SUR QUELQUES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS;

PAR E. CATALAN

Mes lettres du 14 novembre 1880 et du 30 janvier 1881 contiennent les propositions suivantes, que l'Académie des *Nuovi Lincei* m'a fait l'honneur de publier :

1° *Si* $a - b = \mathcal{M}\,3$, $a^2 + b^2$ *est la somme de trois carrés.*

2° *Si* $a - b = \mathcal{M}\,3$, $a^{2m} + b^{2m}$ *est la somme de trois carrés.*

3° *Soit* $z^2 = 2xy$. *Si* $a - b = \mathcal{M}\,(x + y)$, $a^2 + b^2$ *est la somme de trois carrés.*

4° *Toute puissance de* 3 *est la somme de trois carrés, premiers avec* 3.

Le dernier numéro de *Mathesis* (mai 1881), contient des démonstrations du théorème 4°, par MM. *Neuberg* et *Realis*, accompagnées de théorèmes plus généraux. En outre, ces deux honorables Géomètres m'ont fait connaître diverses propositions qui se rattachent, plus ou moins directement, aux précédentes.

Exemples :

$$\left.\begin{array}{l} 4(3a + b)^2 + b^2 = (4a + 2b)^2 + (4a + b)^2 + (2a)^2, \\ 9(a^2 + b^2) = (2a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (a - 2b)^2 ; \end{array}\right\} \text{(S. Realis)}$$

Si $a - b = \mathcal{M}\,(u^2 + 2v^2)$, $a^2 + b^2$ *est la somme de trois carrés.* (J. Neuberg *)

Ces communications, imprimées ou manuscrites, ont provoqué le petit travail suivant.

I.

L'égalité

$$\left.\begin{array}{c} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\ (x^2 + y^2 + z^2) = \\ (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha y + \beta z + \gamma x)^2 + (\alpha z + \beta x + \gamma y)^2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

devient *identique* si

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0. \quad (2)$$

Pour satisfaire à cette condition, il suffit de prendre

(*) M. J. N. m'a fait observer que le théorème du jeune *De Lacuvellerie* (lettre du 10 octobre 1880), doit être attribué à M. Proth (*Nouvelle Correspondance mathématique*, tome III, p. 399).

$$\alpha = (a-b)(a-c),\ \beta = (b-a)(b-c),\ \gamma = (c-a)(c-b). \quad (3)$$

Ainsi : a, b, c, x, y, z *étant quelconques, on a, identiquement :*

$$\left.\begin{aligned}&\{[(a-b)(a-c)]^2 + [(b-c)(b-a)]^2 + [(c-a)(c-b)]^2\}(x^2+y^2+z^2) = \\ &\quad [(a-b)(a-c)x + (b-c)(b-a)y + (c-a)(c-b)z]^2 \\ &+ [(a-b)(a-c)y + (b-c)(b-a)z + (c-a)(c-b)x]^2 \\ &+ [(a-b)(a-c)z + (b-c)(b-a)x + (c-a)(c-b)y]^2.\ (*)\end{aligned}\right\}(A)$$

II.

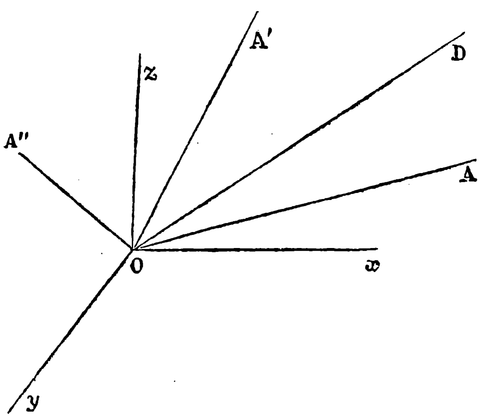
Dans l'identité (A), posons

$$(a-b)(a-c) = f\,\mathrm{D},\ (b-c)(b-a) = g\mathrm{D},\ (c-a)(c-b) = h\mathrm{D}. \quad (4)$$

A cause de

$$\mathrm{D} = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab, \quad (5)\ (**)$$

les quantités f, g, h sont les cosinus *directifs* d'une certaine droite OA. Si, comme nous le supposerons constamment, les quantités a, b, c sont des entiers, positifs ou négatifs, *ces cosinus sont rationnels.*



De plus,

$$f + g + h = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab}{\mathrm{D}},$$

ou

$$f + g + h = 1. \quad (6)$$

Soit OD la *droite également inclinée sur les trois axes ;* (***) de manière que

$$\cos \mathrm{DO}x = \cos \mathrm{DO}y = \cos \mathrm{DO}z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(*) Le premier facteur,

$$[(a-b)(a-c)]^2 + [(b-c)(b-a)]^2 + [(c-a)(c-b)]^2$$

égale

$$(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)^2.$$

(Edouard Lucas, *N. C. M.*, tome II, p. 102).

