Association française pour l'avancement des sciences. 9, Comptes-rendus de la 9e session Reims 1880

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liége.

SUR LA QUADRATURE DES COURBES PARABOLIQUES (*)

— *Séance du 14 août 1880.* —

1. — Soit une parabole du *cinquième* degré, ayant pour équation

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5. \qquad [1]$$

Si l'on suppose que les ordonnées extrêmes répondent à $x = x_0$, $x = x_3$, l'aire de la courbe est

$$A = \int_{x_0}^{x_3} (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5)\, dx. \qquad [2]$$

Il s'agit de mettre cette expression sous la forme

$$A = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3; \qquad [3]$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant des *constantes inconnues;* et y_0, y_1, y_2, y_3 des ordonnées *arbitraires,* répondant à des abscisses *convenablement choisies* (**).

2. — Si l'on fait :

$$ex^4 + fx^5 = X, \qquad [4]$$

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \qquad [6]$$

on trouve :

$$\lambda_0 = \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)\, dx}{(x - x_0)\, F'(x_0)}, \ldots\ldots, \lambda_3 = \int_{x_0}^{x_3} \frac{F(x)\, dx}{(x - x_3)\, F'(x_3)}, \qquad [7]$$

(*) Ce petit travail a pour origines : 1° Une communication du général Parmentier, au Congrès de Montpellier ; 2° une correspondance avec M. Lucien Lévy, professeur au lycée de Rennes. En cherchant à simplifier une formule trouvée par M. Lévy, j'ai rencontré un théorème de Gauss, et quelques propriétés que je crois nouvelles.

(**) Problème résolu par Gauss.

et la condition :

$$\int_{x_0}^{x_3}\left[-\frac{X_0\,F(x)}{(x-x_0)\,F'(x_0)}-\ldots-\frac{X_3\,F(x)}{(x-x_3)\,F'(x_3)}+ex^4+fx^5\right]dx=0. \quad [8]$$

4. — Celle-ci sera remplie si, dans le premier membre, les coefficients de e et de f sont nuls. L'application de la formule de Lagrange, déjà employée, réduit ces coefficients aux expressions

$$\int_{x_0}^{x_3} F(x)\,dx\,, \qquad \int_{x_0}^{x_3}(x-\alpha)\,F(dx)\,;$$

α étant une quantité dont il est inutile d'écrire la valeur.

5. — Afin d'obtenir des résultats et des règles simples, prenons

$$x_0=-1, \qquad x_3=+1\,;$$

nous aurons

$$F(x)=(x^2-1)(x-x_1)(x-x_2), \quad [9]$$

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx=0\,, \qquad \int_{-1}^{+1}(x-\alpha)\,F(x)\,dx=0. \quad [10]$$

Il est visible que ces deux conditions seront vérifiées si

$$F(x)=k\left[(x^2-1)^3\right]'',$$

k étant un coefficient convenable (*).

En effectuant et simplifiant, on trouve

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad x_2=+\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\lambda_0=\lambda_3=\frac{1}{6}, \qquad \lambda_1=\lambda_2=\frac{5}{6}.$$

(*) En général,

$$F(x)=k\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$

Nos polynômes, plus simples que ceux de Gauss, dépendent des fonctions X_n : à un facteur près,

$$F(x)=\int_{-1} X_n$$

Donc, pour la parabole considérée, la formule de quadrature est

$$A = \frac{1}{6}(y_0 + y_3) + \frac{5}{6}(y_1 + y_2). \qquad [13]$$

8. — Si l'on fait

$$Y = y_0 \frac{F(x)}{(x - x_0) F'(x_0)} + \dots + y_3 \frac{F(x)}{(x - x_3) F'(x)} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3,$$

cette équation représente la parabole *déterminée* par les quatre points considérés ci-dessus. L'aire de cette courbe est

$$A' = \int_{-1}^{+1} Y dx = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = A.$$

Comme la méthode est générale, on a ce théorème curieux, dont j'ai donné, en 1857, un cas particulier :

Toutes les paraboles du degré 2n — 1, *qui passent par* n + 1 *points convenablement choisis, sont équivalentes à la parabole du degré* n, *déterminée par ces* n + 1 *points* (*).

M. P. BARBARIN

Ancien élève de l'École normale supérieure, professeur de Mathématiques au Lycée de Nice

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE SURFACE COMME ENVELOPPE D'UN PLAN MOBILE

— *Séance du 14 août 1880* —

(*) Dans sa communication au Congrès de Montpellier, M. le général Parmentier semble croire que le théorème est vrai, seulement, pour la parabole du troisième degré.