

Association française pour  
l'avancement des sciences. 5,  
Comptes-rendus de la 5me  
session Clermont-Ferrand  
1876

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (005 ; 1876 ; Clermont-Ferrand). Association française pour l'avancement des sciences. 5, Comptes-rendus de la 5me session Clermont-Ferrand 1876. 1877.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

7. REMARQUE. — On doit observer, d'une part, que le terme de rang  $2^{31}$  dans la série de LÉONARD DE PISE, de l'exemple numérique, aurait, dans le système décimal, *cinq cent millions* de chiffres environ, et d'autre part, que les considérations qui précèdent, sur le système binaire, s'appliquent à l'étude des nombres de la forme  $2^{p-1}$ ,  $p$  désignant un nombre premier de la forme  $4m + 3$ , tels que

43, 47, 59, 67, 71, 79, 103, 107, 127, . . . . .

J'ai conçu, en suivant cette voie, le plan d'un mécanisme qui permettrait de décider du mode de composition de ces nombres, et de trouver des nombres premiers ayant *mille* chiffres, dans le système décimal, et même beaucoup plus.

---

## M. P. TCHEBICHEF

Membre de l'Académie de Saint-Petersbourg

---

### MACHINE ARITHMÉTIQUE ADDITIVE A MOUVEMENT CONTINU

— Séance du 19 août 1876 —

---

## M. E. CATALAN

Professeur d'analyse à l'Université de Liège

---

### SUR LES FONCTIONS $X_n$ , DE LEGENDRE

— Séance du 19 août 1876 —

Le polynôme  $X_n$ , coefficient de  $z^n$  dans le développement de

$$u = (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

jouit d'un grand nombre de propriétés, découvertes par Legendre, Laplace, Rodrigues, Jacobi. . . . Je me propose d'en indiquer quelques autres, extrêmement simples, et qui cependant n'ont pas encore été signalées. Au moins, je ne les ai rencontrées dans aucun des mémoires que j'ai pu consulter, pas même dans le *Traité des fonctions sphériques*, de M. Heine.

*Théorème I.* On a, entre  $X_{n-1}$  et  $X_n$ , les relations

$$(1-x) \left( \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} \right) = n(X_{n-1} - X_n),$$

$$(1+x) \left( \frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} \right) = n(X_{n-1} + X_n). (*)$$

*Théorème II.*

$$\frac{1}{n} \frac{d(X_{n-1} X_n)}{dx} = \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1-x^2}.$$

*Corollaires :*

$$\int_0^x \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{n} X_{n-1} X_n,$$

$$\int_0^1 \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1-x^2} dx = \frac{1}{n},$$

$$\int_0^x \frac{1-X_n^2}{1-x^2} dx = X_0 X_1 + \frac{1}{2} X_1 X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_{n-1} X_n,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = X_0 X_1 + \frac{1}{2} X_1 X_2 + \frac{1}{3} X_2 X_3 + \dots,$$

$$\int_0^1 \frac{1-X_n^2}{1-x^2} dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\int_0^x \frac{1 + X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2 - nX_n^2}{1-x^2} dx = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n,$$

$$\int_0^1 \frac{1 + X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{n-1}^2 - nX_n^2}{1-x^2} dx = n,$$

$$\int_0^1 \frac{1 - 2X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_3^2 + \dots \pm 2X_{n-1}^2 \mp X_n^2}{1-x^2} dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \pm \frac{1}{n},$$

(\*) Pour abrégier, nous ne donnons pas les démonstrations.

$$\int_0^1 \frac{1 - 2(X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - \dots)}{1 - x^2} dx = l. 2,$$

$$\int_0^1 \frac{X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - \dots - X_{2n}^2}{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{X_{2n+1}^2 - X_{2n+2}^2 + \dots - X_{4n}^2}{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{X_n^2 - X_{2n}^2}{1 - x^2} dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$\lim. \int_0^1 \frac{X_n^2 - X_{2n}^2}{1 - x^2} dx = 2 \lim. \int_0^1 \frac{X_{2n+1}^2 + X_{2n+2}^2 + \dots - X_{4n}^2}{1 - x^2} dx = l. 2,$$