(**) Voir la note précédente.

(***) Cette ligne se rencontre dans divers problèmes. Ne pourrait-on la désigner sous le nom de *droite isogone*?

Nous aurons, par la relation (6),

$$\cos \mathrm{AOD} = \frac{1}{\sqrt{3}} (f+g+h) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, *la droite* OA *est une génératrice du cône de révolution dont* OD *est l'axe, et dont trois autres génératrices sont* Ox, Oy, Oz.

L'identité (A) étant mise sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = (fx + gy + hz)^2 + (f'x + g'y + h'z)^2 + (f''x + g''y + h''z^2),$$

on a

$$f' = h,\ g' = f,\ h' = g,\ f'' = g,\ g'' = h,\ h'' = f;$$

puis

$$ff' + gg' + hh' = fh + gf + hg = 0,$$
$$ff'' + gg'' + hh'' = fg + gh + hf = 0,$$
$$f'f'' + g'g'' + h'h'' = gh + fh + gf = 0.$$

Si donc OA$'$, OA$''$ sont les génératrices déterminées par f', g', h' et par f'', g'', h'', *l'angle* OAA$'$A$''$ *est tri-rectangle.*

Etc.

III.

On tire, de l'équation (2) :

$$\gamma = -\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha} = -\alpha + \frac{\alpha^2}{\beta+\alpha},$$

Si α, β sont entiers, on doit, pour que γ soit entier, prendre $\beta + \alpha$ parmi les diviseurs de α^2; c'est-à-dire, en posant

$$\alpha^2 = \lambda\mu :$$

$$\beta = \lambda - \alpha, \quad \gamma = \mu - \alpha.$$

Si λ, μ ont un facteur commun, ce facteur divise α, β et γ; en sorte que l'équation (2) serait *réductible*. Afin d'obtenir des solutions *essentiellement différentes*, posons

$$\alpha = pq, \tag{7}$$

p et q *étant premiers entre eux*. Alors

$$\beta = p(p-q), \quad \gamma = q(q-p); \tag{8}$$

et l'égalité (1) devient

$$[p^2 (p-q)^2 + q^2 (p-q)^2 + p^2 q^2] (x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$[pqx + (p-q)(py - qz)]^2 + [pqy + (p-q)(pz - qx)]^2$$
$$+ [pqz + (p-q)(px - qy)]^2;$$

ou, par un changement de lettres :

$$\left.\begin{array}{l} [(ab + b^2)^2 + (a^2 + ab)^2 + (ab)^2] (x^2 + y^2 - z^2) = \\ [abx - (a+b)(by + az)]^2 + [aby - (a+b)(bz + ax)]^2 \\ + [abz - (a+b)(abx + ay)]^2. \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Cette identité, trouvée par. M. Realis (*), donne une infinité de cas dans lesquels *le produit d'une somme de trois carrés, par une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés.*

V.

Si $a = b$, la relation (B) se réduit à

$$9(x^2 + y^2 + z^2) = (2y + 2z - x)^2 + (2z + 2x - y)^2 + (2x + 2y - z)^2. \quad \text{(C)}$$

Il résulte de celle-ci, en particulier, que si l'on a mis 3^n sous la forme $x^2 + y^2 + z^2$, on pourra, immédiatement, mettre 3^{n+2} sous la même forme.

Exemple : $$3^4 = 8^4 + 4^2 + 1^2;$$

donc

$$3^6 = (8 + 2 - 8)^2 + (2 + 16 - 4)^2 + (16 + 8 - 1)^2,$$

ou

$$3^6 = 2^2 + 14^2 + 23^2.$$

On a, par suite, une nouvelle démonstration du théorème 4°.

