533.16

A PROPOS DU CALCUL DES PERTES DE CHARGE DANS LES CONDUITES FORCÉES

PAR

Ch. HANOCQ

Professeur à l'Université de Liége

Grâce aux recherches d'ordre mathématique faites par *Osborne Reynolds,* la question de la détermination de la résistance du frottement qu'oppose un corps solide à l'écoulement d'un fluide, a fait des progrès si considérables, qu'il est possible aujourd'hui d'établir des *formules générales* permettant de calculer la perte de charge dans une conduite, quelle que soit la nature du fluide qui la traverse.

§ I. — Formules générales.

On considérait généralement, en hydraulique, la résistance de frottement comme proportionnelle à la surface S en contact avec le fluide, au poids spécifique δ du fluide, au carré de la vitesse relative w du fluide par rapport à la surface :

$$\mathrm{R} = k\delta\, w^2\, \mathrm{S} \qquad (1)$$

En partant de cette loi et en faisant l'hypothèse non vérifiée—hâtons-nous de le dire — que dans une conduite forcée le fluide se déplace par tranches parallèles, on peut montrer aisément que la *perte de charge* h, c'est-à-dire la hauteur de la colonne de fluide qui ferait équilibre à la résistance de frottement, est donnée par la formule :

$$h = k \frac{m}{\sigma} w^2\, l \qquad (2)$$

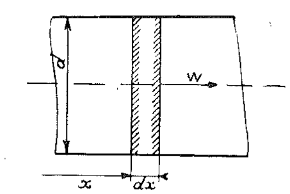

Fig. 1.

dans laquelle m désigne le périmètre de la conduite, σ la section de la conduite, l sa longueur.

En effet, pour un élément de longueur dx (fig. 1), la résistance $d\mathrm{R}$ a pour expression, d'après la loi ci-dessus :

$$d\mathrm{R} = k\delta\,(mdx)\, w^2\,;$$

Congrès scientifique de l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége
SECTION DE MÉCANIQUE

or, par définition, la perte de charge élémentaire dh peut s'exprimer en fonction de dR par l'égalité

$$\sigma \, dh \, \delta = d\mathrm{R}. \tag{3}$$

Partant de cette égalité, on peut calculer dh puis h en fonction de w

$$dh = k \frac{m}{\sigma} w^2 \, dx,$$

soit, pour une conduite de section et de périmètre constants :

$$h = k \left(\frac{m}{\sigma}\right) w^2 \, l \tag{4}$$

Pour les conduites cylindriques

$$\frac{m}{\sigma} = \frac{\pi d}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{d}.$$

En multipliant et en divisant le second nombre par $2g$, et en posant

$$\lambda = 2gk \tag{5}$$

nous obtiendrons la formule classique :

$$h = \lambda \frac{4}{d} \frac{w^2}{2g} l. \tag{6}$$

Les recherches expérimentales de *Darcy* exécutées sur des conduites d'eau, ont montré depuis longtemps que λ ne peut être considéré comme constant; mais tandis que *Darcy* proposait de regarder λ comme fonction de d et indépendant de w, et posait

$$\lambda = a + \frac{b}{d'}$$

d'après *Prony* λ était surtout fonction de w

$$\lambda = a' + \frac{b'}{w}$$

C'est *Osborne Reynolds* qui, le premier, a montré, en s'appuyant sur la *loi de similitude*, que λ était une fonction des grandeurs w, d et ν, ν représentant ce qu'on appelle le *coefficient cinématique de viscosité* du fluide :

$$\lambda = \varphi\,(w, d, \nu) \tag{7}$$

Pour pouvoir préciser la signification du coefficient ν, il est nécessaire d'examiner de plus près le phénomène de l'écoulement d'un fluide à travers une conduite cylindrique de section constante.

L'hypothèse des tranches parallèles n'est pas réalisée ; l'écoulement à travers un tuyau cylindrique se produit suivant deux régimes stables

bien distincts : le premier, que l'on désigne sous le nom d'*écoulement laminaire*, pendant lequel le mouvement du fluide se fait par *couches concentriques*, la vitesse variant depuis un maximum sur l'axe, jusqu'à une vitesse nulle à la paroi ; le second pendant lequel la trajectoire d'un élément quelconque, au lieu d'être rectiligne et parallèle à l'axe, comme dans le cas précédent, devient sinueuse par rapport à cet axe ; c'est celui qui est appelé, pour cette raison, *écoulement tourbillonnaire*.

Par vitesse w dans une section, il faut donc entendre, d'après ce que nous venons de voir, la vitesse moyenne définie par la relation

$$w = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

Q désignant le débit, d le diamètre de la conduite.

Tant que cette vitesse w reste inférieure à une certaine vitesse w_c que l'on désigne sous le nom de *vitesse critique*, l'écoulement est *laminaire*, et la perte de charge doit être calculée par la formule de *Poiseuille* :

$$h = 32 \frac{\nu}{g} \frac{1}{d^2} wl \tag{9}$$

Au delà de cette vitesse w_c, l'écoulement est tourbillonnaire ; la vitesse à la paroi cesse d'être nulle et il se produit un transport de quantité de mouvement d'une couche à l'autre qui modifie la répartition des vitesses dans la section de la conduite et accroît la perte d'énergie, partant la perte de charge ; celle-ci est alors donnée par la formule (6), λ étant une fonction de w, d et ν.

Pour établir la relation (9), on admet que la force de frottement R qui agit entre deux couches de fluide de surface S se déplaçant l'une par rapport à l'autre, est donnée par la formule

$$\mathrm{R} = \mu \, \mathrm{S} \left(\frac{dw}{dn}\right) \tag{10}$$

$\left(\frac{dw}{dn}\right)$ représentant la dérivée de la vitesse par rapport à la normale à la surface de contact, μ un coefficient de proportionnalité qui dépend de la viscosité et que l'on désigne pour cette raison sous le nom de *coefficient de viscosité*.

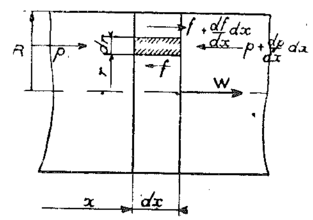

Fig. 2.

S'appuyant sur cette loi énoncée par *Newton*, on peut démontrer la formule de *Poiseuille*.

