ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Congrès de Blois. — 1884.

M. E. CATALAN

Professeur à l'Université de Liège.

SUR DES FORMULES RELATIVES AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES

— *Séance du 5 septembre 1884* —

1. *Formule de Gauss :*

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = 1 + \frac{\beta}{1}\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots \qquad \text{(A)}$$

Dans cette célèbre formule, et dans celles dont nous allons parler, les *arguments* γ, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$, $\gamma-\alpha-\beta$ sont *positifs*.

2. *Formule de Binet.* — Ce savant Géomètre l'a donnée sous la forme suivante (*) :

$$\frac{\mathrm{B}(p-a,q)}{\mathrm{B}(p,q)} = 1 + \frac{aq}{p+q} + \frac{a(a+1)q(q+1)}{2(p+q)(p+q+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)q(q+1)(q+2)}{2.3.(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} + \cdots$$

Si l'on suppose :

$$q=\alpha,\quad a=\beta,\quad p+q=\gamma,$$

le second membre devient la série de Gauss. Quant au premier membre, il a pour valeur (**)

$$\frac{\mathrm{B}(\gamma-\alpha-\beta,\alpha)}{\mathrm{B}(\gamma-\alpha,a)} = \frac{\mathrm{B}(\gamma-\alpha-\beta,\gamma)}{\mathrm{B}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Ainsi, *la formule de Binet ne diffère pas de celle de Gauss.*

(*) *Journal de l'École polytechnique,* 27e Cahier, p. 150.
(**) Par un théorème d'Euler.

3. *Autre formule.* — Dans les *Comptes rendus* (1858), et ensuite dans les *Mélanges mathématiques*, j'ai démontré la relation

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = 1 - \frac{m}{1}\frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2.}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} \cdots,$$

que l'on peut déduire de la formule de Binet, au moyen du théorème d'Euler (*).

Soient: $m = \alpha$, $q = \gamma - \alpha$, $p = \gamma - \alpha - \beta$. Nous aurons:

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = 1 + \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)} + \ldots \quad (B)$$

4. *Remarque.* — D'après ce que nous venons de rappeler, la formule (B) est une simple transformation de (A). Néanmoins, dans laplupart des cas, elle est préférable à celle-ci. Voici les motifs de cette ppréciation :

1° *Si* α *et* β *sont des nombres entiers*, le second membre de (B) est composé d'un *nombre limité de termes*, tandis que le second membre de (A) est une série;

2° *La série* (B) *est plus convergente que la série* (A), *au moins si* $\alpha + \beta$ *est positif.*

Soient, en effet, u_n, U_n les termes généraux des deux séries; savoir:

$$u_n = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{1.2\ \ldots\ (n-1)}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)},$$

$$U = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots(\gamma-\alpha-\beta+n-2)}.$$

De là résultent:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta+n-1}{n}\frac{\alpha+n-1}{\gamma+n-1},$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\alpha+n+1}{n}\frac{\beta-n+1}{\gamma-\alpha-\beta+n-1}.$$

Ces fractions tendent vers l'unité. Donc la proposition énoncée sera établie si nous vérifions que, *à partir d'une certaine valeur de* n, *on a constamment*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Or, au moyen d'un calcul fort simple, cette inégalité se transforme en

$$(\alpha+\beta)\,[(n-1)^2 + (2\gamma-\alpha-\beta)(n-1) - \alpha\beta] > 0.$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 151.

Si donc $\alpha+\beta$ est positif, la série (B) *est plus convergente que la série* (A). Le contraire aurait lieu si $\alpha+\beta$ était *négatif.* Et si cette quantité est nulle, les deux développements sont identiques.

5. *Décomposition d'une fraction.* — Si α est un *nombre entier*, égal ou inférieur à γ, on a

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}=(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-\alpha),$$

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}=\frac{1}{(\gamma-\beta-1)(\gamma-\beta-2)\ldots(\gamma-\alpha-\beta)};$$

et l'égalité (B) se réduit à :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)\ldots(\gamma-\alpha)}{(\gamma-\beta-1)(\gamma-\beta-2)\ldots(\gamma-\beta-\alpha)}\\&=1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma-\alpha-\beta}\\&+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)}\\&+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots1}{1.2\ldots\alpha}\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-\alpha+1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots(\gamma-\beta-1)}.\end{aligned}\right\}\text{(C)}$$

Ainsi, *la fraction rationnelle formant le premier membre est décomposée en 1 plus la somme de α fractions rationnelles.*

6. *Décomposition d'un produit.* — Remplaçons γ par x, α par n, et chassons les dénominateurs; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}&(x-1)(x-2)\ldots(x-n)=(x-\beta-1)\ldots(x-\beta-n)\\&+\frac{n}{1}\beta.(x-\beta-1)\ldots(x-\beta-n+1)\\&+\frac{n(n-1)}{1.2}\beta(\beta-1).(x-\beta-1)\ldots(x-\beta-n+2)+\ldots\\&+\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1).\end{aligned}\right\}\text{(D)}$$

7. *Remarques.* — I. Dans cette relation, n *est un nombre entier*, β *est une quantité quelconque.*

II. *Le second membre est indépendant de* β.

III. La formule (D) est analogue à celle du *binôme des factorielles*, mais plus générale.

IV. Si l'on désigne par $f(x)$ le second membre, les racines de $f(x)=0$ sont $1, 2, 3, \ldots, n$.

8. *Application.* — Soient $n=5$, $\beta=6$. On doit trouver :

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)&=(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)\\&+30(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)+300(x-7)(x-8)(x-9)\\&+1200(x-7)(x-8)+1800(x-7)+720.\end{aligned}$$

Le premier membre, développé, devient

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120.$$

Si l'on retranche 720, et que l'on supprime le facteur $x - 7$, l'égalité se réduit à :

$$x^4 - 8x^3 + 29x^2 - 22x + 120 = (x-8)(x-9)(x-10)(x-11) + 30(x-8)(x-9)(x-10) \\ + 300(x-8)(x-9) + 1200(x-8) + 1800.$$

Retranchant 1800, et supprimant $x - 8$:

$$x^3 + 29x + 210 = (x-9)(x-10)(x-11) + 30(x-9)(x-10) + 300(x-9) + 1200.$$

Retranchant 1200 et supprimant $x - 9$:

$$x^2 + 9x + 110 = (x-10)(x-11) + 30(x-10) + 30.$$

Retranchant 300, et supprimant $x - 10$:

$$x + 19 = x - 11 + 30.$$

PARIS, IMPRIMERIE CHAIX (S.-O.). — 4116-5.