Association française pour l'avancement des sciences. 12, Comptes-rendus de la 12e session Rouen 1883

M. CATALAN

Professeur à l'Université de Liège.

NOTES D'ALGÈBRE ET D'ARITHMÉTIQUE

(RÉSUMÉ *)

— *Séance du 17 août 1888* —

I

Sur l'équation $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Soient α, β deux entiers premiers entre eux.

Soient p, q deux autres entiers, satisfaisant à la condition

$$\beta q - \alpha p = 1.$$

Toutes les solutions de la proposée sont données, *sans répétition*, par les formules

$$x = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)p + \beta\theta,$$

$$y = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + w^2)q + \alpha\theta,$$

$$u = x + \alpha, \quad v = y - \beta;$$

θ étant un entier arbitraire.

II

Sur une série récurrente.

Soient a, b deux nombres entiers, satisfaisant à la condition

$$a^2 - 2b^2 = 1.$$

Supposons

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2a;$$

et, à partir de $n = 3$:

$$P_n = 2aP_{n-1} - P_{n-2}.$$

(*) Les démonstrations seront données autre part.

On trouve, par la méthode connue,

$$P_n = \frac{1}{2b\sqrt{2}}\left[\left(a+b\sqrt{2}\right)^n - \left(a-b\sqrt{2}\right)^n\right].$$

Si l'on fait

$$Q_n = \frac{1}{2}\left[\left(a+b\sqrt{2}\right)^n + \left(a-b\sqrt{2}\right)^n\right],$$

l'équation

$$2x^2 = y^2 - 1,$$

à laquelle satisfont $x = b$, $y = a$, est vérifiée par

$$x = bP_n, \quad y = Q_n.$$

Remarques. I. — Dans la suite

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots P_{n-1}, \quad P_n, \ldots$$

deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

II. — Si n est *pair*, P_n est divisible par $2a$.

III. — On a

$$P_n = (2a)^{n-1} - C_{n-2,\,1}\,(2a)^{n-3} + C_{n-3,\,2}\,(2a)^{n-} - \ldots$$

IV. — Plus généralement,

$$\frac{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n - \left(a-\sqrt{a^2+b^2}\right)^n}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= (2a)^{n-1} + C_{n-2,\,1}\,(2a)^{n-3}b^2 + C_{n-3,\,2}\,(2a)^{n-5}b^4 + \ldots$$

III

Sur une suite de nombres entiers.

Dans la relation de récurrence :

$$P_n = 2aP_{n-1} - P_{n-2},$$

supposons $a = 17$, d'où $b = 12$. Nous aurons :

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2.17, \quad P_3 = 3.5.7.11, \quad P_4 = 2^2.17.577,$$
$$P_5 = 19.70\,151, \ldots \quad P_{10} = 2.17.19.241.70\,151.5\,521.$$

En général, *pour toute valeur entière de* a, P_{kl} *est divisible par* P_k *et par* P_l. Cette propriété s'accorde avec des théorèmes dus à M. Edouard Lucas (*).

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome II.

IV

Sur une décomposition en deux carrés.

Il est évident que

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})=P^2+Q^2,$$

P, Q étant des polynômes entiers, homogènes (*). Je trouve

$$P=x^{15}-x^{12}y^3-x^{10}y^5-x^9y^6-x^6y^9-x^5y^{10}-x^3y^{12}+y^{15},$$
$$Q=x^{14}y+x^{13}y^2+x^{11}y^4-x^8y^7+x^7y^8-x^4y^{11}-x^2y^{13}-xy^{14};$$

et *sept* autres systèmes de valeurs, distincts de celui-ci.

V

Décomposition en deux et en trois carrés.

THÉORÈME. — a, b *étant des nombres entiers, soient*

$$\alpha=a+\sqrt{a^2+b^2}, \quad \beta=-a+\sqrt{a^2+b^2}.$$

La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{\alpha+\beta},$$

dans laquelle n *est un nombre entier, supérieur à* 1, *est : 1° la somme de deux carrés ; 2° la somme de trois carrés.*

COROLLAIRE. — x, y *étant deux nombres entiers, premiers entre eux, et supérieurs à* 1 ; *le nombre*

$$x^{4n}-x^{4n-2}y^2+x^{4n-4}y^4-\ldots+y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.

Relation avec un théorème de Gauss (**). Ce théorème est exprimé par l'égalité

$$4\frac{x^n-1}{x-1}=Y^2-pZ^2,$$

p étant un nombre premier, de la forme $4\mu+1$. Cela posé :

Si, dans le polynôme Y^2, *on remplace* x *par* $-z^2$, *et que* Y_1^2 *soit le résultat de la substitution; ce nouveau polynôme est : 1° la somme de quatre carrés ; 2° la somme de cinq carrés.*

(*) Pour fixer les idées, et simplifier l'écriture, nous prenons seulement quatre facteurs binômes; mais la méthode est générale.

(**) Trouvée après le Congrès.

VI

Sur l'équation $Ax^2 = y^2 + 1$.

Soit d'abord le cas particulier de

$$(a^2+1)x_n^2 = y_n^2 + 1,$$

a étant un nombre entier, égal ou supérieur à 1. On a ce théorème :

A partir de $n = 3$, *chaque valeur de* x_n, *égale à la somme de deux carrés, est égale, aussi, à la somme de trois carrés.*

Soit maintenant l'équation générale :

$$Ax^2 = y^2 + 1,$$

dans laquelle

$$A = a^2 + b^2.$$

Soient

$$x = p, \quad y = q$$

les valeurs *les plus simples* qui la vérifient. On a

$$x_n = \frac{(p\sqrt{A}+q)^{2n-1} + (p\sqrt{A}-q)^{2n-1}}{2\sqrt{A}}.$$

Le second membre est divisible par p. Posant $x = pz$, on trouve, au lieu de la proposée,

$$(q^2+1)z^2 = y^2 + 1.$$

De cette remarque, peut-être nouvelle, résulte la *décomposition de* x_n *en une somme de quatre carrés* (*).

(*) Très probablement, x_n est aussi une *somme de trois carrés*. Jusqu'à présent, je n'ai pu démontrer cette proposition.