Association française pour l'avancement des sciences. 7, Comptes-rendus de la 7e session Paris 1878

Le point M', où l'hyperbole trajectoire touche son enveloppe, se trouve situé, tantôt sur la trajectoire elle-même, tantôt sur la branche opposée, et il est facile de démontrer que la différence des distances $M'M - M'F$ est égale en valeur absolue à la quantité constante $4a - r_0$, prise elle-même en valeur absolue. L'enveloppe cherchée est donc une hyperbole dont les foyers sont les points M et F; l'une des branches de cette hyperbole, celle qui touche les trajectoires proprement dites, est une courbe de sûreté; l'autre branche est une simple enveloppe géométrique, et n'a pas de signification mécanique. Le cas particulier de $4a = r_0$ doit être remarqué : car alors l'enveloppe cherchée devient la perpendiculaire élevée au milieu de la droite MF.

Il est à peine besoin de faire remarquer que ces résultats s'étendent à l'espace, en faisant tourner la figure autour de l'axe MF.

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liége.

SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOIDE ET DE LA SURFACE DES ONDES (*).

(EXTRAIT.)

— *Séance du 24 août 1878.* —

I. *Lignes de courbure de l'ellipsoïde.*

1. On sait que, l, m, n étant les cosinus directifs de la normale MN à une surface quelconque, les lignes de courbure peuvent être représentées par

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{du}. \qquad (1)$$

Introduisons, comme nouvelles variables, le rayon vecteur u et la distance v de l'origine au plan tangent en M, de manière que

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad v = lx + my + nz. \qquad (2)$$

tive si f est négatif. On en déduit $v_0^2 = f\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)$.

Le produit $f\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)$ est donc toujours positif. Dans le cas de la répulsion, f est négatif; donc $\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}$ l'est aussi, et par suite $r_0 - 2a$ est positif.

(*) Ce petit travail, encore incomplet, peut être regardé comme faisant suite au *Mémoire sur une transformation géométrique et sur la surface des ondes* (*Académie de Belgique*, 1868).

Nous pourrons prendre, comme équation des lignes de courbure,

$$\frac{dx}{dl} = \frac{udu}{dv}. \tag{3}$$

2. Dans le cas de l'ellipsoïde, on trouve (*)

$$\frac{dx}{dl} = \frac{a^2udu - \dfrac{a^2b^2c^2}{v^3}\,dv}{uvdu + (u^2 - b^2 - c^2)\,dv}; \tag{4}$$

en sorte que l'équation (3) devient

$$u^2v^4du^2 - uv^3\,(a^2 + b^2 + c^2 - u^2)\,dudv + a^2b^2c^2dv^2 = 0. \tag{5}$$

L'intégrale de cette équation est

$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2b^2c^2}{g^2v^2} - g^2; \tag{6}$$

g désignant le paramètre d'un hyperboloïde homofocal avec l'ellipsoïde donné (**).

3. *Transformation de l'équation* (3). — Soient, comme dans le *Mémoire*, α, β, γ les cosinus directifs d'une droite OA, perpendiculaire au plan OMN. En posant

$$k = +\sqrt{u^2 - v^2}, \tag{7}$$

on trouve

$$\frac{\alpha}{ny - mz} = \frac{\beta}{lz - nx} = \frac{\gamma}{mx - ly} = \frac{1}{k}; \tag{8}$$

puis, au lieu de l'équation (3),

$$\frac{\sum \alpha dx}{\sum \alpha dl} = \frac{udu}{dv}. \tag{9}$$

4. Dans le cas de l'ellipsoïde, on trouve :

$$\sum \alpha dx = \frac{xyz}{a^2b^2c^2k} \sum a^2(b^2 - c^2)\,\frac{uv^3du - b^2c^2dv}{k^2v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}, \tag{10}$$

$$\sum \alpha dl = \frac{vxyz}{a^2b^2c^2k} \sum (b^2 - c^2)\,\frac{uv^3du - b^2c^2dv}{k^2v^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)}; \tag{11}$$

donc, si l'on désigne par φ le premier membre de l'équation (9), on a, au lieu de cette équation,

$$v\varphi = \frac{\sum a^2(b^2-c^2)(uv^3du-b^2c^2dv)[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)]}{\sum (b^2-c^2)(uv^3du-b^2c^2dv)[k^2v^2+(c^2-v^2)(a^2-v^2)][k^2v^2+(a^2-v^2)(b^2-v^2)]}. \tag{12}$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 244.
(**) *Mélanges*, p. 262.

