Journal de l'École polytechnique / publié par le Conseil d'instruction de cet établissement

MÉMOIRE

SUR

LES SURFACES DONT LES RAYONS DE COURBURE,

EN CHAQUE POINT,

SONT ÉGAUX ET DE SIGNES CONTRAIRES;

PAR M. E. CATALAN (*).

L'illustre Monge a trouvé, le premier, l'intégrale générale de l'équation du second ordre à laquelle satisfont les surfaces dont il s'agit. Malheureusement, cette intégrale est compliquée d'imaginaires qui la rendent, sinon illusoire, du moins peu propre aux applications. Aussi, jusqu'à présent, ne connaît-on qu'un très-petit nombre de ces surfaces, bien qu'il en existe une infinité.

En cherchant à modifier, soit les formules de Monge, soit la méthode qu'a suivie Legendre pour les démontrer, j'ai obtenu, non-seulement quelques nouveaux exemples de *surfaces minimums* (**), mais encore plusieurs systèmes de formules qui représentent, chacun, une infinité de ces surfaces, et qui ne donnent *aucun lieu imaginaire*. En outre, je montre comment on

(*) Les recherches suivantes ont paru, en extrait, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (tome LXI, page 1019). Antérieurement à cette publication, *M. Bonnet* avait donné, dans le même recueil (tome XXXVII, page 531), des formules relatives à l'intégration de l'équation (A); mais je n'en ai fait aucun usage, et d'ailleurs je les avais entièrement oubliées au moment où je présentais mon Mémoire à l'Académie (3 décembre 1855).

(**) Cette dénomination, qui rappelle un problème étranger à l'objet de ce Mémoire, nous sert seulement à éviter une périphrase.

devra prendre les fonctions arbitraires pour obtenir des surfaces *algébriques*, également en nombre indéfini.

J'ose espérer que mon travail, tout incomplet qu'il soit encore, sera favorablement accueilli par les géomètres.

I.

Transformations diverses de l'équation

$$(A) \qquad (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0.$$

1. Le premier membre est identiquement égal à

$$(1+p^2+q^2)t + (1+p^2+q^2)r - q(qt+ps) - p(pr+qs).$$

Or,

$$qt+ps = \frac{1}{2}\frac{d(1+p^2+q^2)}{dy}, \quad pr+qs = \frac{1}{2}\frac{d(1+p^2+q^2)}{dx};$$

donc, en divisant par $\sqrt{1+p^2+q^2}$, on peut mettre l'équation (A) sous la forme

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\frac{dq}{dy} + \sqrt{1+p^2+q^2}\frac{dp}{dx} - q\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dy} - p\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dx} = 0;$$

ou encore sous celle-ci

$$(B) \qquad \frac{d.\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} + \frac{d.\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} = 0.$$

Cette nouvelle relation, dont l'interprétation géométrique est facile, exige que les quantités $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ et $\dfrac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ soient les dérivées partielles p_1, q_1, d'une fonction inconnue z_1. En d'autres termes,

$$(1) \qquad \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{dz_1}{dy} = q_1,$$

$$(2) \qquad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{dz_1}{dx} = p_1.$$

En posant, pour abréger,

$$(3) \qquad R = \sqrt{1-p_1^2-q_1^2},$$

on conclut, des formules (1) et (2),

$$(4) \qquad p = \frac{q_1}{R},$$

$$(5) \qquad -q = \frac{p_1}{R}.$$

D'ailleurs, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$; donc

$$R\left(\frac{dp_1}{dx} + \frac{dq_1}{dy}\right) = p_1\frac{dR}{dx} + q_1\frac{dR}{dy},$$

ou

$$R^2\left(\frac{dp_1}{dx} + \frac{dq_1}{dy}\right) = -p_1\left(p_1\frac{dp_1}{dx} + q_1\frac{dq_1}{dx}\right) - q_1\left(p_1\frac{dp_1}{dy} + q_1\frac{dq_1}{dy}\right);$$

ou encore, en posant

$$\frac{dp_1}{dx} = r_1, \quad \frac{dp_1}{dy} = \frac{dq_1}{dx} = s_1, \quad \frac{dq_1}{dy} = t_1:$$

$$(C) \qquad (1-p_1^2)t_1 + 2p_1q_1s_1 + (1-q_1^2)r_1 = 0.$$

2. L'équation (C) ne différant, de l'équation primitive (A), que par le changement de z en $z_1\sqrt{-1}$, la transformation précédente paraît d'abord inutile. Mais comme, en vertu des formules (3), (4), (5), les *solutions réelles* de l'équation (C) donneront, *dans certains cas*, des *solutions réelles* de l'équation (A), cette même transformation (déjà employée par Lagrange et Legendre), nous dispensera de chercher directement ces dernières solutions.

