résulte évidemment du fait que ce sous-ensemble est stable en vertu de l'isomorphisme des vecteurs centraux :

$$\forall C_i, C_j \in S_a \rightarrow C_i +' C_j \in S_a$$

et qu'il possède évidemment le neutre et le symétrique de chaque élément.

b) Sous-groupes axiaux entiers

Tout sous-ensemble S_{an} de S_a constitué des circonférences de diamètres multiples entiers d'une longueur donnée constitue un sous-groupe :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall |d| \in \mathbb{R} \rightarrow C_n (2|c_n| = n|d|) \in S_{an}$$

Ce sous-groupe est évidemment isomorphe au groupe $\mathbb{Z}, +$ des entiers rationnels muni de la loi d'addition ordinaire.

5. DEMI-GROUPES UNITAUX

Tout sous-ensemble constitué des circonférences dont les centres appartiennent à un secteur quelconque mais de sommet à l'origine, et que nous dénom-

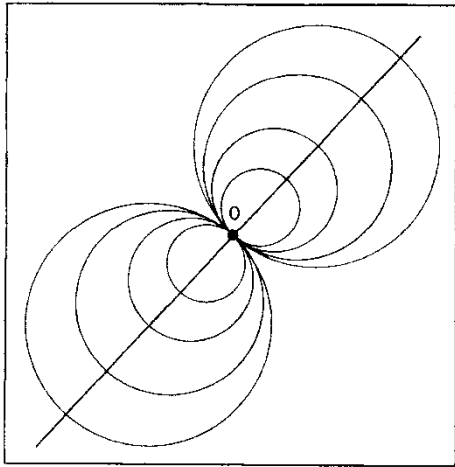


Figure 6.

merons circonférences *sectorielles*, muni de la loi d'additivité polaire constitue un *demi-groupe* unital, que nous désignerons conventionnellement par $D_{c_i, +}$.

La démonstration de cette proposition est immédiate si l'on considère le sous-ensemble isomorphe des vecteurs centraux associés. En effet l'additivité vectorielle est interne pour cet ensemble qui contient l'origine (le neutre) mais dont aucun élément ne possède d'inverse (fig. 7).

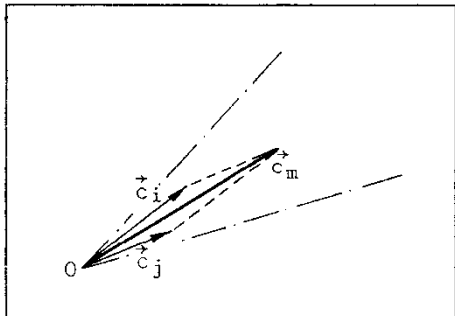


Figure 7.

6. CLASSES OU COENSEMBLES

On sait que l'application de la loi du groupe entre un élément quelconque du groupe et tous les éléments d'un sous-groupe détermine une *classe*, selon Papy [1] par exemple, ou un *coensemble*, selon Mariot [2] par exemple, associé(e) à l'élément en cause.

Dans notre cas, l'addition polaire d'un sous-groupe axial $S_{a, +}$ à une circonférence dont le centre se trouve sur l'axe orthogonal fournit le sous-ensemble des circonférences ayant une corde commune égale au diamètre de la circonférence de départ — *faisceau de circonférences*, au sens de la géométrie —

(fig. 8). Ce sous-ensemble, qui n'est pas un sous-groupe puisqu'il ne contient pas l'élément neutre, constitue donc une classe K_a de S_a .

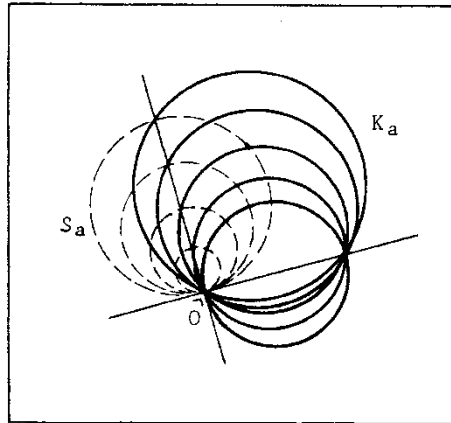


Figure 8.

