

E. CATALAN

**Trigonométrie sphérique. Théorème
de Legendre**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 406-408.

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__406_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE. — THÉORÈME DE LEGENDRE ;

PAR M. E. CATALAN.

Dans le cours que j'ai fait cette année au lycée Saint-Louis, j'ai donné à mes élèves la démonstration suivante du célèbre théorème à l'aide duquel on ramène la résolution d'un triangle sphérique, ayant ses côtés fort petits, à la résolution d'un triangle rectiligne. Cette démonstration me paraissant assez simple, j'ai pensé qu'elle pourrait peut-être intéresser les lecteurs des *Annales*.

Soit un triangle sphérique dont les côtés sont supposés très-petits relativement au rayon R de la sphère. Soient a, b, c les longueurs de ces côtés, exprimées en mètres. Nous aurons, par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$(1) \quad \cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A,$$

A étant l'angle opposé au côté a .

Soit un triangle rectiligne ayant les côtés égaux à ceux du triangle sphérique rectifié; nous aurons aussi

$$(2) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A',$$

en appelant A' l'angle opposé au côté a .

Posons

$$A = A' + x,$$

x sera un très-petit angle, et nous aurons, à fort peu près,

$$(3) \quad \cos A = \cos A' - x \sin A'.$$

Cette formule suppose, bien entendu, que l'on a mesuré les angles par les arcs correspondants, *dans le cercle dont le rayon est 1.*

Développons les sinus et cosinus qui entrent dans l'équation (1); nous aurons, en nous bornant aux termes du quatrième ordre,

$$\begin{aligned} \cos \frac{a}{R} &= 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4}, & \cos \frac{b}{R} &= 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}, \\ \cos \frac{c}{R} &= 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}, \\ \sin \frac{b}{R} &= \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}, & \sin \frac{c}{R} &= \frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}. \end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs et de la valeur (3), dans l'équation (1), donne

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} &= \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right) \\ &+ \frac{bc}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{6R^2}\right) (\cos A' - x \sin A'); \end{aligned}$$

d'où, en effectuant et en négligeant des termes d'un ordre supérieur au quatrième,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} &= -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} + \frac{b^2c^2}{4R^4} \\ &+ \frac{c^4}{24R^4} + \frac{bc}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2}\right) \cos A' - \frac{bc}{R^2} x \sin A'. \end{aligned} \right.$$

Mais, en vertu de la formule (2),

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} &= -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} + \frac{b^2c^2}{12R^4} \\ &+ \frac{c^4}{24R^4} + \frac{bc}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2}\right) \cos A' + \frac{b^2c^2}{6R^2} \cos^2 A'. \end{aligned} \right.$$

Retranchons membre à membre les équations (4) et (5); nous aurons

$$0 = \frac{b^2 c^2}{6R^4} - \frac{bc}{R^2} x \sin A' - \frac{b^2 c^2}{6R^4} \cos^2 A';$$

d'où

$$x = \frac{bc}{6R^2} \sin A'.$$

Soit maintenant T' l'aire du triangle rectiligne,

$$T' = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

par suite,

$$x = \frac{T'}{3R^2}.$$

On a donc, à fort peu près,

$$A = A' + \frac{T'}{3R^2}, \quad B = B' + \frac{T'}{3R^2}, \quad C = C' + \frac{T'}{3R^2};$$

d'où

$$A + B + C - \pi = \frac{T'}{R^2}.$$

Le premier membre de cette formule est ce qu'on nomme l'*excès sphérique*. En le désignant par ε , nous aurons donc

$$A = A' + \frac{1}{3} \varepsilon, \quad B = B' + \frac{1}{3} \varepsilon, \quad C = C' + \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Ainsi, *chacun des angles du triangle sphérique se compose de l'angle correspondant du triangle rectiligne, augmenté du tiers de l'excès sphérique*. C'est là le théorème de Legendre.