3. Par exemple, on satisfait à l'équation (C) en prenant

$$z_1 = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

Adoptant cette valeur, nous aurons

$$p_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad q_1 = \frac{x}{x^2+y^2};$$

puis

$$R = \sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}}, \quad p = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}}, \quad q = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}}.$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on reconnaît que la fonction z aura la forme $F(x^2+y^2)$. Par conséquent, *la solution particulière de l'équation* (A), *déduite de l'héliçoïde à plan directeur, est la surface de révolution engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice.*

4. Pour transformer l'équation (C), appliquons la méthode de Legendre, c'est-à-dire supposons

$$\frac{dz_1}{dx} = p_1 = \alpha, \tag{6}$$

$$\frac{dz_1}{dy} = q_1 = \beta, \tag{7}$$

$$x = \frac{d\omega}{d\alpha}, \tag{8}$$

$$y = \frac{d\omega}{d\beta}: \tag{9}$$

ω est une fonction inconnue ; et, pour plus de simplicité dans la notation, α, β remplacent p_1, q_1.

En supposant successivement y et x constantes, nous obtiendrons

$$r_1 = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}d\beta}, \quad \textit{avec} \quad \frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\beta^2}d\beta = 0;$$

$$s_1 = \frac{d\beta}{dx} = \frac{d\beta}{\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}d\beta}, \quad \textit{avec} \quad \frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\beta^2}d\beta = 0;$$

$$t_1 = \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\beta}{\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\beta^2}d\beta}, \quad \textit{avec} \quad \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}d\alpha + \frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}d\beta = 0;$$

ou

$$-r_1 = \frac{\frac{d^2\omega}{d\beta^2}}{\left(\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}\right)^2 - \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}\frac{d^2\omega}{d\beta^2}}, \tag{10}$$

$$s_1 = \frac{\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}}{\left(\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}\right)^2 - \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}\frac{d^2\omega}{d\beta^2}}, \tag{11}$$

$$-t_1 = \frac{\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}}{\left(\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}\right)^2 - \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}\frac{d^2\omega}{d\beta^2}}. \tag{12}$$

Au moyen de ces valeurs, on change l'équation (C) en

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta} + (1-\beta^2)\frac{d^2\omega}{d\beta^2} = 0. \tag{D}$$

5. Posons

$$\alpha = u\cos\theta, \tag{13}$$

$$\beta = u\sin\theta; \tag{14}$$

nous aurons

$$u = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \tag{15}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}; \tag{16}$$

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{\alpha}{u}, \tag{17}$$

$$\frac{du}{d\beta} = \frac{\beta}{u}; \tag{18}$$

$$-\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\beta}{u^2}, \tag{19}$$

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{\alpha}{u^2}; \tag{20}$$

puis,

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\alpha}{u}\frac{d\omega}{du} - \frac{\beta}{u^2}\frac{d\omega}{d\theta}, \tag{21}$$