Il suffit de considérer (fig. 2) un élément limité par deux surfaces cylindriques de rayon r et $(r + dr)$ et par deux plans perpendiculaires à l'axe de la conduite, distants de x et $(x + dx)$. Cet élément est en équilibre sous l'action des forces

$$(2\pi r dr)\, p \quad \text{et} \quad 2\pi r dr \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right)$$

d'une part, et

$$2\pi r dx\, f \quad \text{et} \quad 2\pi r\, dx \left(f + \frac{df}{dr} dr\right)$$

d'autre part, f ayant pour valeur d'après la formule (10)

$$f = \frac{R}{S} = \mu \frac{dw}{dr} \tag{11}$$

On peut donc écrire après simplification

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx\, dr = dx \frac{df}{dr} dr = \mu\, dx \frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\right) dr$$

ou

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\right) \tag{12}$$

De cette équation, on peut tirer w, en fonction de $\frac{dp}{dx}$ qui est constant pour toutes les valeurs de r, dans une section donnée, de w_0 vitesse sur l'axe, et du rapport $\frac{r}{R}$. On peut calculer ensuite w_0 en fonction de la vitesse moyenne w, en écrivant que:

$$\pi R^2 w = \int_0^R 2\pi r\, dr\, w \tag{13}$$

On déterminera ensuite dp puis dh, en observant que

$$\sigma\, dp = \sigma\, \delta\, dh\,;$$

on obtiendra ainsi, pour un diamètre d constant :

$$h = k \frac{\mu}{\delta} \frac{1}{d^2} wl = k \frac{\mu g}{\delta} \frac{1}{g} \frac{1}{d^2} wl \tag{14}$$

formule de *Poiseuille*, si l'on pose :

$$\frac{\mu g}{\delta} = \nu\,; \tag{15}$$

$\frac{\mu g}{\delta}$ représente la valeur de ce que nous avons appelé le *coefficient cinématique de viscosité.*

D'après la formule (10) qui définit le coefficient de viscosité μ a pour dimensions :

$$\frac{F}{L^2} \frac{L}{LT^{-1}} = \frac{FT}{L^2}\,;$$

on peut donc dire que ν a pour dimensions :

$$\frac{FT}{L^2} \times \frac{LT^{-2}}{FL^{-3}} = L^2 T^{-1}$$

Dans ces conditions, on peut montrer que la fonction $\varphi\,(w, d, \nu)$ est de la forme

$$\varphi\left(\frac{wd}{\nu}\right)$$

En effet, d'après la formule (6), λ est un simple coefficient :

$$\lambda = \frac{h}{\frac{4}{d}\frac{w^2}{2g}} \frac{1}{l} = \frac{L}{L^{-1} \frac{L^2 T^{-2}}{L T^{-2}} L} = 1,$$

et la condition d'homogénéité de la formule (7) implique que l'on puisse grouper les termes de façon que chacun d'eux soit sans dimensions ; or il ne peut en être ainsi que si les variables se groupent pour donner lieu à un coefficient sans dimensions :

$$\alpha = \frac{wd}{\nu} \quad \left(\frac{LT^{-1}L}{L^2T^{-1}} = 1\right) \tag{16}$$

c'est ce coefficient α qui est appelé *coefficient de Reynolds.*

On peut chercher l'expression de α en fonction du coefficient de viscosité qui dans les tables des constantes physiques, est donné dans le système C. G. S. On trouve, en conservant les unités de kgm.sec. pour w, d et δ et, en adoptant pour μ les valeurs données dans les tables,

$$\alpha = 10 \frac{wd\delta}{\mu}. \tag{17}$$

En effet, μ dans le système centimètre gramme-masse seconde, que nous désignerons par μ_a, a pour dimensions

$$\frac{MLT^{-2}L}{L^2LT^{-1}} = \frac{MT^{-1}}{L}$$

alors que dans le système centimètre gramme-force seconde il a pour dimensions $\frac{FT}{L^2}$; si nous désignons par μ_f cette dernière valeur, nous aurons pour rapport des deux valeurs

$$\frac{\mu_a}{\mu_f} = 981.$$

Si nous désignons, comme dans la formule (15), par μ la valeur du coefficient de viscosité dans le système kg. m. sec., nous aurons entre μ et μ_t la relation, d'après la valeur des dimensions indiquées ci-dessus :

$$\mu = \mu_t \frac{1}{1000} \times 10.000 = 10 \mu_t$$

En transportant ces rapports dans les relations (15) et (16) combinées, il viendra

$$\alpha = \frac{wd\,\delta}{\mu g} = \frac{wd\,\delta}{10\mu^t g} = \frac{wd\,\delta}{10 \frac{\mu_a}{981} g}$$

formule qui dans le système d'unités kg. m. sec. devient identique à la formule (17), puisque g doit être remplacé par 9,81, et que μ est mis pour μ_a.

μ désignera donc dans ce qui va suivre le *coefficient absolu de viscosité.*

Lorsqu'on applique la formule (6) aux conduites d'air et de vapeur, il est préférable de calculer la perte de pression, au lieu de la perte de charge, puisque δ varie ; si les pressions sont exprimées en kg./cm², on a entre les deux valeurs la relation :

$$10.000\,(p_1 - p_2) = h\,\delta \qquad (18)$$

et partant

$$p_1 - p_2 = \frac{\lambda}{10^4}\,\delta\,\frac{4\,w^2}{d\,2g}\,l = \beta\,\frac{d\,w^2\,l}{d} \qquad (19)$$

β désignant le coefficient de résistance à l'écoulement et ayant pour valeur en fonction de λ

$$10^4\,\beta = \frac{4\,\lambda}{2g} \qquad (20)$$

2. — Résultats des expériences effectuées pour la détermination du coefficient de résistance

Des recherches expérimentales effectuées en Allemagne et en Angleterre sur des *tuyaux lisses*, ont permis de fixer la valeur de β en fonction de α ; la formule proposée par *Ombeck*

$$10^8\,\beta = \frac{123{,}2}{\alpha^{0{,}224}} \qquad (21)$$

diffère toutefois légèrement de celle indiquée par *Lees* pour coordonner de nombreux essais entrepris par *Stanton* en vue de vérifier la loi de similitude de Reynolds.; ces expériences, effectuées avec de l'air et de l'eau sur des tuyaux polis en cuivre étiré de 5 diamètres différents variant de 0,144″ à 4,96″, ont conduit le professeur Lees à proposer la formule suivante :

$$10^8\,\beta = \frac{312}{\alpha^{0{,}35}} + 3{,}66 \qquad (22)$$

Ces formules ne sont valables que pour les tuyaux lisses ; pour les *tuyaux rugueux* la question est plus complexe et, on le conçoit, plus importante au point de vue des applications pratiques, puisque les tuyaux en fer ou en fonte ne peuvent être considérés comme des tuyaux lisses.