Remarque. L'identité (C) peut encore être écrite ainsi :

$$9(x^2 + y^2 + z^2) = (x + 2y + 2z)^2 + (2x + y - 2z)^2 + (2x - 2y + z)^2, \quad \text{(C')}$$

$$9(x^2 + y^2 + z^2) = (x - 2y + 2z)^2 + (2x - y - 2z)^2 + (2x + 2y + z)^2. \quad \text{(C'')}$$

Par conséquent, le produit de $2^2 + 2^2 + 1^2$, *par une somme de trois carrés*,

(*) *Mathesis*, p. 75.

peut être, au moins de trois manières, décomposé en une somme de trois carrés (*). La même *extension* est applicable à l'identité (B).

VI.

Plus généralement, d'après cette même identité (B), *Si* $(a^2+ab+b^2)^n$ *a la forme* $x^2+y^2+z^2$, $(a^2+ab+b^2)^{n+2}$ *a la même forme*. Or,

$$(a^2+ab+b^2)^2=[a(a+b)]^2+[b(a+b)]^2+(ab)^2;$$

donc *toute puissance paire, de* a^2+ab+b^2, *est la somme de trois carrés* (**).

Exemple. $a=3$, $b=5$. On a

$$(3^2+3.5+5^2)^2=49^2=24^2+40^2+15^2;$$

donc, en prenant $x=24$, $y=40$, $z=15$:

$$49^4=[15.24-8(5.40+3.15)]^2+[15.40-8(5.15+3.24)]^2$$
$$+[15.15-8(5.24+3.40)]^2,$$

ou

$$49^4=1\,600^2+576^2+1\,695^2.$$

Remarque. Si a et b sont des carrés, a^2+ab+b^2 est la somme de trois carrés; donc, dans ce cas, $(a^2+ab+b^2)^n$ est la somme de trois carrés; ou, ce qui est équivalent:

$(a^4+a^2b^2+b^4)^n$ *est toujours la somme de trois carrés.*

Exemple. $a=2$, $b=1$; de manière que $a^4+a^2b^2+b^4=21=4^2+2^2+1^2$. On trouve

$$21^2=20^2+5^2+4^2,$$
$$21^3=14^2+77^2+56^2=29^2+32^2+86^2,$$
$$21^4=25^2+400^2+184^2;\ \text{etc.}$$

Autre remarque. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$. D'ailleurs, *le produit*

(*) Il est bien entendu que, dans certains cas particuliers, ce nombre de décompositions est réductible.

Exemple:

$$3^6=2^2+14^2+23^2=18^2+18^2+9^2=2^2+10^2+25^2.$$

L'égalité

$$3^6=18^2+18^2+9^2$$

revient à

$$3^2=2^2+2^2+1^2;$$

donc elle ne doit pas être comptée.

(**) Ceci est une généralisation du théorème 4°

de deux facteurs, égaux chacun à la différence de deux carrés, est égal, aussi, à la différence de deux carrés. Par conséquent,

$$(a^4 + a^2 b^2 + b^4)^4 \text{ est la différence de deux carrés},$$

et l'on a, simultanément,

$$(a^4 + a^2 b^2 + b^4)^n = X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2 - V^2 \ (*); \qquad (9)$$

X, Y, Z, U, V étant des fonctions de a, b, que l'on détermine, assez facilement, pour les valeurs successives de n.

Troisième remarque. De là résulte que l'identité (B) donne des *séries de systèmes de formules* propres à résoudre l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + V^2 = U^2. \qquad (10)$$

En outre, de chaque système de formules, on déduit une *infinité de solutions*.

Exemples. L'équation est vérifiée par:

$$X = a^3 b^3 + a^2 b^4 + ab^5, \quad Y = a^6 + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 + b^6,$$

$$Z = a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3, \qquad V = 3a^5 b + 7 a^3 b^3 + 3ab^5,$$

$$U = a^6 + 6a^4 b^2 + 6 a^2 b^4 + b^6;$$

par

$$X = 2a^3 b + 2a^2 b^2, \quad Y = 2a^2 b^2 + 2ab^3,$$

$$Z = a^4 + 2a^3 b + a^2 b^2 + 2a b^3 + b^4,$$

$$V = 4 (a + b)(a^2 + 3ab + b^2) \sqrt{ab}, \ (**)$$

$$U = a^4 + 10 a^3 b + 19 a^2 b^2 + 10 ab^3 + b^4; \qquad \text{etc.}$$

Faisant $a = 2$, $b = 3$; $a = 2$, $b = -3$, on trouve les identités *numériques* :

(*) Lorsque $n = 1$, $a^4 + a^2 b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$. Donc : *aucun nombre, de la forme $x^4 + x^2 y^2 + y^4$, excepté 1 et 3, n'est premier.*

Cette propriété *évidente*, qui rappelle un théorème de Sophie Germain (*N. C. M.*, tome VI, p. 455), a-t-elle été remarquée ?