$$\frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta}{u}\frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u^2}\frac{d\omega}{d\theta}; \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} &= \frac{1}{u}\frac{d\omega}{du} - \frac{\alpha^2}{u^3}\frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u}\left(\frac{\alpha}{u}\frac{d^2\omega}{du^2} - \frac{\beta}{u^2}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta}\right) + 2\frac{\alpha\beta}{u^4}\frac{d\omega}{d\theta}\\ &\qquad - \frac{\beta}{u^2}\left(\frac{\alpha}{u}\frac{d^2\omega}{d\theta\,du} - \frac{\beta}{u^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}\right)\\ &= \frac{\beta^2}{u^3}\frac{d\omega}{du} + 2\frac{\alpha\beta}{u^4}\frac{d\omega}{d\theta} + \frac{\alpha^2}{u^2}\frac{d^2\omega}{du^2} - 2\frac{\alpha\beta}{u^3}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta} + \frac{\beta^2}{u^4}\frac{d^2\omega}{d\theta^2},\end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta} &= -\frac{\alpha\beta}{u^3}\frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u}\left(\frac{\beta}{u}\frac{d^2\omega}{du^2} + \frac{\alpha}{u^2}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta}\right) - \frac{1}{u^2}\frac{d\omega}{d\theta} + 2\frac{\beta^2}{u^4}\frac{d\omega}{d\theta}\\ &\qquad - \frac{\beta}{u^2}\left(\frac{\beta}{u}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta} + \frac{\alpha}{u^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}\right)\\ &= -\frac{\alpha\beta}{u^3}\frac{d\omega}{du} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{u^4}\frac{d\omega}{d\theta} + \frac{\alpha\beta}{u^2}\frac{d^2\omega}{du^2} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{u^3}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta} - \frac{\alpha\beta}{u^4}\frac{d^2\omega}{d\theta^2},\end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2\omega}{d\beta^2} &= \frac{1}{u}\frac{d\omega}{du} - \frac{\beta^2}{u^3}\frac{d\omega}{du} + \frac{\beta}{u}\left(\frac{\beta}{u}\frac{d^2\omega}{du^2} + \frac{\alpha}{u^2}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta}\right) - 2\frac{\alpha\beta}{u^4}\frac{d\omega}{d\theta}\\ &\qquad + \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\beta}{u}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta} + \frac{\alpha}{u^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}\right)\\ &= \frac{\alpha^2}{u^3}\frac{d\omega}{du} - 2\frac{\alpha\beta}{u^4}\frac{d\omega}{d\theta} + \frac{\beta^2}{u^2}\frac{d^2\omega}{du^2} + 2\frac{\alpha\beta}{u^3}\frac{d^2\omega}{du\,d\theta} + \frac{\alpha^2}{u^4}\frac{d^2\omega}{d\theta^2}.\end{aligned}\right. \tag{25}$$

On conclut, de ces dernières expressions,

$$\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}+\frac{d^2\omega}{d\beta^2}=\frac{1}{u}\frac{d\omega}{du}+\frac{d^2\omega}{du^2}+\frac{1}{u^2}\frac{d^2\omega}{d\theta^2},$$

$$\alpha^2\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}+2\alpha\beta\frac{d^2\omega}{d\alpha\,d\beta}+\beta^2\frac{d^2\omega}{d\beta^2}=u^2\frac{d^2\omega}{du^2}.$$

Par suite, l'équation (D) devient

(E) $$\frac{d^2\omega}{d\theta^2}+u^2(1-u^2)\frac{d^2\omega}{du^2}+u\frac{d\omega}{du}=0.$$

6. Si l'on fait

(26) $$u=\frac{1}{\sin\lambda},$$

ce qui donne

$$\frac{d\lambda}{du}=-\frac{\sin^2\lambda}{\cos\lambda},$$

on obtient d'abord

$$\frac{d\omega}{du}=-\frac{\sin^2\lambda}{\cos\lambda}\frac{d\omega}{d\lambda},\quad \frac{d^2\omega}{du^2}=\frac{\sin^2\lambda}{\cos\lambda}\left[\frac{\sin^2\lambda}{\cos\lambda}\frac{d^2\omega}{d\lambda^2}+\frac{\sin\lambda\,(2\cos^2\lambda+\sin^2\lambda)}{\cos^2\lambda}\frac{d\omega}{d\lambda}\right];$$

puis, au moyen de l'équation (E),

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2}-\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}\left[\frac{\sin^2\lambda}{\cos\lambda}\frac{d^2\omega}{d\lambda^2}+\frac{\sin\lambda\,(2\cos^2\lambda+\sin^2\lambda)}{\cos^2\lambda}\frac{d\omega}{d\lambda}\right]-\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\frac{d\omega}{d\lambda}=0;$$

c'est-à-dire

(F) $$\frac{d^2\omega}{d\theta^2}-\frac{d^2\omega}{d\lambda^2}-\frac{2}{\sin\lambda\cos\lambda}\frac{d\omega}{d\lambda}=0.$$