Le lecteur aura trouvé dans l'étude de M. Lebeau qui précède, des graphiques et formules fixant les valeurs numériques de β en fonction de α pour tous les diamètres de conduites en fer et en fonte.

Cette étude, fruit de longues et patientes recherches, donne une synthèse remarquable de tous les résultats d'expériences connus jusqu'à ce jour.

Pour réaliser cette synthèse, M. Lebeau a fait une analyse minutieuse de toutes les expériences importantes, depuis les plus anciennes dues à *Darcy* jusqu'aux plus récentes. Portant en ordonnées les valeurs du coefficient β pour les valeurs de α correspondant aux conditions réalisées dans les essais, il a pu se rendre compte des écarts parfois considérables qui existent entre les valeurs fournies par les différents expérimentateurs. Ces écarts s'expliquent par le fait que tous n'ont pas opéré dans des conditions absolument comparables, avec les mêmes soins et la même précision, et aussi — il faut bien l'ajouter — par suite du fait que l'on ne peut considérer tous les tuyaux en fer et tous les tuyaux en fonte comme présentant absolument la *même rugosité.*

La grande difficulté de coordonner les résultats obtenus par les différents expérimentateurs, résulte donc de la nécessité d'écarter les valeurs les moins probables, tout au moins de donner un degré d'importance moindre aux résultats fournis par des expériences effectuées dans des conditions plus défectueuses ou moins bien définies. Pour mener à bien une telle tâche, il est nécessaire de posséder une longue expérience personnelle et un jugement très sûr. Le lecteur pourra se rendre compte de la valeur des résultats obtenus par M. Lebeau, lorsque nous aurons montré comment ils cadrent avec ceux indiqués par le professeur Lees pour les tuyaux lisses, et comment il est possible de faire une synthèse extrêmement simple de l'ensemble des valeurs proposées par M. Lebeau, pour les tuyaux rugueux, et par le professeur Lees pour les tuyaux lisses.

Il est nécessaire d'ajouter, pour que cette remarque prenne toute sa valeur, que M. Lebeau n'a eu connaissance de la formule de *Lees* qu'après nous avoir communiqué son étude et que, dans ses recherches, il ne s'est laissé guidé que par des considérations d'ordre expérimental et non par des idées théoriques préconçues.

Sans examiner pour le moment comment varient les coefficients de la formule proposée par M. Lebeau, nous pouvons constater que cette formule

$$10^8\,\beta = \frac{a}{\alpha^n} + b$$

est de la même forme que celle proposée par le professeur Lees.

Une autre observation que nous pouvons dégager immédiatement, c'est que toutes les courbes sont parallèles et que, partant, b seul varie quand on passe d'un diamètre à un autre.

Enfin, nous voyons que la limite inférieure des valeurs de $10^8\beta$ est celle qui correspond au tuyau lisse, quel que soit le diamètre.

Sur ces déductions fondamentales tirées de l'examen des formules et des graphiques déduits par M. Lebeau des résultats expérimentaux, nous allons pouvoir établir une formule générale en fonction de la rugosité et du diamètre, qui, bien que s'écartant de la forme adoptée par M. Lebeau, n'en confirme pas moins l'exactitude des valeurs proposées par lui.

§ 3. — Synthèse des résultats d'expériences présentés par M. Lebeau

Ainsi que nous l'avons rappelé ci-dessus, pour une valeur inférieure à w_c, appelée vitesse critique, l'écoulement devient laminaire et la formule qui donne la perte de charge peut s'écrire (équation 9) :

$$h = 16\,\frac{4}{d}\,\frac{w^2}{2g}\,\frac{\nu}{wd}\,l = \frac{16}{\alpha}\,\frac{4}{d}\,\frac{w^2}{2g}\,l \tag{24}$$

et se mettre sous la forme :

$$h = \lambda\,\frac{4}{d}\,\frac{w^2}{2g}\,l \tag{24b}$$

en posant :

$$\lambda = \frac{16}{\alpha} \tag{25}$$

Cette valeur de λ conduit, par application de la relation (20), à l'expression :

$$10^8\beta = 10^4\,\frac{4 \times 16}{2g}\,\frac{1}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} \tag{26}$$

a étant constant et égal à :

$$a = 10^4\,\frac{64}{2g} = 3{,}27\ 10^4 \tag{27}$$

Ainsi, si nous portons dans un diagramme en abscisses $log\ \alpha$ et en ordonnées $log\ (10^8\beta - b)$, nous voyons que nous obtiendrons pour représenter l'écoulement tourbillonnaire une droite

$$log\,(10^8\beta - b) = log\ a - n\ log\ \alpha \tag{28}$$

tandis que pour l'écoulement laminaire nous aurons pour équation, celle d'une autre droite

$$log\,(10^8\beta - b) = log\,(10^8\beta) = log\,10^4.\,3{,}27 - log\ \alpha \tag{29}$$

La vitesse critique w_c pour laquelle l'écoulement laminaire devient tourbillonnaire, est donnée par la relation

$$\frac{w_c\,d}{\nu} = \alpha_c \tag{30}$$

la constante α_c ayant pour valeur, d'après le professeur Lees, 1400 environ.

Cela revient à dire que les deux droites, fig. 3, représentant les deux régimes stables d'écoulement, se coupent en un point d'abscisse égal à

$$log\ \alpha = log\ 1400 = 3{,}146.$$

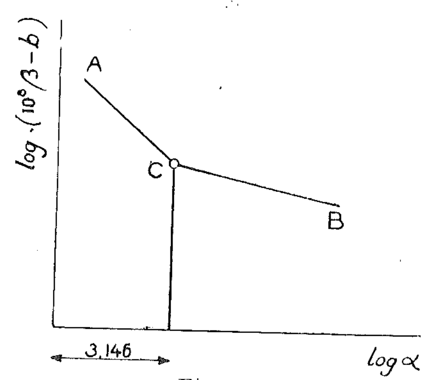

Fig. 3.