(**) Pour n'avoir pas le terme $\sqrt{ab}$, il suffit, évidemment, de changer a en a^2, b en b^2.

$$1\,026^2 + 1\,045^2 + 456^2 + 3\,258^2 = 3\,601^2,$$

$$378^2 + 1\,477^2 + 168^2 + 3\,258^2 = 3\,601^2,$$

$$120^2 + 180^2 + 289^2 + 6.620^2 = 1561^2,$$

$$24^2 + 36^2 + 23^2 - 6.\ 20^2 = 1; \quad \text{etc.}$$

VII.

La lettre du 11 novembre 1880 contient les formules

$$a^2 + b^2 = (a - p'p''x)^2 + (a - p'p''y)^2 + (p'p''z)^2, \qquad (11)$$

$$a^2 + b^2 = (a - p''px)^2 + (a - p''py)^2 + (p''pz)^2, \qquad (12)$$

$$a^2 + b^2 = (a - pp'x)^2 + (a - pp'y)^2 + (pp'z)^2, \qquad (13)$$

$$2xy = z^2, \ 2x'y' = z'^2, \ 2x''y'' = z''^2,$$

$$p' = x + y, \ p' = x' + y', \ p'' = x'' + y'',$$

$$a - b = pp'p''.$$

Assez souvent, les décompositions (11), (12), (13) se réduisent à *deux*, ou même à *une*. Il n'est donc pas inutile, peut-être, de donner une application dans laquelle les trois expressions de $a^2 + b^2$ sont différentes. A cet effet, soient :

$$z = 10, \quad x = 25, \quad y = 2;$$

$$z' = 6, \quad x' = 2, \quad y' = 9;$$

$$z'' = 14, \quad x'' = 49, \quad y'' = 2.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$p = 27, \ p' = 11, \ p'' = 51;$$

$$p'p'' = 561, \ p''p = 1\,377, \ pp' = 297, \ pp'p'' = 15\,147.$$

Soit encore $b = 8$; et, par conséquent, $a = 15\,155$.

Les formules (11), (12), (13) donnent

$$15\,155^2 + 8^2 = (15\,155 - 561.\ 25)^2 + (15\,155 - 561.\ 2)^2 + (561.\ 10)^2,$$

$$15\,155^2 + 8^2 = (15\,155 - 1377.\ 2)^2 + (15\,155 - 1377.\ 9)^2 + 1377.\ 6)^2,$$

$$15\,155^2 + 8^2 = (15\,155 - 297.\ 49)^2 + (15\,155 - 297.\ 2)^2 + (297.\ 14)^2;$$

ou
$$15\,155^2 + 8^2 = 1\,130^2 + 14\,033^2 + 5\,610^2,$$
$$15\,155^2 + 8^2 = 12\,401^2 + 2\,762^2 + 8\,262^2;$$
$$15\,155^2 + 8^2 = 602^2 + 14\,561^2 + 4\,158^2.$$

En effet, chacune des quatre sommes égale 229 674 089.

VIII.

La lettre de M. Realis, mentionnée ci-dessus, contient l'identité très simple :
$$(3a^2) + (3b)^2 = (2a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (a - 2b)^2. \qquad \text{(D)}.$$

Soit, semblablement,
$$(3a')^2 + (3b')^2 = (2a' + 2b') + (2a' - b')^2 + (a' - 2b')^2.$$

Le produit des premiers membres est
$$81\left[(aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2\right] = (3\mathrm{A})^2 + (3\mathrm{B})^2,$$

pourvu que l'on fasse
$$\mathrm{A} = 3\,(aa' + bb'),\ \ \mathrm{B} = 3\,(ab' - ba').$$

On tire, de ces valeurs :
$$2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} = 6\,(aa' + bb' + ab' - ba'),$$
$$2\mathrm{A} - \mathrm{B} = 3\,(2aa' + 2bb' - ab' + ba'),$$
$$\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 3\,(aa' + bb' - 2ab' + 2ba').$$