7. Pour réduire encore cette nouvelle équation, je suppose

(27) $$\lambda+\theta=a,$$

(28) $$\lambda-\theta=b;$$

d'où

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=\frac{d\omega}{da}+\frac{d\omega}{db}, \tag{29}$$

$$\frac{d\omega}{d\theta}=\frac{d\omega}{da}-\frac{d\omega}{db}, \tag{30}$$

$$\frac{d^2\omega}{d\lambda^2}=\frac{d^2\omega}{da^2}+2\frac{d^2\omega}{da\,db}+\frac{d^2\omega}{db^2}, \tag{31}$$

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2}=\frac{d^2\omega}{da^2}-2\frac{d^2\omega}{da\,db}+\frac{d^2\omega}{db^2}; \tag{32}$$

et j'obtiens, au lieu de l'équation (F),

$$\sin(a+b)\frac{d^2\omega}{da\,db}+\frac{d\omega}{da}+\frac{d\omega}{db}=0. \tag{G}$$

8. Dans l'équation (E), faisons généralement $u=f(v)$. Alors

$$\frac{d\omega}{du}=\frac{d\omega}{dv}\frac{dv}{du},\quad \frac{d^2\omega}{du^2}=\frac{d^2\omega}{dv^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{d\omega}{dv}\frac{d^2v}{du^2};$$

puis

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2}+u^2(1-u^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2\frac{d^2\omega}{dv^2}+\left[u^2(1-u^2)\frac{d^2v}{du^2}+u\frac{dv}{du}\right]\frac{d\omega}{dv}=0. \tag{H}$$

9. Si l'on veut que le coefficient de $\frac{d^2\omega}{dv^2}$ se réduise à l'unité, on prendra

$$dv=-\frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}. \tag{33}$$

Pour intégrer cette formule, il suffit de faire

$$u=\sin\gamma. \tag{34}$$

En effet, on trouve ainsi

$$v=-\int\frac{d\gamma}{\sin\gamma}=-\operatorname{l}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma=-\tfrac{1}{2}\operatorname{l}\frac{u-\sqrt{1-u^2}}{u+\sqrt{1-u^2}},$$

en supposant la constante arbitraire égale à zéro.

De

$$v=-\tfrac{1}{2}\operatorname{l}\frac{u-\sqrt{1-u^2}}{u+\sqrt{1-u^2}}, \tag{35}$$

on conclut

$$(36) \qquad e^{2\nu} = \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{1-\sqrt{1-u^2}}, \quad \sqrt{1-u^2} = \frac{e^\nu - e^{-\nu}}{e^\nu + e^{-\nu}}, \quad u = \frac{2}{e^\nu + e^{-\nu}}.$$

On a ensuite, à cause de la formule (33),

$$(37) \qquad \frac{d^2\nu}{du^2} = \frac{1-2u^2}{u^2(1-u^2)^{\frac{3}{2}}};$$

en sorte que l'équation (H) devient

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \frac{d^2\omega}{d\nu^2} + \left[\frac{1-2u^2}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right]\frac{d\omega}{d\nu} = 0,$$

ou

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \frac{d^2\omega}{d\nu^2} - \frac{8}{e^{2\nu} - e^{-2\nu}}\frac{d\omega}{d\nu} = 0. \ (^*)$$

10. Pour obtenir une dernière transformée, remplaçons, dans l'équation (A), les coordonnées rectangulaires x, y par des coordonnées polaires ρ, φ. Nous aurons d'abord

$$(38) \qquad p = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\rho}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{dz}{d\varphi}\sin\varphi,$$

$$(39) \qquad q = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\rho}\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{dz}{d\varphi}\cos\varphi.$$

D'ailleurs, en posant

$$(40) \qquad 1 + p^2 + q^2 = 1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = \mathrm{L},$$

nous pouvons mettre l'équation (A) sous la forme

$$\mathrm{L}\left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy}\right) - \frac{1}{2}\left(p\frac{d\mathrm{L}}{dx} + q\frac{d\mathrm{L}}{dy}\right) = 0.$$

(*) On peut arriver bien plus rapidement à cette transformée. En effet, les formules (3), (6), (7), (13), (14) et (26) donnent $\mathrm{R} = \sqrt{1-u^2} = \sqrt{-1}\cot\lambda$. Si l'on veut que R soit réel, on doit donc prendre $\sin\lambda$ *réel et plus grand que l'unité.* On satisfait à ces deux conditions en supposant $\lambda = \frac{\pi}{2} - \nu\sqrt{-1}$; car alors $\sin\lambda = \cos(\nu\sqrt{-1}) = \frac{e^\nu + e^{-\nu}}{2}$, ou $u = \frac{2}{e^\nu + e^{-\nu}}$; comme ci-dessus.

