Association française pour l'avancement des sciences. 5, Comptes-rendus de la 5me session Clermont-Ferrand 1876

7. REMARQUE. — On doit observer, d'une part, que le terme de rang 2^{31} dans la série de LÉONARD DE PISE, de l'exemple numérique, aurait, dans le système décimal, *cinq cent millions* de chiffres environ, et d'autre part, que les considérations qui précèdent, sur le système binaire, s'appliquent à l'étude des nombres de la forme 2^{p-1}, p désignant un nombre premier de la forme $4m+3$, tels que

$$43, 47, 59, 67, 71, 79, 103, 107, 127, \ldots\ldots$$

J'ai conçu, en suivant cette voie, le plan d'un mécanisme qui permettrait de décider du mode de composition de ces nombres, et de trouver des nombres premiers ayant *mille* chiffres, dans le système décimal, et même beaucoup plus.

M. P. TCHEBICHEF

Membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg

MACHINE ARITHMÉTIQUE ADDITIVE A MOUVEMENT CONTINU

— *Séance du 19 août 1876* —

M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liége

SUR LES FONCTIONS X_n, DE LEGENDRE

— *Séance du 19 août 1876* —

Le polynôme X_n, coefficient de z^n dans le développement de

$$u=(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

jouit d'un grand nombre de propriétés, découvertes par Legendre, Laplace, Rodrigues, Jacobi..... Je me propose d'en indiquer quelques autres, extrêmement simples, et qui cependant n'ont pas encore été signalées. Au moins, je ne les ai rencontrées dans aucun des mémoires que j'ai pu consulter, pas même dans le *Traité des fonctions sphériques*, de M. Heine.

Théorème I. *On a, entre* X_{n-1} *et* X_n, *les relations*

$$(1-x)\left(\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=n(X_{n-1}-X_n),$$

$$(1+x)\left(\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)=n(X_{n-1}+X_n).\text{(*)}$$

Théorème II.

$$\frac{1}{n}\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx}=\frac{X_{n-1}^2-X_n^2}{1-x^2}.$$

Corollaires :

$$\int_0^x \frac{X_{n-1}^2-X_n^2}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{n}X_{n-1}X_n,$$

$$\int_0^1 \frac{X_{n-1}^2-X_n^2}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{n},$$

$$\int_0^x \frac{1-X_n^2}{1-x^2}\,dx=X_0X_1+\frac{1}{2}X_1X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_{n-1}X_n.$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}=X_0X_1+\frac{1}{2}X_1X_2+\frac{1}{3}X_2X_3+\cdots,$$

$$\int_0^1 \frac{1-X_n^2}{1-x^2}\,dx=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

$$\int_0^x \frac{1+X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n-1}^2-nX_n^2}{1-x^2}\,dx=X_0X_1+X_1X_2+\cdots+X_{n-1}X_n,$$

$$\int_0^1 \frac{1+X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n-1}^2-nX_n^2}{1-x^2}\,dx=n,$$

$$\int_0^1 \frac{1-2X_1^2+2X_2^2-2X_3^2+\cdots\pm 2X_{n-1}^2\mp X_n^2}{1-x^2}\,dx=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\pm\frac{1}{n},$$

(*) Pour abréger, nous ne donnons pas les démonstrations.

$$\int_0^1 \frac{1-2\left(X_1^2-X_2^2+X_3^2-\cdots\right)}{1-x^2}\,dx = l\,.\,2,$$

$$\int_0^1 \frac{X_1^2-X_2^2+X_3^2-\cdots-X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{X_{2n+1}^2-X_{2n+2}^2+\cdots-X_{4n}^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{X_n^2-X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

$$\lim.\int_0^1 \frac{X_n^2-X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = 2\lim.\int_0^1 \frac{X_{2n+1}^2+X_{2n+2}^2+\cdots-X_{4n}^2}{1-x^2}\,dx = l.\,2,$$

$$\int_0^1 \frac{1-2X_1^2+2X_2^2-\cdots-(1\pm 2)X_n^2\pm\cdots-2X_{2n-1}^2+2X_{2n}^2}{1-x^2}\,dx = o,$$

$$\int_0^x \frac{1-X_1^2}{1-x^2}\,dx = X_1,\ 2\int_0^x \frac{X_1^2-X_2^2}{1-x^2}\,dx = X_1X_2,\ \ldots,$$

$$n\int_0^x \frac{X_{n-1}^2-X_n^2}{1-x^2}\,dx = X_{n-1}X_n,$$

$$\int_0^x \frac{1-3X_1^2+5X_2^2-7X_3^2+\cdots\pm(2n-1)X_{n-1}^2\mp nX_n^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$X_0X_1-X_1X_2+X_2X_3-\cdots\pm X_{n-1}X_n,$$

$$\int_0^1 \frac{1-3X_1^2+5X_2^2-7X_3^2+\cdots\pm(2n-1)X_{n-1}^2\mp nX_n^2}{1-x^2}\,dx =$$

$$\begin{Bmatrix} o\ (n\ pair) \\ 1\ (n\ impair) \end{Bmatrix}.$$

Théorème III.

$$n\,\frac{d\,(X_{n-1}\,X_n)}{dx} = \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2.$$

Corollaires :

$$\int_0^x \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx - \int_0^x \left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2 dx = nX_{n-1}X_1,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2 dx = n,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} n (n+1),$$

$$\frac{1}{n}\int_0^x \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{n(n-1)}\int_0^x \left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2 dx + \cdots + \frac{1}{2.1}\int_0^x \left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2 dx$$
$$= X_0X_1 + X_1X_2 + \cdots + X_{n-1}X_n,$$