Donc, par l'application de l'identité (D),
$$\left.\begin{aligned}&\left[(2a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (a - 2b)^2\right]\left[(2a' + 2b')^2 + (2a' - b')^2 + (a' - 2b')^2\right]\\ &= \left[6(aa' + bb' + ab' - ba')\right]^2 + \left[3(2aa' + 2bb' - ab' + ba')\right]^2\\ &\qquad + \left[3(aa' + bb' - 2ab' + 2ba')\right]^2;\end{aligned}\right\}\ \text{(E)}$$

et, par le changement de b en $-b$ dans *le second membre* : (*)

(*) En vertu de la double égalité
$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2.$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[(2a+2b)^2+(2a-b)^2+(a-2b)^2\right]\left[(2a'+2b')^2+(2a'-b')^2+(a'-2b')^2\right]\\&=\left[6\,(aa'-bb'+ab'+ba')\right]^2+\left[3(-2aa'+2bb'+ab'+ba')\right]^2\\&\qquad+\left[3\,(-aa'+bb'+2ab'+2ba')\right]^2.\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{F})$$

Voici donc encore deux identités, peut-être nouvelles, qui permettent de *transformer, en une somme de trois carrés, le produit de trois facteurs égaux, chacun, à la somme de trois carrés.*

Application. $a=3,\ b=2,\ a'=5,\ b'=6.$

On déduit, de l'identité (E),

$$(10^2+4^2+1^2)\ (22^2+4^2+7^2)=210^2+138^2+33^2\,;$$

et, de l'identité (F) :

$$(10^2+4^2+1^2)\ (22^2+4^2+7^2)=186^2+66^2+159^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned}117.\ 549 &= 44\ 100+19\ 044+1\ 089=34\ 596+4\ 356+25\ 181\\&=64\ 223.\end{aligned}$$

VIII.

Parmi diverses identités, rencontrées presque par hasard, je citerai celles-ci:

$$\begin{aligned}7\left[a^2+b^2+(a+b)^2\right]^2&=(a-2b)^2+(2a+3b)^2+(3a+b)^2\\&=(2a-b)^2+(3a+2b)^2+(a+3b)^2,\\19\left[a^2+b^2+(a+b)^2\right]&=(2a-3b)^2+(3a+5b)^2+(5a+2b)^2\\&=(3a-2b)^2+(5a+3b)^2+(2a+5b)^2,\\67\left[a^2+b^2+(a+b)^2\right]&=(2a-7b)^2+(7a+9b)^3+(9a+2b)^2\\&=(7a-2b)^2+(9a+7b)^2+(2a+9b)^2,\quad\text{etc.}\end{aligned}$$

Elles donnent, respectivement, des solutions de

$$x^2+y^2+z^2=7\ (x'^2+y'^2+z'^2),$$
$$x^2+y^2+z^2=19\ (x'^2+y'^2+z'^2),$$
$$x^2+y^2+z^2=67\ (x'^2+y'^2+z'^2),$$

équations qui n'ont peut-être pas encore été traitées.

D'ailleurs, ces relations sont comprises dans la double identité suivante :

$$\left.\begin{array}{l}(4n^2+3)\left[a^2+b^2+(a+b)^2\right]=\\ \left[2a-(2n-1)\,b\right]^2+\left[(2n-1)\,a+(2n+1)\,b\right]^2+\left[(2n+1)\,a+2b\right]^2\\ =\left[(2n-1)\,a-2b\right]^2+\left[(2n+1)\,a+(2n-1)b\right]^2+\left[2a+(2n+1)\,b\right]^2.\end{array}\right\}\quad (G)$$

Exemple. $n=5,\ a=3,\ b=4$:

$$103\left[3^2+4^2+7^2\right]=30^2+71^2+41^2=19^2+69^2+50^2.$$

IX.

Dans un Mémoire publié en 1840, (*) j'ai donné le théorème suivant :

Soit

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & l_n. \end{vmatrix}$$

Si les éléments satisfont aux relations

$$\sum ab=0,\ \sum ac=0,\ \ldots\ \sum bc=0,\ \ldots\ \sum kl=0, \qquad (14)$$

on a

$$\Delta^2=\sum a^2.\sum b^2.\sum c^2\ \ldots\ \sum l^2. \qquad \text{(H) (**)}$$

D'après cette relation (H), *on peut toujours*, d'une infinité de manières, *former un produit-carré dont les facteurs soient des sommes de carrés*.