$$\int_0^1 \frac{1 - 2X_1^2 + 2X_2^2 - \dots - (1 \pm 2) X_n^2 \pm \dots - 2X_{2n-1}^2 + 2X_{2n}^2}{1 - x^2} dx = 0,$$

$$\int_0^x \frac{1 - X_1^2}{1 - x^2} dx = X_1, \quad 2 \int_0^x \frac{X_1^2 - X_2^2}{1 - x^2} dx = X_1 X_2, \dots,$$

$$n \int_0^x \frac{X_{n-1}^2 - X_n^2}{1 - x^2} dx = X_{n-1} X_n,$$

$$\int_0^x \frac{1 - 3X_1^2 + 5X_2^2 - 7X_3^2 + \dots \pm (2n-1) X_{n-1}^2 \mp nX_n^2}{1 - x^2} dx =$$

$$X_0 X_1 - X_1 X_2 + X_2 X_3 - \dots \pm X_{n-1} X_n,$$

$$\int_0^1 \frac{1 - 3X_1^2 + 5X_2^2 - 7X_3^2 + \dots \pm (2n-1) X_{n-1}^2 \mp nX_n^2}{1 - x^2} dx =$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ (n pair)} \\ 1 \text{ (n impair)} \end{array} \right\}.$$

*Théorème III.*

$$n \frac{d(X_{n-1} X_n)}{dx} = \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 - \left( \frac{dX_{n-1}}{dx} \right)^2.$$

Corollaires :

$$\int_0^x \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \left( \frac{dX_{n-1}}{dx} \right)^2 dx = nX_{n-1}X_1,$$

$$\int_0^1 \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 \left( \frac{dX_{n-1}}{dx} \right)^2 dx = n,$$

$$\int_0^1 \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} n (n + 1),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^x \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{n(n-1)} \int_0^x \left( \frac{dX_{n-1}}{dx} \right)^2 dx + \dots + \frac{1}{2 \cdot 1} \int_0^x \left( \frac{dX_1}{dx} \right)^2 dx \\ = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{n(n-1)} \int_0^1 \left( \frac{dX_{n-1}}{dx} \right)^2 dx + \dots + \frac{1}{2 \cdot 1} \int_0^1 \left( \frac{dX_1}{dx} \right)^2 dx = n,$$

$$\int_0^1 \left[ \left( \frac{dX_n}{dx} \right)^2 - 2 \left( \frac{dX_{n-1}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dX_{n-2}}{dx} \right)^2 \right] dx = 1.$$

Théorème IV.

$$2x \frac{d(X_{n-1} X_n)}{dx} = \frac{d(X_{n-1}^2 + X_n^2)}{dx}.$$

Corollaires :

$$X_{n-1}^2 - 2x X_{n-1} X_n + X_n^2 = -2 \int X_{n-1} X_n dx + \text{const.},$$

$$X_{n-1}^2 - 2x X_{n-1} X_n + X_n^2 = -2 \int_{-1}^x X_{n-1} X_n dx,$$

$$\int_{-1}^0 X_{n-1} X_n dx = -\frac{1}{2^{2n+1}} \left[ \frac{n(n-1) \dots \left( \frac{n}{2} + 1 \right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}} \right]^2 \quad (n \text{ pair}),$$

$$\int_{-1}^0 X_{n-1} X_n dx = -\frac{1}{2^{2n-1}} \left[ \frac{(n-1)(n-2) \dots \left( \frac{n+1}{2} \right)}{1 \cdot 2 \dots \left( \frac{n-1}{2} \right)} \right]^2 \quad (n \text{ impair}).$$

*Théorème V.*

$$X_{n-1}X_n = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{x} d [X_{n-1}^2 + X_n^2].$$

*Corollaires :*

$$X_0X_1 - X_1X_2 + \dots \pm X_{n-1}X_n = \pm \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{x} d (X_n^2),$$

$$\int_0^1 \frac{X_n}{x} dX_n = 0 \quad (n \text{ pair}), \quad \int_0^1 \frac{X_n}{x} dX_n = +1 \quad (n \text{ impair}).$$