Il résulte toutefois d'expériences récentes [1] qu'il existe dans la région du point C, entre les abscisses α_c et α'_c (fig. 4) un écoulement instable, le passage d'un régime à l'autre se faisant plus ou moins tôt suivant l'importance des tourbillonnements qui s'amorcent à l'entrée de la tuyauterie.

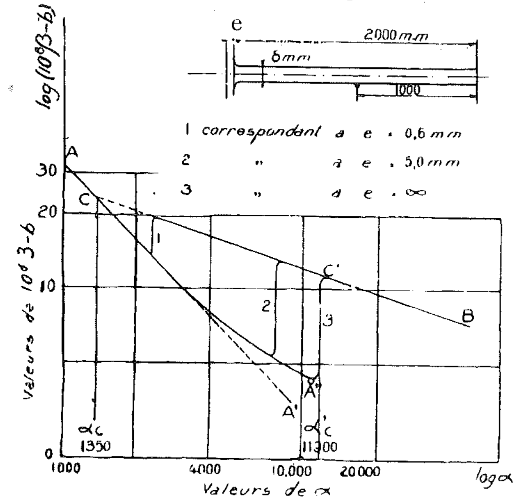

Fig. 4.

La figure 4 reproduit le diagramme de $log\ (10^8\beta - b)$ en fonction de $log\ \alpha$, d'après les expériences effectuées sur un tuyau lisse de 8 millimètres de diamètre pour différentes dispositions de l'orifice d'entrée.

La courbe 1 correspond à une ouverture e à l'entrée du tuyau égale à 0,6 m.m; la courbe 2 est obtenue pour e égale à 5,0 m.m et la courbe 3 pour $e = \infty$.

Lorsqu'on a affaire à des tuyaux rugueux ne présentant aucune autre cause de pertubation que la rugosité, la vitesse limite w'_c est donnée d'après *Biel* [2] par la formule

$$w' = \frac{a}{\sqrt{d}}\,\nu$$

(1) *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, n° 10, 11 mars 1922. « Versuche über die Entstehung des Turbulentz in Röhren », par L. Schiller.

(2) Même revue, nos 26 et 27, 27 juin et 14 juillet 1908. « Der Druckhöhen verlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten.

dans laquelle a dépend de la rugosité et varie entre $a = 170.000$ pour les tuyaux lisses, et 56.000 pour les tuyaux rugueux en fonte.

Ces chiffres conduisent à des valeurs de α respectivement d'environ 15.300 et 5.000 pour le diamètre de 8 millimètres sur lequel les expériences ci-dessus ont été effectuées. Le premier de ces chiffres qui se rapporte au tuyau lisse est plus élevé que celui trouvé dans les expériences rapportées figure 4, qui est de 11.900.

Abstraction faite des différences inévitables dans les chiffres fournis par des expériences de cette nature, on peut dire que les valeurs limites sont données par les deux relations

$$\alpha_c = \frac{w_c\, d}{\nu} = 1350 \qquad \alpha'_c = a\sqrt{d}$$

et qu'entre ces valeurs limites, la perte de charge est *indéterminée.*

Comme il convient de faire l'hypothèse la plus défavorable au point de vue du calcul de la perte de charge, nous admettrons qu'à partir du point C correspondant à

$$\alpha_c = 1350$$

l'écoulement se fait suivant le régime tourbillonnaire, et que le coefficient $(10^8\,\beta - b)$ est donné par la droite CB ; nous obtiendrons ainsi la plus grande des valeurs possibles, et sous cette réserve, nous pourrons dire que le passage d'un régime à l'autre se fait toujours par la même abscisse

$$\alpha_c = 1350,$$

quelle que soit la rugosité du tuyau envisagé.

Il résulte de là que nous aurons, d'après la formule (29), pour le point d'abscisse $\alpha = 1350$, la relation

$$log\,(10^8\,\beta - b) = log\,a - n\,log\,1350 = log\,10^4 \times 3{,}27 - log\,1350 = 1.384$$

de laquelle nous tirons

$$n = \frac{log\,a - 1{,}384}{3{,}130} \qquad (31)$$

Ainsi, si a varie en passant d'un diamètre à un autre, n doit également varier. Mais, comme nous l'avons vu, seule la constante b change quand on passe d'un diamètre à un autre, puisque toutes les courbes sont identiques, et simplement déportées par rapport à l'axe d'une valeur variable avec le diamètre ; on peut donc conclure que n et a sont des constantes et nous pourrons déterminer leur valeur en s'imposant que l'équation

$$10^8\,\beta = \frac{a}{\alpha^n} + b$$

correspondant au tuyau en fer de diamètre $d = 1^{m},000$ par exemple, donne une courbe ayant deux points communs avec la courbe expérimentale, l'un d'abscisse $\alpha = 10^5$, l'autre d'abscisse $\alpha = 2 \times 10^6$.

Les deux équations de condition qui en résultent et l'équation (31), suffisent pour déterminer les trois valeurs de a, n et b.

Après avoir opéré ainsi, nous avons adopté les valeurs

$$n = 0{,}333 \qquad a = 2{,}718 \times 10^2 = e\;10^2$$
$$b = 4.16.$$

qui conduisent à une courbe ne s'écartant de la courbe expérimentale que de

$$+2{,}7\ \%\ \text{pour}\ \alpha = 10^5$$
$$+0{,}6\ \%\ \text{pour}\ \alpha = 10^6$$
$$-0{,}3\ \%\ \text{pour}\ \alpha = 2.10^6$$

ce qui est suffisant comme approximation.

Pour vérifier l'équation (31) nous aurions dû toutefois adopter

$$n = 0{,}336 \text{ au lieu de } 0{,}333\ ;$$

nous avons préféré prendre 0,333 qui permet de calculer le premier terme de l'équation en effectuant la racine cubique de α. Cette valeur de $n = 0{,}333$ correspond à une constante α_c équation (30) égale à 1320 au lieu de 1350 ; étant donné que cette constante α_c ne peut être déterminée qu'avec une approximation relativement grossière, on peut dire qu'il n'y a aucun inconvénient à conserver $n = 0{,}333$.