Exemple. Prenons :

$$\begin{array}{l} a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=1,\\ b_1=1,\ b_2=3,\ b_3=-3,\ b_4=1,\\ c_1=-7,\ c_2=5,\ c_3=1,\ c_4=-5,\\ d_1=-7,\ d_2=0,\ d_3=1,\ d_4=10\ ; \end{array}$$

(*) *Sur la transformation des variables, dans les intégrales multiples* (*Académie de Bruxelles, mémoires couronnés*).

(**) Ce théorème, *peut-être* nouveau en 1840, ne l'est plus depuis longtemps. La démonstration contenue dans le Mémoire cité est beaucoup trop longue: le théorème est un corollaire, presque évident, du *théorème de Cauchy*, sur le *produit de deux déterminants*.

valeurs qui vérifient les conditions (14). On doit trouver

$$\Delta^2 = (2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2)(1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2)(7^2 + 5^2 + 1^2 + 5^2)(7^2 + 0^2 + 1^2 + 10^2)$$

$$= 30 \,.\, 20 \,.\, 100 \,.\, 159 = 9\,000\,000.$$

En effet :

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 3, & -3, & 1, \\ 5, & 1, & -5, \\ 0, & 1, & 10. \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1, & -3, & 1, \\ -7, & 1, & -5, \\ -7, & 1, & 10. \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1, & 3, & 1, \\ -7, & 5, & -5, \\ -7, & 0, & 10. \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1, & 3, & -3, \\ -7, & 5, & 1, \\ -7, & 0, & 1. \end{vmatrix}$$

$$= 2.\,200 + 3.\,300 + 4.\,400 + 100 = 3\,000.$$

X.

Le même Mémoire contient cet autre théorème :

Soit $$\Delta = a_1\,A_1 - a_2\,A_2 + a_3\,A_3 - \ldots \pm a_n\,A_n;$$

A_i *étant un déterminant qui ne contient, ni la lettre* a, *ni l'indice* i (*). *On a*

$$\sum A^2 = \sum b^2 . \sum c^2 \ldots \sum l^2.$$

Cette relation, combinée avec (H), donne

$$\Delta^2 = \sum a^2 . \sum A^2 ; \qquad \text{(K)}$$

et, par un changemeut de lettres,

$$\Delta^2 = \sum b^2 . \sum B^2 = \sum c^2 . \sum C^2 = \ldots \quad (^{**})$$

Dans l'exemple ci-dessus,

$$A_1 = 200,\ A_2 = -300,\ A_3 = 400,\ A_4 = -100.$$

Donc

$$3\,000^2 = (2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2)(200^2 + 300^2 + 400^2 + 100^2),$$

ou $$30^2 = 30.\,30.$$

(*) D'après le vocabulaire employé aujourd'hui, A_i est un *mineur* de Δ.
(**) Les éléments a_1, a_2, .. b_1, b_2, . . . sont toujours liés pas les conditions (14).

De même :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3, & 4, & 1, \\ 3, & -3, & 1, \\ 5, & 1, & -5. \end{vmatrix} = 140, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2, & 4, & 1, \\ 1, & -3, & 1, \\ -7, & 1, & -5. \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2, & 3, & 1, \\ 1, & 3, & 1, \\ -7, & 5, & -5. \end{vmatrix} = 20, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2, & 3, & 4, \\ 1, & 3, & -3, \\ -7, & 5, & 1. \end{vmatrix} = 200.$$

Puis
$$3\,000^2 = (7^2 + 1^2 + 10^2)\,(140^2 + 20^2 + + 200^2),$$
ou
$$9\,000\,000 = 150 .\ 60\,000\,;$$
ce qui est exact.

XI.

Pour terminer, je rappellerai deux théorèmes *empiriques*, proposés dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* :

1.° *Le triple de tout carré impair, non divisible par* 5, *est égal à la somme des carrés de trois nombres premiers, autres que* 2 *et* 3. (*)

2. *n étant un nombre entier,*

$$6n^2 + 6n - 3$$

est la somme de trois carrés positifs. (**)

Si, *par hasard*, ces propositions sont exactes, la démonstration en est, probablement, fort difficile.

E. CATALAN.

Liége, 20 *juin* 1881.

P. S. (2 février 1882). Le travail précédent, qui remonte à huit mois, exigerait bon nombre de corrections et d'additions. J'y reviendrai peut être.

(*) *N. C. M.*, tome III, p.

(**) *N. C. M.*, tome VI, p. 552.