*Théorème VI. La fonction u satisfait à l'équation*

$$\left[ ax^2 - (a + b + \alpha + 2\beta) xz + (b + \beta) z^2 - dx + dz + \alpha + \beta \right] \frac{du}{dx}$$

$$+ \left[ -(a + 2\alpha) xz + bz^2 + dz + \alpha \right] \frac{du}{dz} = (\alpha x + \beta z u).$$

*Corollaires :*

$$-(x - z)(x + 1) \frac{du}{dx} + \left[ z^2 + (1 - x)z + 1 \right] \frac{du}{dz} = u(x - z),$$

$$(1 - zx) \frac{du}{dx} + (1 - 2zx) \frac{du}{dz} = ux,$$

$$(x - z) \frac{du}{dx} - z \frac{du}{dz} = 0,$$

etc.

*Théorème VII. On a, entre  $X_{n-1}$  et  $X_n$ , la relation*

$$\frac{dX_n}{dx} = nX_{n-1} + x \frac{dX_{n-1}}{dx}.$$

*Théorème VIII. Si  $\alpha$  est une racine de  $X_n = 0$ , on a*

$$X_n = x^n \int_{\alpha}^x \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}.$$

Corollaire : Si  $\alpha, \beta$  sont deux racines de l'équation  $X_n = 0$  (\*) on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}} = 0.$$

Application. Soient

$$X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad X_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

L'intégrale indéfinie de  $\frac{dX_4}{x^6}$  est  $\frac{5}{8x^4}(3 - 14x^2)$ . On doit donc trouver

$$\frac{3 - 14\beta^2}{\beta^4} = \frac{3 - 14\alpha^2}{\alpha^4},$$

ou

$$3(\alpha^2 + \beta^2) = 14\alpha^2\beta^2.$$

Or :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{70}{63} = \frac{10}{9}, \quad \alpha^2\beta^2 = \frac{15}{63} = \frac{5}{9};$$

et ces valeurs rendent identique l'égalité précédente.

*Théorème IX.* On a, entre deux fonctions consécutives, la relation

$$X_n = \frac{1}{n(x^2 - 1)^{\frac{n}{2} - 1}} \frac{d \left[ (x^2 - 1)^{\frac{n}{2}} X_{n-1} \right]}{dx}.$$

*Remarque.* Si l'on fait

$$(1 - x^2)^{\frac{n}{2}} X_{n-1} = Z_{n-1},$$

on a, plus simplement,

$$Z_n = - \frac{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{n} \frac{dZ_{n-1}}{dx}.$$

*Théorème X.*

$$X_n = n(1 - x^2)^{\frac{n}{2}} \int_{\alpha}^x \frac{X_{n-1}}{(1 - x^2)^{\frac{n}{2} + 1}} dx.$$

(\*) On peut les supposer positives, afin que  $\frac{dX_{n-1}}{x^{n+1}}$  reste finie entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

*Théorème XI.*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{X_{n-1}}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}+1}} dx = 0.$$

*Théorème XII.* On a, entre trois fonctions consécutives, la relation

$$(2n+1) \frac{dX_n}{dx} = n(n+1) \frac{X_{n-1} - X_{n+1}}{1-x^2}.$$

*Corollaires :* Les équations

$$X_{n+1} - X_{n-1} = 0, \quad \frac{dX_n}{dx} = 0$$

admettent les mêmes racines (\*);

$$\frac{5}{2.3} X_2 + \frac{9}{4.5} X_4 + \dots + \frac{2n+1}{n(n+1)} X_n =$$

$$\int \frac{X_1 - X_{n+1}}{1-x^2} dx + \text{const.} \quad (n \text{ pair}),$$

$$\frac{3}{1.2} X_1 + \frac{7}{3.4} X_3 + \dots + \frac{2n+1}{n(n+1)} X_n =$$

$$\int \frac{X_1 - X_{n+1}}{1-x^2} dx + \text{const.} \quad (n \text{ impair}),$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{1.2} X_1 + \frac{7}{3.4} X_3 + \frac{11}{5.6} X_5 +$$

(\*) On fait abstraction de  $\pm 1$ .