III. PROPRIETES COMPLEMENTAIRES

1. SIMULATION D'UNE ROTATION

On cherchera ici à particulariser un sous-ensemble dont tout élément appliqué, par la loi du groupe, à une circonférence quelconque de l'ensemble fournit une circonférence de même rayon.

Cette dernière pourra alors être vue comme résultant d'une *rotation* de la première.

Passant au groupe isomorphe des vecteurs centraux \vec{c}_i , la figure 9 montre clairement que :

$$\forall \phi \exists \vec{c}_i \rightarrow \vec{c}_a + \vec{c}_i = \vec{c}_b, \|\vec{c}_b\| = \|\vec{c}_a\|$$

Ceci exprime donc qu'en ajoutant à une circonférence C_a de rayon \vec{c}_a la circonférence C_i , correspondant à \vec{c}_i , on obtient la circonférence C_b de même rayon déplacée d'un angle ϕ par rapport à la première.

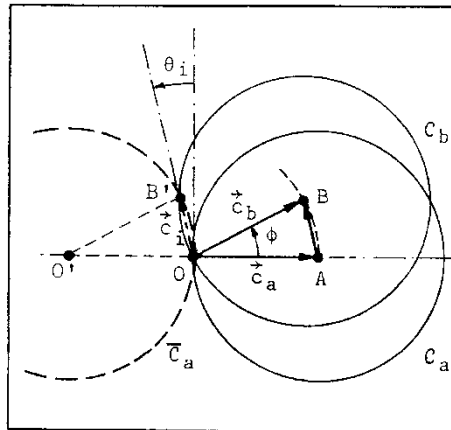


Figure 9.

Les coordonnées polaires de \bar{c}_i sont clairement déduites des caractéristiques du triangle OAB :

$$\begin{cases} \|c_i\| = 2 \|c_a\| \sin \phi/2 & (9) \\ \theta_i = \phi/2 & (10) \end{cases}$$

Il en résulte que le lieu des centres des circonférences définissant le sous-ensemble cherché est lui-même une circonférence : la symétrique \bar{C}_a de la circonférence C_a de départ.

La figure 10 montre quelques éléments de ce sous-ensemble, correspondant à la moitié supérieure du lieu des centres. On y voit se dessiner l'enveloppe cardioidale de ce sous-ensemble.

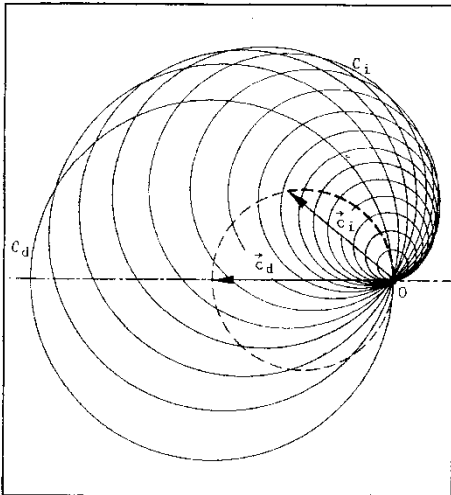


Figure 10.

2. EQUIVALENCE

Il est évident que l'application à l'ensemble C de la loi d'additivité vectorielle $+$ est équivalente à l'application d'une rotation $R\alpha$ et d'une homothétie Hk par rapport à l'origine (fig. 11).

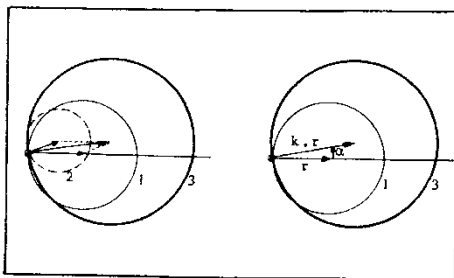


Figure 11.

3. EXTENSION DE LA LOI : ADDITIVITE VECTORIELLE

Le fait de substituer l'additivité vectorielle ordinaire à l'additivité polaire de deux circonférences

(1 et 2) substituée à la circonférence résultante (3) un anneau (au sens géométrique du terme) concentrique à cette dernière : soit le domaine compris entre 4 et 5.