En adoptant $b = 3{,}40$, nous retrouvons les ordonnées de la courbe correspondant aux tuyaux lisses (équation 22); à

$$+1{,}5\ \%\ \text{pour}\ \alpha = 10^5$$
$$-0{,}7\ \%\ \text{pour}\ \alpha = 10^6$$
$$-1{,}0\ \%\ \text{pour}\ \alpha = 2 \times 10^6.$$

Nous pouvons donc employer pour les tuyaux polis l'équation

$$10^8\,\beta = \frac{271{,}8}{\alpha^{0.333}} + 3{,}40 \qquad (32)$$

sans faire d'erreur appréciable.

Pour déterminer la valeur de b pour les différents diamètres de conduite, remarquons que si nous introduisons dans l'équation (28) les mêmes valeurs de α pour deux diamètres différents nous obtiendrons, en désignant par b et b_1, les constantes

$$log\,(10^8\,\beta - b) = log\,(10^8\,\beta_1 - b_1)$$

ce qui conduit à

$$10^8\,\beta - b = 10^8\,\beta_1 - b_1 = c^{te} \qquad (33)$$

Cette constante est égale à 2,16 pour $\alpha = 2.10^6$.

Ainsi, la valeur b s'obtiendra, pour un diamètre quelconque, en soustrayant de l'ordonnée correspondant à $\alpha = 2.10^6$, la quantité constante 2.16. Il sera donc facile de dresser un tableau des valeurs de b pour les différents diamètres de la série des tuyaux en fer et en fonte, en partant des diagrammes établis par M. Lebeau.

Comme cette valeur de b dépend à la fois du diamètre d et de la rugosité moyenne que nous désignerons par ε, on peut dire, en vertu de la loi de simitude, qu'elle doit être fonction du rapport $\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$. On peut ajouter que cette fonction devra être telle qu'à la limite pour $\varepsilon = 0$, elle prenne la valeur 3.4 indépendante du diamètre qui correspond aux tuyaux lisses.

D'autre part, nous devons admettre qu'à mesure que le diamètre grandit, l'influence de la rugosité diminue, si bien qu'à la limite pour $d = \infty$ on doit retrouver la même valeur $b = 3{,}40$. Dans ces conditions, nous pouvons poser

$$b = k^{f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)} + 2.4 \tag{34}$$

formule qui répond aux conditions énumérées ci-dessus.

$$b = 3{,}4 \text{ pour } \varepsilon = 0 \text{ et pour } d = \infty.$$

Déterminons en partant des valeurs de b, déduites des diagrammes de M. Lebeau, pour les différents diamètres de la série des tuyaux en fer

$$b' = b - 2.4$$

puis

$$y = log\ b' \tag{35}$$

Si nous multiplions la valeur de y par $\frac{d}{\varepsilon}$, en choisissant arbitrairement ε, nous constatons que :

$$y' = y \times \frac{d}{\varepsilon} \tag{36}$$

tend vers une limite pour $d = \infty$. Cette limite est égale à 2500 environ (2512) si l'on adopte $\varepsilon = \frac{1}{10}$ mm. pour les tuyaux en fer. En effet, le diagramme des valeurs de y' en fonction de $\frac{d}{\varepsilon} = 10\ d$, est fourni par les points marqués par un cercle (fig. 5 courbe I), points qui se groupent sur une courbe asymptotique, l'ordonnée de l'asymptote étant égale à 2512.

Remarquons que l'allure de cette courbe ne dépend pas du choix de ε, car une diminution de ε aurait simplement pour effet d'augmenter les abscisses et les ordonnées dans les mêmes proportions ; si nous voulons toutefois rendre les valeurs de y' indépendantes du choix particulier que nous avons fait de $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{10}$ chiffre choisi arbitrairement pour représenter la rugosité des tuyaux en fer, nous aurons à

diviser la valeur de $\frac{y'}{10}$ par ε_1 et admettre que la valeur limite est égale d'une façon générale à :

$$\frac{251{,}2}{\varepsilon_1} \tag{37}$$

Entre les tuyaux en fer et les tuyaux en fonte, il ne peut exister, au point de vue de l'écoulement du fluide, qu'une différence : la rugo-

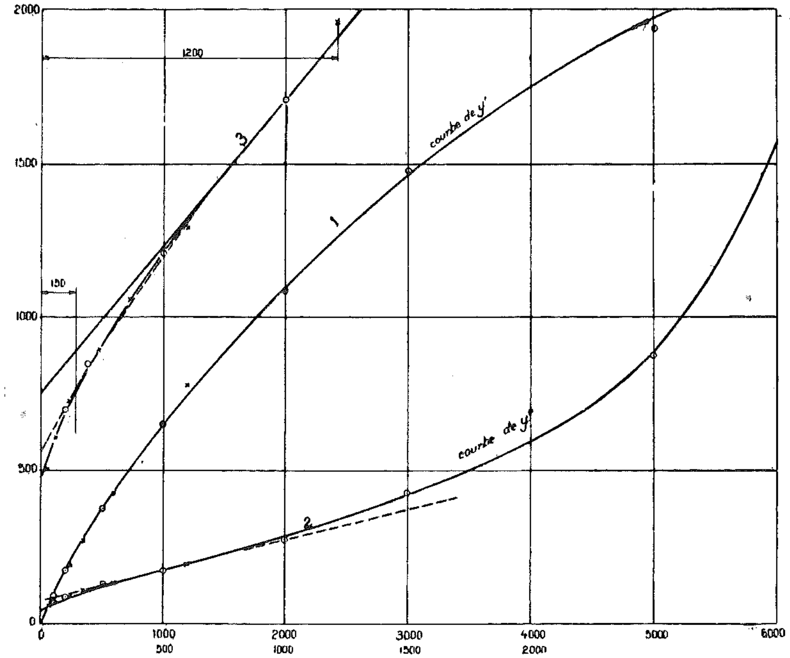

Fig. 5

sité ; ε est nécessairement plus grand pour les tuyaux en fonte, mais il est évident que si l'on adopte pour ε une valeur x fois plus grande, on devra retrouver pour les tuyaux en fonte la même courbe I de la fig. 4, en vertu de la loi de similitude.