Pour calculer les valeurs des dérivées partielles contenues dans le premier membre, il suffit de remplacer, dans les formules (38), (39), z par p, q, L. Conséquemment,

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{d\rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{dq}{dx}=\frac{dq}{d\rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{dq}{d\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{dL}{d\rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{dL}{d\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dp}{d\rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{dq}{dy}=\frac{dq}{d\rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{dq}{d\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{dL}{dy}=\frac{dL}{d\rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{dL}{d\varphi}\cos\varphi;$$

puis, par la substitution dans l'équation précédente,

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}\left[\frac{dp}{d\rho}\cos\varphi+\frac{dq}{d\rho}\sin\varphi-\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi-\frac{dq}{d\varphi}\cos\varphi\right)\right]\\ &-\frac{1}{2}\left[\frac{dL}{d\rho}(p\cos\varphi+q\sin\varphi)-\frac{1}{\rho}\frac{dL}{d\varphi}(p\sin\varphi-q\cos\varphi)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Actuellement, les formules (38), (39) donnent

$$p\cos\varphi+q\sin\varphi=\frac{dz}{d\rho},\quad p\sin\varphi-q\cos\varphi=-\frac{1}{\rho}\frac{dz}{d\varphi};$$

puis

$$\frac{dp}{d\rho}\cos\varphi+\frac{dq}{d\rho}\sin\varphi=\frac{d^2z}{d\rho^2},\quad \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi-\frac{dq}{d\varphi}\cos\varphi=-\frac{1}{\rho}\frac{d^2z}{d\varphi^2}-\frac{dz}{d\rho}.$$

Substituant ces dernières valeurs dans l'équation (41), on trouve enfin

$$(\mathrm{K})\qquad \mathrm{L}\left[\frac{d^2z}{d\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2z}{d\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dz}{d\rho}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{dL}{d\varphi}\frac{dz}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{dL}{d\varphi}\frac{dz}{d\varphi}\right]=0.$$

II.

Quelques solutions particulières de l'équation (A).

11. Essayons d'abord de satisfaire à cette équation par

$$z = X + Y,$$

X étant fonction de x, et Y fonction de y.

Cette valeur de z donne, en employant la notation de Lagrange,

$$p = X', \quad q = Y', \quad r = X'', \quad s = 0, \quad t = Y'';$$

puis, au lieu de l'équation (A),

$$(1 + X'^2)\, Y'' + (1 + Y'^2)\, X'' = 0,$$

ou

$$\frac{X''}{1 + X'^2} + \frac{Y''}{1 + Y'^2} = 0. \tag{42}$$

12. L'équation (42) se décompose évidemment en

$$\frac{X''}{1 + X'^2} = c, \quad \frac{Y''}{1 + Y'^2} = -c,$$

c étant une constante arbitraire. Si cette constante est nulle, la surface cherchée est un plan. En laissant de côté ce cas particulier, on déduit, des deux équations précédentes,

$$\text{arc tang } X' = cx + d, \quad X' = \frac{\sin(cx + d)}{\cos(cx + d)},$$

$$X = -\frac{1}{c}\,\mathrm{l}[h\cos(cx + d)], \qquad Y = \frac{1}{c}\,\mathrm{l}[h'\cos(cy + d')].$$

Par suite, l'équation (42) devient

$$cz = \mathrm{l}[h'\cos(cy + d')] - \mathrm{l}[h\cos(cx + d)]. \tag{43}$$

Une transformation de coordonnées et un *changement d'unité* réduisent cette nouvelle équation à la forme plus simple

$$z = \mathrm{l}\cos y - \mathrm{l}\cos x;$$

ou, ce qui est équivalent, à celle-ci :

$$z = l\frac{\cos y}{\cos x}. \tag{44}$$

13. Il est facile de reconnaître que la surface minimum représentée par l'équation (44) jouit des propriétés suivantes :

1°. Sa *trace*, sur le plan des xy, se compose d'une infinité de droites inclinées à 45° et à 135° sur l'axe des x, et qui décomposent le plan en une infinité de carrés égaux.