Soient, pour abréger :

$$\left.\begin{array}{l} V=(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2), V_1=(v^2-a^2)(v^2-b^2) \\ \quad +(v^2-b^2)(v^2-c^2)+(v^2-c^2)(v^2-a^2), \\ M = [V_1 - (v^2 - b^2)(v^2 - c^2)]k^2v^2 + V (v^2 - a^2), \\ P=\sum a^2(b^2-c^2) M, Q = P'=\sum (b^2-c^2)M, Q'=\sum b^2c^2(b^2-c^2)M; \end{array}\right\} \quad (13)$$

alors la formule (12) peut être écrite ainsi :

$$v\varphi = \frac{Puv^3du - a^2b^2c^2Qdv}{P'uv^3du - Q'dv}. \quad (14)$$

D'ailleurs, si l'on fait abstraction du facteur $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$, on trouve :

$$P=k^2v^4+V, Q=P'=k^2v^2, Q'=-[k^4v^4+(2v^2-a^2-b^2-c^2)k^2v^2+V]v^2; \quad (15)$$

et la formule (14) devient, toutes réductions faites,

$$\varphi = \frac{u^2}{v}\frac{(k^2v^4 + V)uvdu - a^2b^2c^2k^2dv}{k^2u^3v^3du + (Uv^2-a^2b^2c^2k^2)dv}; \quad (15)$$

et l'équation (9) :

$$\frac{(k^2v^4 + V)uvdu - a^2b^2c^2k^2dv}{k^2u^3v^3du + (Uv^2 - a^2b^2c^2k^2)dv} = \frac{vdu}{udv}. \quad (16)$$

5. Si on la met sous la forme

$$Fdu^2 + Gdudv + Hdv^2 = 0,$$

on a

$$F = k^2u^3v^4,\ G = (Uv^2 - a^2b^2c^2k^2)v - (k^2v^4 + V)u^2v,\ H = a^2b^2c^2k^2u.$$

II.

Lignes de courbure de deux surfaces conjuguées.

6. L'équation des lignes de courbure d'une surface s étant, comme précédemment,

$$\frac{\sum \alpha dx}{\sum \alpha dl} = \frac{udu}{dv}, \quad (9)$$

celle des lignes de courbure de la surface S, conjuguée de s, sera

$$\frac{\sum \alpha dX}{\sum \alpha dL} = \frac{udu}{dv}. \quad (17)$$

Or (*)

$$X = \frac{vx - lu^2}{k}, L = \frac{x - lv}{k}.$$

(*) *Mémoire sur une transformation. . . .*, pp. 5 et 6.

Il résulte, de ces valeurs :

$$\left.\begin{aligned} k\sum \alpha dX &= v\sum \alpha dx - u^2\sum \alpha dl,\\ k\sum \alpha dL &= \sum \alpha dx - v\sum \Sigma\alpha dl. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Désignons par Φ le premier membre de l'équation (17). D'après les deux dernières formules,

$$\Phi = \frac{v\varphi - u^2}{\varphi - v}. \quad (19)$$

ou

$$\Phi\varphi - (\Phi + \varphi)\,v + u^2 = 0. \quad (20)$$

7. L'équation (17) des lignes de courbure de S, peut, d'après la valeur (19), être remplacée par

$$\varphi = u\,\frac{vdu - udv}{udu - vdv}. \quad (1)$$

On a donc ce théorème :

La même fonction φ, *égale à* $\mathrm{u}\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$, *pour les lignes de courbure de* s, *devient égale à* $\mathrm{u}\,\dfrac{\mathrm{vdu} - \mathrm{udv}}{\mathrm{udu} - \mathrm{vdv}}$, *pour les lignes de courbure de* S;

ou, ce qui est équivalent:

La même fonction φ, *égale à* $\mathrm{u}\,\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}}$, *pour les lignes de courbure de* s, *devient égale à* $\mathrm{u}\,\dfrac{\mathrm{vdu} - \mathrm{udv}}{\mathrm{udu} - \mathrm{vdv}}$ *pour les transformées, sur* s, *des lignes de courbure de* S.

En effet, un point M de S, et son conjugué m, ont mêmes coordonnées u, v (*).

8. *Remarque.* L'équation (20), étant symétrique par rapport aux fonctions φ, Φ, *les lignes de courbure de* s *sont représentées, indifféremment, par*

$$\varphi = \frac{\mathrm{udu}}{\mathrm{dv}},\quad \Phi = \mathrm{u}\,\frac{\mathrm{vdu} - \mathrm{udv}}{\mathrm{udu} - \mathrm{vdv}}$$

et les lignes de courbure de S, *par*

$$\Phi = \frac{\mathrm{udu}}{\mathrm{dv}},\quad \varphi = \mathrm{u}\,\frac{\mathrm{vdu} - \mathrm{udv}}{\mathrm{udu} - \mathrm{vdv}}.$$

III

Lignes de courbure de la surface des ondes.