En partant des diagrammes de M. Lebeau, tracés pour les tuyaux en fonte, et en répétant pour ceux-ci le calcul que nous avons fait pour déterminer b', puis de $y = log\ b'$ et enfin de

$$y' = y \times \frac{d}{\varepsilon},$$

nous avons obtenu les points marqués d'une croix, fig. 5, courbe I, en posant

$$\varepsilon = \frac{8{,}35}{10}\ mm \tag{38}$$

Ainsi, si nous admettons que les tuyaux en fonte ont une rugosité moyenne 8,35 fois plus élevée que la rugosité des tuyaux en fer, ce rapport étant choisi de manière à faire coïncider un point des deux courbes, nous constatons que tous les points de la seconde courbe se groupent très exactement sur la première. C'est là, on en conviendra, un fait qui plaide singulièrement en faveur des résultats proposés par M. Lebeau, étant donné que cette coïncidence ne provient pas de l'idée préconçue de trouver des valeurs satisfaisant à la loi de similitude, mais exclusivement du choix judicieux des valeurs les plus probables dans l'ensemble des valeurs expérimentales examinées.

Ainsi, nous arriverons à cette conclusion qu'il n'existe qu'une seule courbe pour représenter les valeurs de y' et partant celle de b, quelle que soit la catégorie de tuyaux étudiés et le diamètre envisagé, à la condition de prendre comme variable non d mais $\frac{d}{\varepsilon}$, ε désignant la rugosité moyenne correspondant à la catégorie envisagée.

La courbe I pourra servir au calcul si l'on adopte pour les tuyaux en fer $\varepsilon = \frac{1}{10}$ et pour les tuyaux en fonte $\varepsilon = \frac{8,5}{10}$.

Bien que nous ne puissions espérer arriver par la voie théorique que nous venons de suivre, à une formule aussi maniable que celles proposées par M. Lebeau pour coordonner *séparément* les chiffres trouvés pour chacune des catégories de tuyaux, en fer et en fonte, nous croyons utile de poursuivre ces calculs qui nous permettront d'établir une équation unique et générale.

Cette équation permettra tout au moins d'étendre les conclusions tirées de certaines expériences particulières, sur des tuyaux rivés par exemple, ou des tuyaux avec dépôts. En ce qui concerne les applications courantes, il n'en restera pas moins vrai que la méthode exposée par M. Lebeau, de même que les formules qu'il propose, garderont toute leur valeur, au point de vue pratique auquel il s'est placé.

§ 4. — Recherche d'une formule générale donnant le coefficient de résistance en fonction du diamètre et de la rugosité

Nous pouvons représenter la valeur de y' portée en diagramme fig. 5 courbe I, par une relation de la forme

$$y' = \frac{\frac{251,2}{\varepsilon_1}}{k'^{f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)}}$$

qui donne $log\ y'$ la valeur

$$\log y' = \log \frac{251,2}{\varepsilon_1} - f'\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \log k' \tag{40}$$

et à

$$\frac{1}{f'\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)} = \frac{\log k'}{\log \frac{251,2}{\varepsilon_1} - \log y'} \tag{41}$$

En adoptant pour $log\ k'$ la valeur arbitraire $\frac{10}{\varepsilon_1}$, nous rendrons l'allure de la courbe

$$y'' = \frac{1}{f'\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)} \tag{42}$$

indépendante du choix de ε_1. En effet, nous avons vu que y' croît proportionnellement à $\frac{1}{\varepsilon_1}$ et partant nous pouvons conclure que le dénominateur ne dépend pas de ε_1 ; le numérateur étant inversement proportionnel à ε_1, de même que les valeurs portées en abscisses, il en résulte que les ordonnées et les abscisses croîtront dans la même proportion que $\frac{1}{\varepsilon_1}$.

Cette valeur $\frac{10}{\varepsilon_1}$ de $log\ k'$ étant introduite dans l'équation (41) nous obtiendrons

$$y'' = \frac{1}{f'\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)} = \frac{\frac{10}{\varepsilon_1}}{\log \frac{251,2}{\varepsilon_1} - \log y'} \tag{43}$$

Pour $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$, nous avons obtenu la courbe 2 fig. 5 à l'échelle indiquée sur l'axe des ordonnées, et la courbe 3 à une échelle 10 fois plus grande, les abscisses étant doublées.

Cette courbe de y'' en fonction de $\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$ peut être représentée par la relation suivante, dans laquelle ε_1 est mis pour $\frac{1}{10}$ mm.

$$y'' = \frac{7.6}{\varepsilon_1} + 0,095\ \frac{d}{\varepsilon} - \frac{2,00}{\varepsilon_1}\left[\frac{1200 - 10\,\varepsilon_1 \frac{d}{\varepsilon}}{1200}\right]^3$$

Avec cette expression numérique de y'', on est conduit à une courbe très suffisamment approchée de la courbe expérimentale pour les valeurs supérieures à $\frac{d}{\varepsilon} = 150$ (courbe pointillée fig. 5).

Afin de faire coïncider la courbe calculée avec la courbe expérimentale, dans la partie voisine de l'axe, nous avons dû ajouter un quatrième terme dont la valeur devient négligeable à partir de $\frac{d}{\varepsilon} = 150$, ou ce qui revient au même $d\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = 15$:

$$-\frac{0{,}8}{\varepsilon_1} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{10} d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}}.$$

Si l'on adopte pour y'' la valeur ainsi complétée, on trouve pour $10^8\,\beta$ en fonction de α et de d la formule suivante :

$$10^8\,\beta = \frac{e \times 10^2}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + 10^{\frac{\varepsilon}{d} y'} + 2{,}4 \qquad (45)$$

y' ayant pour valeur

$$y' = \frac{\dfrac{251.2}{\varepsilon_1}}{10^{\frac{10}{\varepsilon_1}} \dfrac{1}{\dfrac{7{,}6}{\varepsilon_1} + 0{,}095\dfrac{d}{\varepsilon} - \dfrac{2{,}00}{\varepsilon_1}\left[\dfrac{1200 - 10\,\varepsilon_1 \frac{d}{\varepsilon}}{1200}\right]^3 - \dfrac{0{,}8}{\varepsilon_1} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{10} d \frac{1}{\varepsilon}}}}} \qquad (46)$$