2°. La surface admet un troisième système de droites. Celles-ci, perpendiculaires au plan des xy, passent par le milieu des côtés des carrés déterminés par les deux autres systèmes de droites.

3°. La section de la surface, par le plan des xz, est formée d'une infinité de branches, toutes égales entre elles, représentées par

$$z = -l \cos x.$$

Toutes ces branches, situées au-dessus de l'axe des x, le touchent aux points où il est rencontré par les droites situées dans le plan xy. Chacune d'elles a un axe de symétrie, perpendiculaire à ce plan, et deux asymptotes, situées de part et d'autre de l'axe, à la distance $\frac{\pi}{2}$.

4°. La section par le plan des yz est égale à la section par le plan des xz ; mais, au lieu d'être, comme cette dernière, au-dessus de ce plan, elle est située au-dessous.

5°. Les sections parallèles au plan des xz sont toutes égales entre elles. Il en est de même pour les sections faites parallèlement au plan des yz.

6°. La surface se compose d'une infinité de *nappes* égales. Chacune d'elles est comprise entre quatre plans asymptotiques, formant un *canal* à section carrée, de longueur indéfinie. Les arêtes de ces canaux sont les parallèles à l'axe des z, dont il a été question tout à l'heure. On peut se représenter les *sections droites* de ces canaux comme un *échiquier* indéfini, dans lequel les *cases noires* répondraient aux canaux renfermant des nappes de la surface, et les *cases blanches*, aux espaces vides.

7°. Si l'on considère une nappe en particulier, par exemple celle qui entoure l'axe des z, on reconnaît qu'elle a de l'analogie avec le *paraboloïde hyperbolique*. En effet cette portion de surface peut être engendrée par sa seconde *section principale*, glissant parallèlement à elle-même, et dont le sommet décrirait la première section principale, etc.

8°. Si l'on trace sur cette nappe un contour fermé quelconque, l'aire de la partie de surface ainsi limitée sera moindre que l'aire d'une autre portion de surface quelconque, limitée au même contour.

9°. On peut, pour former ce contour, prendre les deux droites passant par l'origine, et une courbe quelconque tracée sur la surface, par exemple celle qui aurait pour équations

$$x = k, \quad z = \mathrm{l}\frac{\cos y}{\cos k}.$$

10°. On peut aussi, pour former le contour, prendre les deux droites passant par l'origine, les deux *verticales* qui les rencontrent, et enfin la courbe représentée par

$$z = h, \quad h = \mathrm{l}\frac{\cos y}{\cos x}.$$

14. Nous pourrions appliquer, à l'équation (C), la méthode qui vient de nous donner une solution de l'équation (A). Pour ne pas recommencer les calculs, changeons, dans l'équation (43), z en $z_1\sqrt{-1}$, et supposons

$$c = -\sqrt{-1}, \quad d = 0, \quad d' = 0, \quad h = 1, \quad h' = 1;$$

nous aurons

$$z_1 = \mathrm{l}\,\frac{\cos(y\sqrt{-1})}{\cos(x\sqrt{-1})},$$

ou

$$z_1 = \mathrm{l}\frac{e^y + e^{-y}}{e^x + e^{-x}}. \tag{45}$$

Cette valeur de z_1 donne

$$p_1 = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad q_1 = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}};$$

puis, par les formules (3), (4), (5),

$$\mathrm{R} = \sqrt{1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2}, \quad p = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \quad q = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

15. Faisons

$$e^{2x} = \frac{1+u}{1-u}, \quad e^{2y} = \frac{1+v}{1-v};$$

nous obtiendrons, au lieu des valeurs précédentes,

$$p = \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \quad q = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}};$$

puis

$$dz = p\,dx + q\,dx = \frac{\frac{v}{1-u^2}\,du + \frac{u}{1-v^2}\,dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