9. Dans le cas de l'ellipsoïde, nous avons trouvé

$$\varphi = \frac{u^2}{v}\,\frac{(k^2v^4 + \mathrm{V})\,uvdu - a^2b^2c^2k^2\,dv}{k^2u^3v^3du + (\mathrm{U}v^2 - a^2b^2c^2k^2)dv}; \quad (15)$$

(*) Dans ces derniers temps, j'ai cherché l'interprétation *géométrique* de l'équation (20); mais je n'ai trouvé aucun résultat simple. J'espère revenir sur cette question intéressante.

donc les lignes de courbure de la surface des ondes sont représentées par l'équation

$$\frac{u}{v}\,\frac{(k^2v^4+\mathrm{V})\,uvdu-a^2b^2c^2k^2dv}{k^2u^3v^3du+(\mathrm{U}v^2-a^2b^2c^2k^2)dv}=\frac{vdu-udv}{udu-vdv},$$

que l'on peut réduire à

$$\mathrm{V}u^3vdu^2-[(\mathrm{U}v^2+\mathrm{V}u^2)v^2+k^4(a^2b^2c^2-u^2v^4)]\,dudv+\mathrm{U}uv^3dv^2=0. \tag{22}$$

Celle-ci, dont la forme est symétrique, paraît néanmoins difficile à intégrer, même quand l'ellipsoïde s se réduit à un *cylindre* ou à une *ellipse* (*). Si quelque Géomètre parvient à résoudre le problème que je m'étais proposé, ce sera peut-être en appliquant ce remarquable théorème, dû à **M. Paul Mansion** : *Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut* (**). Je passe sous silence les nombreuses tentatives auxquelles je me suis livré.

IV

Transformées, sur la surface des ondes, des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

10. Problème. *On mène, dans la surface des ondes,* O, *un demi-diamètre* s, *parallèle à une normale* mn *à l'ellipsoïde. Quelles sont les valeurs de* s ?

Les coordonnées du point G sont

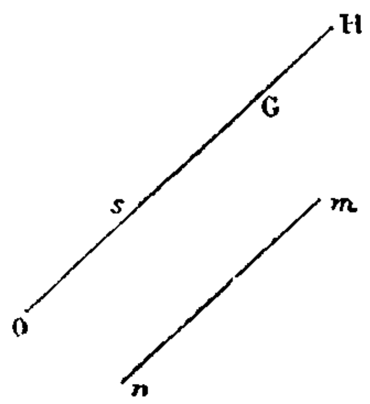

Fig. 3.

$$ls=\frac{vx}{a^2}\,s,\quad ms=\frac{vy}{b^2}\,s,\quad ns=\frac{vz}{c^2}\,s;$$

donc, à cause de la condition connue

$$\sum\frac{a^2\mathrm{X}^2}{s^2-a^2}=0,$$

la quantité s^2 est racine de l'équation

$$\sum\frac{x^2}{a^2(s^2-a^2)}=0,$$

que l'on peut remplacer par

$$\sum\frac{x^2}{a^2}+\sum\frac{x^2}{s^2-a^2}=0;$$

ou encore, par

$$1+\sum\frac{x^2}{s^2-a^2}=0. \tag{23}$$

(*) Dans ce second cas particulier, la surface S, représentée par

$$(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2b^2(x^2+y^2)=0,$$

est une *cyclotomique à directrice elliptique*. (*Mélanges*, p. 170.)

(**) J'en ai conclu que *tout système de courbes, représenté par* f (x, y, c) = 0, *peut être transformé en un système de lignes droites* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, février 1877).

Le point m est situé sur l'hyperboloïde G, représenté par

$$\sum \frac{x^2}{a^2 - g^2} = 1\,;$$

donc l'équation (23) est vérifiée par $s^2 = g^2$; et conséquemment, par $s^2 = h^2$, h étant le paramètre du second hyperboloïde H, homofocal à l'ellipsoïde E, et passant au point m. On a donc ce théorème :

Soient m *un point de l'ellipsoïde* E, *et* g, h *les paramètres des hyperboloïdes* G, H *qui se coupent en* m, *et constituent, avec* E, *un système triplement orthogonal. Si, par le centre* O, *on mène une parallèle à la normale, en* m, *à* E, *et que l'on prenne, sur cette normale,* OG = g, OH = h; *les points* G, H *appartiennent à la surface des ondes, conjuguée de* E.

11. Corollaire. — *Si le point* m *décrit une ligne de courbure, représentée par* g = const, *l'un des deux points correspondant à* m *décrit, sur la surface des ondes, une conique sphérique : le rayon de la sphère est* g.