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{n(n-1)}\int_0^1 \left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2 dx + \cdots + \frac{1}{2.1}\int_0^1 \left(\frac{dX_1}{dx}\right) dx = n,$$

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dX_{n-1}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_{n-2}}{dx}\right)^2\right] dx = 1.$$

Théorème IV.

$$2x\frac{d\,(X_{n-1}X_n)}{dx} = \frac{d\left(X_{n-1}^2 + X_n^2\right)}{dx}.$$

Corollaires :

$$X_{n-1}^2 - 2x\,X_{n-1}X_n + X_n^2 = -2\int X_{n-1}X_n\,dx + const.,$$

$$X_{n-1}^2 - 2x\,X_{n-1}X_n + X_n^2 = -2\int_{-1}^x X_{n-1}X_n\,dx,$$

$$\int_{-1}^0 X_{n-1}X_n\,dx = -\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\frac{n\,(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdots\quad\frac{n}{2}}\right]^2 \text{ (n } pair\text{)},$$

$$\int_{-1}^0 X_{n-1}X_n\,dx = -\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\frac{(n-1)(n-2)\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^2 \text{ (n } impair\text{)}.$$

Théorème V.

$$X_{n-1}X_n = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x}\, d\left[X_{n-1}^2 + X_n^2\right].$$

Corollaires :

$$X_0X_1 - X_1X_2 + \cdots \pm X_{n-1}X_n = \pm\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x}\, d\left(X_n^2\right),$$

$$\int_0^1 \frac{X_n}{x}\, dX_n = o \quad (\text{n } pair), \quad \int_0^1 \frac{X_n}{x}\, dX_n = +1 \quad (\text{n } impair).$$

Théorème VI. *La fonction* u *satisfait à l'équation*

$$\left[ax^2 - (a + b + \alpha + 2\beta)\, xz + (b + \beta)\, z^2 - dx + dz + \alpha + \beta\right] \frac{du}{dx}$$
$$+ \left[-(a + 2\alpha)\, xz + bz^2 + dz + \alpha\right] \frac{du}{dz} = (\alpha x + \beta z\, u).$$

Corollaires :

$$-(x - z)(x + 1)\frac{du}{dx} + \left[z^2 + (1 - x)\, z + 1\right]\frac{du}{dz} = u\,(x - z),$$

$$(1 - zx)\frac{du}{dx} + (1 - 2zx)\frac{du}{dz} = ux,$$

$$(x - z)\frac{du}{dx} - z\frac{du}{dz} = o,$$

etc.

Théorème VII. *On a, entre* X_{n-1} *et* X_n, *la relation*

$$\frac{dX_n}{dx} = nX_{n-1} + x\frac{dX_{n-1}}{dx}.$$

Théorème VIII. *Si* α *est une racine de* $X_n = o$, on a

$$X_n = x^n \int_\alpha^x \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}.$$

Corollaire : Si α, β sont deux racines de l'équation $X_n = o$ (*) on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}} = o.$$

Application. Soient

$$X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

L'intégrale indéfinie de $\frac{dX_4}{x^6}$ est $\frac{5}{8x^4}(3 - 14x^2)$. On doit donc trouver

$$\frac{3 - 14\beta^2}{\beta^4} = \frac{3 - 14\alpha^2}{\alpha^4},$$

ou

$$3(\alpha^2 + \beta^2) = 14\alpha^2\beta^2.$$

Or :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{70}{63} = \frac{10}{9}, \quad \alpha^2\beta^2 = \frac{15}{63} = \frac{5}{9};$$

et ces valeurs rendent identique l'égalité précédente.

Théorème IX. *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$X_n = \frac{1}{n(x^2-1)^{\frac{n}{2}-1}} \frac{d\left[(x^2-1)^{\frac{n}{2}} X_{n-1}\right]}{dx}.$$

Remarque. Si l'on fait

$$(1 - x^2)^{\frac{n}{2}} X_{n-1} = Z_{n-1},$$

on a, plus simplement,

$$Z_n = -\frac{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{n} \frac{dZ_{n-1}}{dx}.$$

Théorème X.

$$X_n = n(1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \int_\alpha^x \frac{X_{n-1}}{(1 - x^2)^{\frac{n}{2}+1}} dx.$$

(*) On peut les supposer positives, afin que $\frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}$ reste finie entre α et β.

Théorème XI.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{X_{n-1}}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}+1}}\, dx = o.$$

Théorème XII. *On a, entre trois fonctions consécutives, la relation*

$$(2n+1)\frac{dXn}{dx} = n\,(n+1)\,\frac{X_{n-1} - X_{n+1}}{1-x^2}.$$

Corollaires : Les équations

$$X_{n+1} - X_{n-1} = o, \quad \frac{dX_n}{dx} = o$$

admettent les mêmes racines (*);

$$\frac{5}{2.3}X_2 + \frac{9}{4.5}X_4 + \cdots + \frac{2n+1}{n\,(n+1)}X_n =$$

$$\int \frac{X_1 - X_{n+1}}{1-x^2}\, dx + const. \quad (\text{n } pair),$$

$$\frac{3}{1.2}X_1 + \frac{7}{3.4}X_3 + \cdots + \frac{2n+1}{n\,(n+1)}X_n =$$

$$\int \frac{X_1 - X_{n+1}}{1-x^2}\, dx + const. \quad (\text{n } impair),$$

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{1.2}X_1 + \frac{7}{3.4}X_3 + \frac{11}{5.6}X_5 +$$

(*) On fait abstraction de ± 1.