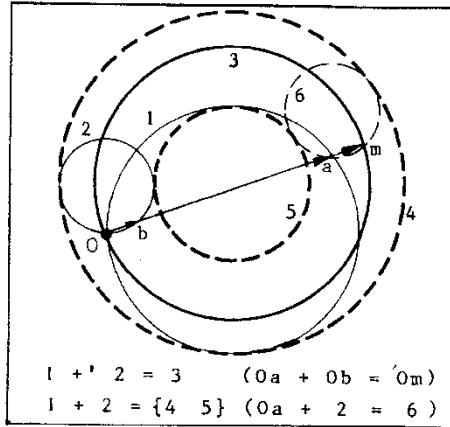


Figure 12.

On démontrerait évidemment très facilement cette proposition de même que les propriétés citées ci-dessous et illustrées à la figure 13.

Quelles que soient les positions relatives des composantes 1 et 2 :

- les diamètres des circonférences frontières 4 et 5 de l'anneau correspondent toujours à la somme et à la différence, respectivement, des diamètres des composantes;
- la largeur de l'anneau est égale au diamètre de la composante minimale;
- la circonférence 3, toujours concentrique aux frontières, occupe toutes les positions possibles intermédiaires, en fonction des positions relatives des composantes.

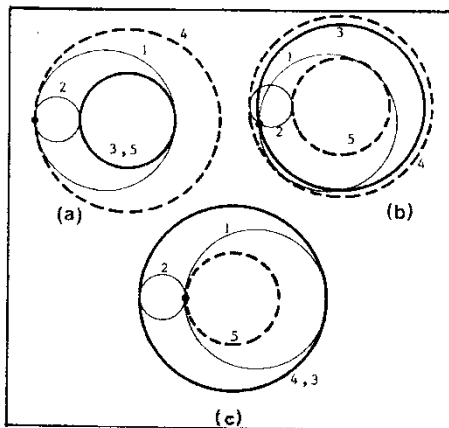


Figure 13.

DEUXIEME PARTIE
APPLICATIONS PHYSIQUES

**1. EFFETS GALVANOMAGNETIQUES :
EFFET HALL ET MAGNETORESISTANCE**

1. RAPPEL

L'équation de transfert de Boltzmann, en régime permanent et dans l'hypothèse d'un temps de relaxation unique des porteurs[3], s'écrit :

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v f(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_v f(\vec{v}) = -\frac{f(\vec{v}) - f_0(\epsilon)}{\tau} \quad (11)$$

où $f_0(\epsilon)$ désigne la fonction de Fermi, dépendant de l'énergie des porteurs, et $f(\vec{v})$ la fonction de distribution lorsqu'agit une force extérieure (perturbation de la fonction de Fermi).

Cette équation peut être assez simplement résolue par approximations successives[4] dans le cas d'action simultanée d'un champ électrique* et d'un champ magnétique sur un réseau isotrope d'extension infinie et comportant un type unique de porteurs (nous supposons dorénavant, pour fixer les signes relatifs, une conduction électronique).

Dans le cas présent, la force extérieure comporte deux termes, l'effet du champ électrique (conduction) et la force de Lorentz :

$$\vec{F} = e \cdot \vec{E} + e \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (12)$$

De cette formule et de l'expression de la loi de d'Alembert :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (13)$$

on déduit l'expression de l'accélération qu'il suffit de reporter dans la formule (11) pour obtenir la formule utile qui servira au calcul systématique de $f(\vec{v})$:

$$\left\{ \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{m} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \right\} \cdot \vec{\nabla}_v f(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_v f(\vec{v}) = -\frac{f(\vec{v}) - f_0(\epsilon)}{\tau} \quad (14)$$

La marche à suivre est alors la suivante :

- remplacer $f(\vec{v})$ par $f_0(\epsilon)$ dans les gradients, qui apparaissent comme termes de perturbation de $f_0(\epsilon)$;
- en déduire la première approximation soit $f_1(\vec{v})$;
- introduire f_1 dans les gradients;
- en déduire la deuxième approximation et ainsi de suite...

La formule de récurrence se dessine très nettement après quelques étapes, deux suites géométriques alternées se manifestant.

* On sait que la résolution de ce problème par Boltzmann implique la limitation du champ électrique à des valeurs faibles puisque l'équilibre thermodynamique est postulé. On limitera donc les développements au terme du premier degré en E . On notera que c'est d'ailleurs cette limitation qui permet en fait de conduire le développement à son terme.