En d'autres termes :

Le cône C, *dont les génératrices, passant par le pôle, sont parallèles aux normales à l'ellipsoïde* E, *menées en tous les points d'une ligne de courbure, coupe, suivant une ligne sphérique, l'une des nappes de la surface des ondes : le rayon de la sphère est le paramètre de l'hyperboloïde sur lequel la ligne de courbure est située* (*).

II. *Remarque.* — Les paramètres g, h, et la distance v, satisfont à la relation

$$vgh = abc\text{(**)}\,;$$

par conséquent

$$\text{OH} = \frac{abc}{vg}:$$

quand le point m *décrit une ligne de courbure, le rayon vecteur* OH *varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en* m; *et le point* H *décrit une conique ellipsoïdique* (***).

13. Considérons l'ellipsoïde E, l'hyperboloïde G et le cône C dont la directrice est la ligne de courbure L, intersection de E et de G. Les équations de ces surfaces sont, respectivement :

(*) Cette proposition complète, nous semble-t-il, ce théorème de M. Mannheim : « *Sur la surface de l'onde* (S_0) *dérivant de* E, *la transformée d'une ligne de courbure de cette surface est telle que les normales à* (S_0) *issues des différents points de cette ligne sont respectivement perpendiculaires à des diamètres de* (S_0) *égaux entre eux.* » (*Congrès du Havre.*)

(**) *Mélanges*, p. 262.

(***) Le second théorème est dû à Lamé. (*Mémoire sur une transformation*... p. 57.)

$$\sum \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \sum \frac{x^2}{a^2 - g^2} = 1, \quad \sum \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 - g^2} \right) = 0.$$

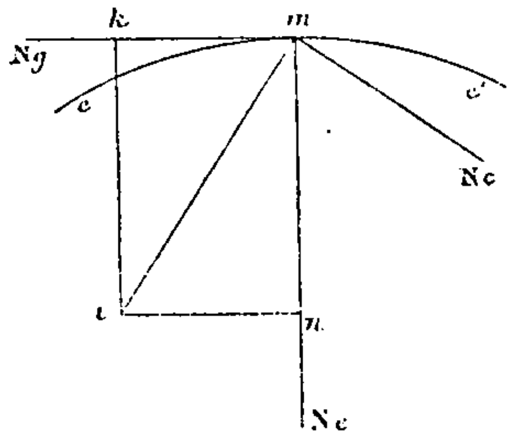

Fig. 4.

Soient N_e, N_g, N_c les trois normales, au point m. En désignant par p la distance du centre au plan tangent, en m, à l'hyperboloïde, on trouve :

$$\cos(N_e, N_c) = \frac{p}{\sqrt{v^2 + p^2}},$$

$$\cos(N_g, N_c) = -\frac{v}{\sqrt{v^2 + p^2}}.$$

Prenons, pour plan de la figure, celui qui est normal, en m, à la ligne de courbure. Supposons le centre O projeté, en n et en k, sur les normales N_e, N_c : $mn = v$, $mk = p$. Si l'on achève le rectangle, on a

$$\cos imk = \frac{p}{\sqrt{p^2 + v^2}}, \qquad \cos imn = \frac{v}{\sqrt{p^2 + v^2}};$$

donc *la normale* N_c, *au cône, est perpendiculaire à* im.

14. Cette simple remarque donne lieu au théorème suivant, qui complète une proposition donnée par Lamarle (*) :

1° *Si, par le centre* O, *l'on mène des plans* P, *parallèles aux plans tangents à l'ellipsoïde, en tous les points d'une ligne de courbure* L, *le cône* C, *enveloppe des plans* P, *coupe l'ellipsoïde suivant une ligne sphérique : le rayon de la sphère est le paramètre* g *de l'hyperboloïde sur lequel la ligne* L *est située ;*

2° *La génératrice* de *contact, entre le plan* P *et le cône, est parallèle à la normale* N_g *à l'hyperboloïde* (**).

(*) « *Si du centre* O *de* (E) *on mène des plans parallèles aux plans tangents à cette surface menés des différents points d'une ligne de courbure* (m), *ces plans enveloppent un cône du* 2° *degré qui coupe* (E) *suivant une ligne sphérique.* » (Mannheim. *Congrès du Havre*).

(**) M. Mannheim a déduit son théorème du théorème de Lamarle. Du reste, les deux propositions n'en font réellement qu'une, si l'on fait attention au lemme suivant :

Soient une surface développable Σ, *et un cône* Σ_1, *ayant leurs génératrices respectivement parallèles. Soient, sur ces deux surfaces,* L, L_1 *les trajectoires orthogonales des génératrices : les tangentes* MT, M_1T_1, *en deux points correspondants, sont parallèles.*