Cette formule peut s'écrire également si l'on utilise pour base celle des logarithmes népériens au lieu des logarithmes ordinaires que nous avons précédemment adoptée

$$10^8\,\beta = \frac{e \times 10^2}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + b' + 2{,}4 \qquad (47)$$

b' ayant pour valeur, si d est exprimé cette fois en mètres

$$b' = e^{\dfrac{\dfrac{0{,}578}{d\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}}{e^{\dfrac{2{,}3}{0{,}76 + 9{,}5\, d\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - 0{,}200\left[\dfrac{12 - 100\, d\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}{12}\right]^3 - \dfrac{0{,}080}{e^{100\, d\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}}}}}}$$

Pour retrouver les résultats donnés par les courbes de M. Lebeau, il suffira de prendre $\varepsilon = \varepsilon_1$ pour les tuyaux en fer, $\varepsilon = 8{,}35\ \varepsilon_1$ pour les tuyaux en fonte.

Cette formule (48) est évidemment peu maniable. Comme la formule de *Biel* (1) qui, avec nos notations peut s'écrire

$$10^8\beta = \frac{80\, b\sqrt{d}}{\alpha} + \frac{80 f}{\sqrt{d}} + 40\ a$$

(1) *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, n° 26 et n° 27, 27 juin et 4 juillet 1908.

elle comporte 3 termes : un terme constant, un terme dépendant de la rugosité, et un autre dépendant de la viscosité.

Dans la formule de *Biel* toutefois, le facteur de viscosité b diminue à mesure que la rugosité f grandit, tandis que dans notre formule déduite rationnellement et non empiriquement, des résultats d'expériences, les deux termes sont indépendants.

Le terme constant de la formule de Biel est égal à 4,8, tandis que, dans notre formule, il est égal à 2,4 ; cet écart s'explique si l'on tient compte que, pour la rugosité nulle, le deuxième terme de la formule de Biel s'annule, tandis que, dans notre formule, il prend la valeur 1.

Pour se faire une opinion sur la valeur relative des deux formules, il suffira de remarquer que, à la limite pour la rugosité nulle, la formule de Biel prend la forme

$$10^8\beta = 4{,}8 + \frac{80\, b\sqrt{d}}{\alpha}$$

nettement différente de celle de Lees (22) vérifiée pour les tuyaux lisses.

La classification d'après la rugosité, adoptée par *Biel*, ne paraît pas non plus à l'abri de toute reproche.

Tout d'abord, il n'y a pas lieu de faire de différence entre une paroi idéalement lisse et la paroi de tubes étirés en cuivre, en laiton, etc., ainsi que cela ressort des essais de *Stanton*. Il ne paraît pas non plus admissible de faire rentrer dans la même catégorie (rugosité II), « les tubes de fer galvanisé, les tuyaux à gaz et les tuyauteries en tôle rivée ou asphaltée, les tubes de fonte neufs et soignés ».

Aussi croyons-nous que la classification adoptée par M. Lebeau subsistera :

Tuyaux polis (tuyaux en plomb, cuivre ou laiton, étirés).
Tuyaux rugueux de première catégorie (tuyaux en fer ou acier laminés).
Tuyaux rugueux de deuxième catégorie (tuyaux en fonte ou en acier coulé).
Tuyaux rugueux de troisième catégorie (tuyaux en fer, en fonte complètement recouverts d'incrustation).

Les tuyaux en ciment, qui n'ont pas été étudiés par M. Lebeau, devraient être classés dans une quatrième catégorie.

Un article de M. Parry, paru dans le numéro du 8 septembre 1922 de l'*Engineering*, donne des diagrammes des valeurs de $10^8\,\beta$ en fonction de α, pour des tuyaux en ciment de différentes fabrications, plus ou moins lisses et avec joints plus ou moins soignés.

Nous avons tracé fig. 6 deux courbes reliant les points trouvés, d'une façon suffisamment approchée, l'une pour un tuyau normal de 0 m.500, l'autre pour un tuyau de même diamètre, mais particulièrement rugueux et avec joints défectueux.

Ces courbes sont identiques comme allure à celles trouvées pour les tuyaux en fer et en fonte ; elles sont déplacées simplement d'une certaine portion d'ordonnée, et en relevant les valeurs de b pour $\alpha = 2 \times 10^6$

par exemple, nous pourrons calculer b' puis en déduire la valeur de ε ; on trouve ainsi, en chiffres ronds :

$$\varepsilon = 12\,\varepsilon_1$$

pour le premier, et 120 ε_1 pour le second.

Par contre, pour des tuyaux de 1m000 particulièrement lisses, des diagrammes montrent que ε peut descendre à la valeur ε_1 des tuyaux en fer.

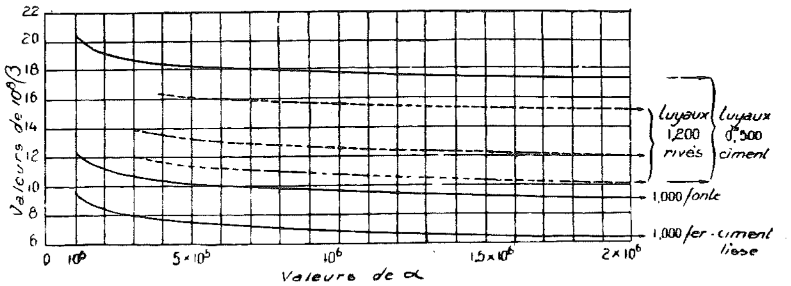

Fig. 6.

Quant aux tuyaux rivés, il n'est possible de les classer que si l'on adopte un système uniforme bien défini pour la disposition et le nombre de rivets. A titre d'indication, nous reproduisons fig.6 les courbes se rapportant à des tuyaux rivés de grand diamètre (1m. 200), courbes tracées d'après les données fournies par *Herschel* (1).

Pour des valeurs de α plus grandes que 300.000, la loi est bien la même que pour les autres catégories de tuyaux. b' prenant les valeurs comprises entre 5,54 et 10,04, suivant la disposition et le nombre de rivets.