Après groupement des termes correspondants, l'expression détaillée de la fonction de répartition des porteurs s'écrit :

$$f(\vec{v}) = f_0(\epsilon) - \epsilon \tau \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \vec{E} \cdot \vec{v} + \frac{1}{1+q} \frac{e^2 \tau^2}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} (\vec{B} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{v} - \frac{1}{1+q} \frac{e^3 \tau^3}{m^2} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \{ \vec{B} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{E}) \} \cdot \vec{v} \quad (15)$$

Dans cette formule f_0 désigne la fonction de Fermi, e la valeur algébrique de la charge des porteurs et m leur masse effective, ϵ désigne leur énergie, comptée à partir de la limite de leur bande (ici la bande de conduction), q représente la raison, commune, des deux suites alternées qui résultent des approximations successives :

$$q = \left(\frac{e \tau B}{m} \right)^2 \quad (16)$$

Le processus classique d'utilisation de ces résultats consiste alors, on le sait, à expliciter la conductivité électrique du matériau en considérant l'action du terme en $\vec{E} \cdot \vec{v}$ puis à calquer par similitude sur ce raisonnement les contributions des deux derniers termes. On aboutit ainsi à l'expression de la densité de courant résultante. Enfin, une inversion, profitant des propriétés cycliques de l'opérateur $\vec{B} \wedge$ permet d'obtenir l'expression du champ électrique résultant en fonction de la densité de courant et de l'induction magnétique[4].

2. APPLICATION DE C. *

La marche à suivre précédemment rappelée permet une résolution souple et élégante du problème évoqué, néanmoins en ignorant les propriétés d'additivité polaire des circonférences, on omet traditionnellement de tirer les conclusions, pourtant fondamentales, qui se dégagent immédiatement de la considération attentive de l'expression (15).

Or la formule (15) est susceptible d'une illustration particulièrement simple et explicite en ce qui regarde l'influence du champ électrique et de la composante normale de l'induction magnétique sur la distribution des vitesses des porteurs.

Corrélativement ceci permet de globaliser le traitement ultérieur du problème.

Avec les notations et les dispositions de la figure 14

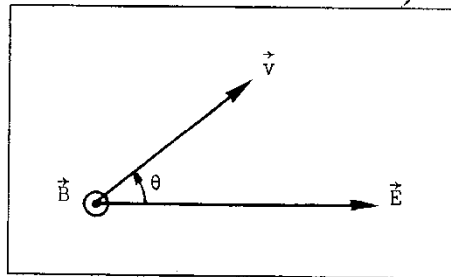


Figure 14.

et en rappelant que nous étudions le cas de la conductivité électronique, la formule (15) peut s'écrire :

$$\frac{f(\vec{v}) - f_0}{f_0} = -a \cos \theta - b \sin \theta + c \cos \theta \quad (17)$$

en ayant posé :

$$a = |e| \tau_0^{-1} \left| \frac{\partial f_0}{\partial e} \right| E v \quad (18)$$

$$b = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{e^2 \tau_0^2}{m} \tau_0^{-1} \left| \frac{\partial f_0}{\partial e} \right| B E v \quad (19)$$

$$c = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{|e|^3 \tau_0^3}{m^2} \tau_0^{-1} \left| \frac{\partial f_0}{\partial e} \right| B^2 E v \quad (20)$$

Ecrite sous cette forme, l'expression (17) donne, en coordonnées polaires, la valeur de la perturbation relative de la fonction de distribution des porteurs sous l'action des forces extérieures en cause.

La figure 15 donne, en représentation polaire, les graphes des trois termes du second membre et repérés dans l'ordre, de 1 à 3.

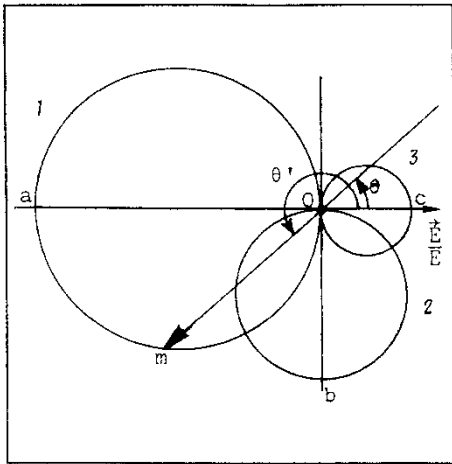


Figure 15.

Interprétation

Le graphe 1 traduit le fait que, comparativement à la probabilité initiale f_0 , égale quelle que soit la direction envisagée, la probabilité de trouver un porteur de vitesse v dans la direction et le sens définis par θ est réduite d'une fraction de la valeur de f_0 donnée par la norme Om . Dans le sens opposé, défini par θ' sur la figure, la probabilité de trouver un porteur est accrue dans le même rapport.

La même interprétation vaut évidemment pour les trois contributions 1 à 3.

Globalement cette représentation est évidemment très suggestive :

— le graphe 1 traduit l'influence du champ électrique seul, il expliquera la conductibilité électrique normale ;

— le graphe 3, opposé au précédent, traduit avec évidence l'effet magnétorésistif ;

— le graphe 2 traduira essentiellement l'effet Hall.

Remarque

Il va de soi que les graphes de la figure 15 correspondent à une valeur donnée du module de la vitesse. Les formules (18) à (20) montrent que ces perturbations sont proportionnelles toutes trois à ce module de la vitesse des porteurs considérés.

De la « théorie » développée autour de $C, +'$, il découle que la composition des effets est immédiate. La figure 16 reprend les trois graphes de départ et leurs combinaisons significatives.

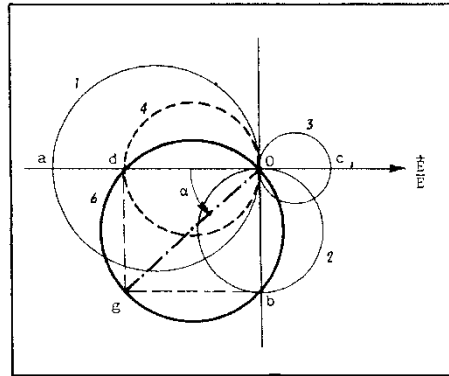


Figure 16.

Sur la figure :

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 2 + 3 = 4 + 2 = 6$$

Conclusions

— Le diagramme polaire résultant (n° 6) peut être obtenu à partir du premier (n° 1) par rotation d'un angle α et homothétie de rapport h déduits de la figure 3 et explicités à partir des formules (16) et (18) à (20) :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a-c} = \frac{|e| \tau_0}{m} B = \sqrt{q} \quad (21)$$

$$h = \frac{g}{a} = \frac{d/\cos \alpha}{a} = (1 - \frac{c}{a}) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+q}} \quad (22)$$

— La formule (15) a été obtenue, rappelons-le à nouveau, par des approximations successives qui ont débouché sur des suites géométriques alternées de raison q . La condition de convergence est immédiate :

$$q < 1.$$

De la figure 16 et de la formule (21), on déduit immédiatement la limite physique à laquelle correspond cette condition :

équivalence de 2 et 4.

— Le graphe résultant obtenu jusqu'à présent est le graphe de la variation relative de la fonction

de distribution des porteurs dans l'espace des vitesses. Les termes de l'expression (15) donnent en fait les diverses modifications relatives de la répartition moyenne ou de la probabilité d'observation des porteurs en fonction de leur vitesse.

Le diagramme de *directivité* effectif s'obtient, à l'échelle V_0 près, en ajoutant le graphe 6 de la figure 16 à la circonférence unité centrée sur l'origine. La figure 17 montre la courbe obtenue qui est évidemment une *conchoïde de cercle*, acnodale en pratique, ou *limaçon de Pascal*.

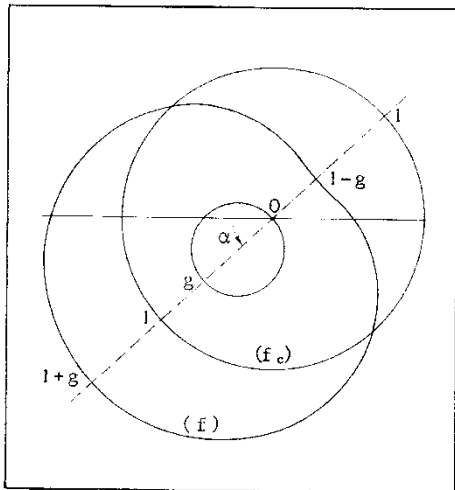


Figure 17.