On peut déduire des valeurs de b' le coefficient de rugosité et l'on trouve, en chiffres ronds :

$$\varepsilon \text{ compris entre } 40 \text{ et } 230\,\varepsilon_1$$

D'après la remarque de M. Lebeau, on peut prendre pour rapport entre la perte de charge dans un tuyau incrusté et la perte de charge dans un tuyau en fonte propre, calculée avec ses formules, toutes les autres conditions de fonctionnement restant les mêmes, le chiffre 1,82. Ce chiffre, comme il le fait remarquer, n'a de signification que dans les limites assez étroites de diamètre et de vitesse entre lesquelles les expériences ont généralement été effectuées. Si nous utilisons le chiffre 1,82 pour un tuyau de diamètre $d = 0^m200$ et un coefficient $\alpha = 1.200.000$, nous trouvons pour b' une valeur de 15,44, qui conduit à

$$\varepsilon = 60\,\varepsilon_1$$

(1) On a Theory of Fluid Friction, par E. Parry, dans *The English Electric Journal* vol. 1, n° 4, octobre 1920.

Ainsi, les nombres exprimant pour chaque catégorie la rugosité en fonction de la rugosité ε_1 des tuyaux en fer étiré, pris pour terme de comparaison, seraient donc les suivants :

Tuyaux polis	$\varepsilon = 0 \times \varepsilon_1$
Tuyaux de 1re catégorie	$\varepsilon = \varepsilon_1$
Tuyaux de 2e catégorie	$\varepsilon = 8\,\varepsilon_1$ (exactement 8,35)
Tuyaux de 3e catégorie	$\varepsilon = 60\,\varepsilon_1$
Tuyaux de 4e catégorie	$\varepsilon = 1$ à $12\,\varepsilon_1$ (exceptionnellement jusque $120\varepsilon_1$)

Le tableau suivant donne, en fonction de $d\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$, la valeur de b'. Le calcul de $10^8\,\beta$ et partant de la perte de charge, peut donc se faire assez aisément au moyen de la formule (48) et du tableau ci-dessous, quand on ne dispose pas des graphiques publiés dans l'étude de M. Lebeau, qui précède la nôtre.

Connaissant le débit et adoptant provisoirement d, on calcule w puis $\alpha = \dfrac{wd}{\nu}$, en se fixant la température et le poids spécifique moyens du fluide. On en déduit alors $\sqrt[3]{\alpha}$ puis

$$\frac{271,8}{\sqrt[3]{\alpha}}$$

La catégorie de tuyaux auxquels on a affaire étant adoptée, on peut fixer $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, puis $d\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ et enfin, par interpolation au moyen du tableau ci-contre la valeur de b'. La valeur cherchée $10^8\,\beta$ est ensuite donnée par l'addition des deux termes ainsi trouvés à la constante 2,4

$$10^8\,\beta = \frac{271,8}{3\sqrt[3]{\alpha}} + b' + 2,4.$$

Remarque I. — Il suffit de connaître, par une seule expérience préalable la valeur de $10^8\,\beta$ correspondant à une vitesse déterminée pour un diamètre et une catégorie de tuyaux bien définis, pour qu'il soit possible de déterminer ε et, partant, la valeur de $10^8\,\beta$, quels que soient le débit et le diamètre, la rugosité étant supposée constante.

Remarque II. — Pour parler de rugosité constante, il faut non seulement que les aspérités que présente la surface, aient la même importance, mais encore que la distribution de ces aspérités soit la même. Les stries qui peuvent exister suivant les génératrices d'un tuyau en fer étiré, n'ont évidemment pas la même influence que des irrégularités d'égale profondeur qui se présenteraient transversalement. C'est ce qui expli-

TABLEAU donnant la valeur du deuxième terme b' de la formule $10^8 \beta = \frac{271,8}{\sqrt[3]{\alpha}} + b' + 2,4$

déduite des recherches de MM. Hanocq et Lebeau

$d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$	b'	Différences	$d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$	b'	Différences	$d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$	b'	Différences
1,400	1,512		0,275	3,160	0,073	0,050	5,362	0,185
1,300	1,559	0,047	0,250	3,220	0,080	0,040	5,552	0,190
1,200	1,613	0,054	0,225	3,308	0,088	0,030	5,747	0,195
1,100	1,680	0,067	0,200	3,424	0,116	0,020	5,947	0,200
1,000	1,767	0,087	0,175	3,600	0,176	0,015	6,090	0,143
0,900	1,876	0,109	0,150	3,824	0,224	0,010	6,753	0,663
0,800	2,005	0,129	0,135	4,020	0,196	0,008	7,208	0,453
0,700	2,158	0,153	0,120	4,226	0,206	0,006	8,102	0,894
0,600	2,351	0,193	0,110	4,358	0,132	0,005	9,030	0,928
0,500	2,579	0,227	0,100	4,503	0,145	0,004	11,360	2,330
0,450	2,700	0,121	0,090	4,658	0,155	0,003	17,290	5,930
0,400	2,826	0,126	0,080	4,822	0,164	0,002	35,870	18,580
0,350	2,955	0,129	0,070	4,997	0,175	0,001	353,100	
0,300	3,087	0,132	0, 60	5,177	0,180			

que que le coefficient de rugosité ε pour les tuyaux incrustés, peut être si élevé et si variable par rapport à celui des tuyaux en fer étiré, les aspérités provenant des dépôts n'ayant aucune régularité au point de vue de leur hauteur et de leur distribution.

Remarque III. — Il importe de remarquer que les chiffres donnés par le tableau, pour des valeurs de $d \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ inférieures à 0,005, sont fournis par la formule (48) en dehors des limites entre lesquelles elle se trouve vérifiée par les données expérimentales. Il en résulte incontestablement une incertitude qui ne saurait être levée qu'en expérimentant sur des tuyaux en fonte de faible diamètre 0 m. 030 et si possible, 0 m. 020.

Congrès Scientifique International

placé sous le Haut Patronage du Roi

ORGANISÉ PAR

l'Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége

A. I. Lg.

A L'OCCASION DU

75e ANNIVERSAIRE DE SA FONDATION

Liége : 18 au 24 Juin 1922

Section de Mécanique

TOME II

LIÉGE
IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE
4, Place Saint-Michel, 4

1923