II. THEORIE DES DIELECTRIQUES : DIAGRAMME DE COLE-COLE [6]

1. RAPPEL

Le comportement fréquentiel des diélectriques solides et liquides dans le domaine des moyennes et hautes fréquences est souvent explicable par une relaxation du type dipolaire.

Le diagramme d'Argand, qui de façon tout à fait générale traduit la relation de Kramers-Krönig reliant les composantes réelle ϵ' et imaginaire ϵ'' de la permittivité complexe ($\bar{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon''$), se réduit dans le cas d'un temps de relaxation unique τ à une demicirconférence (fig. 18) obéissant à la relation simple de Pellat-Debye [7] :

$$\bar{\epsilon} - \epsilon_\infty = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \quad (23)$$

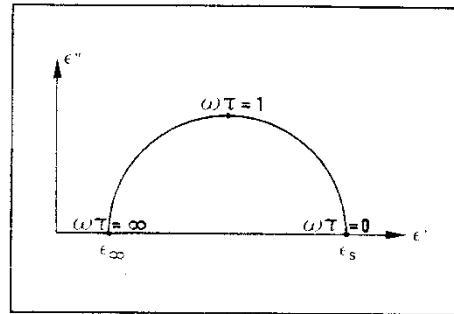


Figure 18.

Le schéma équivalent d'un condensateur plan (ayant des armatures de section A distantes de d) comportant un tel diélectrique est montré à la figure 19.

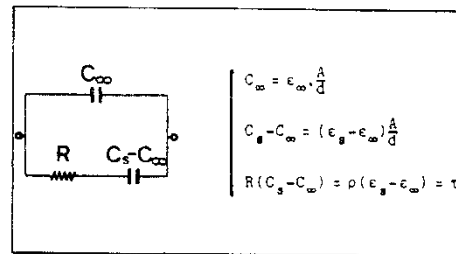


Figure 19.

On sait que si l'on rencontre effectivement le diagramme de Debye (cas des alcools notamment), on trouve plus généralement un diagramme en arc de cercle : cas des pyrallènes dans la gamme de 100 Hz à 100 kHz [7] ou cas des halogénures d'alkyles ou du chloroforme dans la gamme de 1 à 100 GHz [8] par exemple.

Un tel comportement a été interprété par Von Schweidler comme résultant d'une distribution de temps de relaxation [9] mais, bien que divers chercheurs (Wagner, Yager, Fuoss et Kirkwood...) aient pu confirmer l'allure générale du graphe, aucune des théories avancées ne conduit, à ce jour, à un accord probant avec les résultats expérimentaux et l'on préfère pratiquement se référer à une formule empirique, la relation de Cole-Cole :

$$\bar{\epsilon} + \epsilon_\infty = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (j\omega\tau)^n} \quad (24)$$

le plus souvent en assez bon accord avec l'expérience.

On notera que Goffaux [10] a pu montrer que la dispersion diélectrique en T.B.F., attribuable aux porteurs en interaction avec les états de surface au travers d'une barrière de potentiel, obéit au même formalisme.

On peut très simplement démontrer[9] que la formule (24) correspond effectivement à un arc de cercle (fig. 20) dont le centre est d'autant plus éloigné de l'axe réel que le paramètre n est plus faible (n < 1).

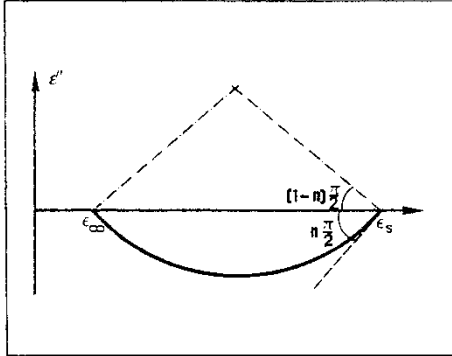


Figure 20.

Remarque

En prévision des manipulations mathématiques ultérieures, nous avons préféré tracer le diagramme complexe normal (ε', -ε'') plutôt que le diagramme de Cole-Cole sous sa forme traditionnelle. Nous nous tiendrons à partir d'ici à cette représentation.

2. GENERALISATION

Avant d'appliquer la théorie du C, + nous nous proposons ici de généraliser la formule traditionnelle de Cole-Cole (24).

Il est en effet très simple de montrer que la formule suivante :

$$\tilde{\epsilon} - \epsilon_\infty = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j^n F(n, n)} \quad (25)$$

traduit le même diagramme en arc de cercle tout en offrant sur la formule habituelle l'avantage appréciable d'un degré de liberté supplémentaire sur la répartition fréquentielle.

Démonstration

Le second membre de la formule (25) peut s'écrire, en simplifiant par le facteur (ε_s - ε_∞) :

$$\frac{1}{1 + j^n F} = \frac{1}{1 + (\cos n \frac{\pi}{2} + j \sin n \frac{\pi}{2}) F} = \frac{1 + F \cos n \frac{\pi}{2} - j F \sin n \frac{\pi}{2}}{1 + F^2 + 2 F \cos n \frac{\pi}{2}}$$

En passant aux coordonnées cartésiennes normales, on obtient évidemment :

$$x = \frac{1 + F \cos n \frac{\pi}{2}}{1 + F^2 + 2 F \cos n \frac{\pi}{2}} \text{ et } y = \frac{-F \sin n \frac{\pi}{2}}{1 + F^2 + 2 F \cos n \frac{\pi}{2}}$$

L'élimination du terme paramétrique F est simple si l'on exprime le rapport y/x :

$$\frac{y}{x} = \frac{-F \sin n \frac{\pi}{2}}{1 + F \cos n \frac{\pi}{2}}$$

dont on déduit F qu'il suffit de reporter dans l'expression de y ci-dessus; on trouve après quelques manipulations élémentaires la formule du cercle :

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2 \operatorname{tg} n \frac{\pi}{2}})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 n \frac{\pi}{2}}$$

illustrée par la figure 21.

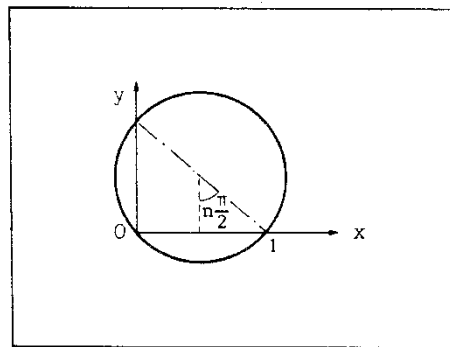


Figure 21.

3. APPLICATION DE C, +

De ce qui a été dit des classes ou coensembles dans la première partie et qui est rappelé à la figure 22.

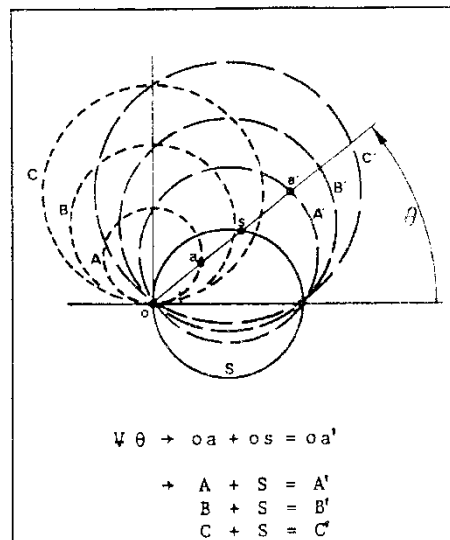


Figure 22.

il est évident que ce que nous continuerons d'appeler l'arc de Cole-Cole, bien que traduit par la formule plus générale (25), peut être considéré comme résultant de l'addition polaire de deux demi-circonférences, comme montré sur la figure 23 :

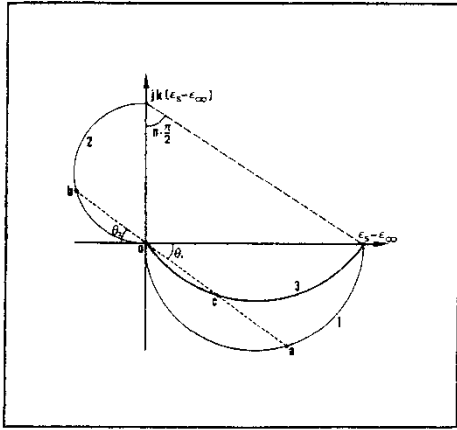


Figure 23.

L'équation de la courbe 1 est évidemment de la forme :

$$(\bar{\epsilon} - \epsilon_\infty)_1 = \frac{1}{1 + jG(\omega, n)} (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \quad (26)$$

La courbe 2 est quant à elle de la forme générale (symétrie + rotation de $\pi/2$ + transformation homothétique de 1) :

$$\begin{aligned} (\bar{\epsilon} - \epsilon_\infty)_2 &= \frac{1}{1 - jH(\omega, n)} (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \cdot k(n) \\ &= \frac{-1}{H + j} (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \cdot k(n) \end{aligned} \quad (27)$$

L'équivalence suivante est donc obtenue entre (25) et (26), (27) :

$$\frac{1}{1 + j^n F(\omega, n)} = \frac{1}{1 + jG(\omega, n)} - \frac{k(n)}{H(\omega, n) + j} \quad (28)$$

De l'additivité polaire appliquée à (28), il résulte de la figure 23 :

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \theta)_1 &= G(\omega, n) \\ (\operatorname{tg} \theta)_2 &= H^{-1}(\omega, n) \end{aligned}$$

et donc :

$$H(\omega, n) \cdot G(\omega, n) = 1 \quad (29)$$

Par ailleurs la correspondance des diamètres des circonférences 1 et 2 est connue et rappelée sur la figure :

$$k = \operatorname{cotg} n \frac{\pi}{2}$$

L'équivalence énoncée s'écrit donc finalement, en introduisant (29) dans (28) :

$$\bar{\epsilon} - \epsilon_\infty = (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \frac{1 - k(n)G(\omega, n)}{1 + jG(\omega, n)} \quad (30)$$

La correspondance entre F et G est obtenue simplement en identifiant le rapport de la partie imaginaire à la partie réelle dans les dénominateurs des formules (30) et (25) après conversion de j^n comme précédemment.

Le résultat de cette opération peut finalement se mettre sous la forme :

$$G(\omega, n) = \frac{F(\omega, n) \cdot \sin n \frac{\pi}{2}}{1 + F(\omega, n) \cdot \cos n \frac{\pi}{2}} \quad (31)$$

Remarque

On notera que le rapport évoqué ci-dessus (partie imaginaire sur partie réelle) est le même dans les formules (30) et (26). Cette dernière concerne la première courbe de notre système qui peut être vue comme une « distorsion » de la caractéristique exacte avec conservation du *facteur de dissipation* ou de *l'angle de pertes* du matériau diélectrique dans le cas particulier où ϵ_∞ est nulle, ou en pratique très faible devant ϵ_s .

Conclusion

La formule présentée ici (30) constitue une nouvelle expression paramétrique offrant une plus grande souplesse d'application, dans le cas des traitements numériques au moins, que la formule traditionnelle de Cole-Cole en j^n .

Etant moins restrictive que cette dernière expression, puisqu'elle offre un degré de liberté en plus, notre formule permet un meilleur ajustement aux résultats expérimentaux.

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIE

- [1] PAPY, *Théorie des groupes* (Dunod, 1961).
- [2] MARIOT, *Groupes finis de symétrie et recherche de solutions de l'équation de Schrödinger* (Dunod, 1959).
- [3] KITTTEL C., *Éléments de physique statistique* (Dunod, 1961).
- [4] CALECKI D., *Etude des phénomènes de transport dans les solides* (E.S.E., n° 2055).
- [5] KIRIEV P., *La physique des semiconducteurs* (MIR, 1975).
- [6] VANDERSCHUEREN H.W., *New approach and extension of the Cole-Cole formula as an application of the theory of groups* (Actes Congrès MECO, Tunis, 1982).
- [7] COELHO R., *Physics of dielectrics* (Elsevier, 1979).
- [8] GREFFE J.L., *Introduction à la théorie macroscopique des diélectriques* (E.S.E., perf. 74).
- [9] BOTTCHER C.J., *Theory of electric polarization* (Elsevier, 1978).
- [10] GOLF-AUX R., *Propriétés électriques superficielles des diélectriques solides* (ACAD. R.B., 1965).
- [11] NAIMARK M. et STERN A., *Théorie des représentations des groupes* (MIR, 1979).