Pour satisfaire à cette équation, il suffit de prendre

(46) $$z = \text{arc tang}\,\frac{uv}{\sqrt{1-u^2-v^2}},$$

c'est-à-dire

(47) $$z = \text{arc tang}\,\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2-\left(\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right)^2}}.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$z = \text{arc tang}\,\frac{(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})}{\sqrt{A.B.C.D}},$$

en posant, pour abréger,

$$A = e^{\frac{x+y}{2}} + e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}},$$

$$B = e^{\frac{x+y}{2}} + e^{\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}},$$

$$C = e^{\frac{x+y}{2}} - e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}},$$

$$D = e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{x+y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}};$$

mais, pour étudier la surface, il vaut mieux prendre l'équation (46), jointe aux formules

$$(48)\qquad x = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+u}{1-u},$$

$$(49)\qquad y = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+v}{1-v}.$$

16. La surface minimum dont nous nous occupons est évidemment composée d'une infinité de *zones* égales, que l'on obtient en faisant mouvoir l'une quelconque d'entre elles, de manière que tous ses points décrivent des parallèles à l'axe des z. Il suffit donc de considérer la zone qui est voisine du plan des xy. Elle jouit des propriétés suivantes :

1°. Elle contient l'axe des x et l'axe des y. En effet, les équations (46), (48), (49) sont vérifiées, soit par $u = 0$, $z = 0$, $x = 0$, soit par $v = 0$, $z = 0$, $y = 0$.

2°. Cette même zone, aussi bien que toute la surface, est intérieure au cylindre représenté par l'équation

$$(50)\qquad \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right)^2 = 1,$$

laquelle se décompose en

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^y + e^{-y}}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\frac{2}{e^y + e^{-y}}.$$

3°. On tire aisément, de ces dernières relations,

$$y = \mathrm{l}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad y = \mathrm{l}\,\frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad y = \mathrm{l}\,\frac{1 + e^x}{1 - e^x}, \quad y = \mathrm{l}\,\frac{1 - e^x}{1 + e^x};$$

par conséquent le cylindre dont il vient d'être question se compose de quatre nappes égales, asymptotiques aux plans des xz et des yz, et qui rencontrent le plan des xy suivant des courbes représentées aussi par les formules précédentes. Il est facile de voir que l'ensemble de ces quatre courbes égales a de l'analogie, quant à la forme, avec le système de deux hyperboles équilatères conjuguées. Enfin, si l'on transporte ces courbes parallèlement à elles-mêmes, dans le plan représenté par $z = \frac{\pi}{2}$, on obtient la ligne de contact du cylindre avec la zone.

4°. Si, dans la formule

$$p = \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}},$$

on suppose $u = 0$, on trouve

$$p = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}).$$

Cette nouvelle formule, à cause de $q = 0$, donne la *pente du plan tangent passant par l'axe des* y (1°). Pour $y = 0$, $p = 0$; en sorte qu'à *l'origine, le plan des* xy *est tangent à la surface*. Mais y augmentant, p augmente au delà de toute limite. Ainsi, *quand le point de contact, situé sur l'axe des* y, *s'éloigne de l'origine, le plan tangent tourne autour de cet axe et tend à se confondre avec le plan des* yz.

17. A cause du radical compris sous la caractéristique *arc tang*, dans l'équation (47), la surface est symétrique, non-seulement par rapport au plan des xy, mais encore relativement à tous les plans représentés par $z = \frac{k\pi}{2}$.

18. Ajoutons, pour terminer cette discussion, que les sections faites parallèlement au plan des xy, dans les *quatre nappes égales dont se compose la surface,* sont des courbes *intermédiaires,* pour ainsi dire, entre le système de deux droites rectangulaires et la ligne représentée par l'équation (50); ces courbes ont donc, aussi bien que cette dernière ligne, de l'analogie avec le système de deux hyperboles équilatères conjuguées.

19. Considérons actuellement l'équation (E), et cherchons à y satisfaire par une expression de la forme

$$\omega = \mathrm{T} + \mathrm{U}, \tag{51}$$

T contenant seulement θ, et U contenant seulement u.

La substitution donne

$$\mathrm{T}'' + u^2(1 - u^2)\,\mathrm{U}'' + u\,\mathrm{U}' = 0.$$

Cette équation se partage en

$$(52) \qquad T'' = -c,$$

$$(53) \qquad u^2(1-u^2)\,U'' + u\,U' = c,$$

c étant une constante arbitraire.

20. Si cette constante est nulle, l'équation (52) a pour intégrale

$$(54) \qquad T = h\theta + k,$$

h et k étant des constantes. D'autre part, l'équation (53) devient, par l'hypothèse de $c = 0$,

$$\frac{dU'}{U'} + \frac{du}{u(1-u^2)} = 0,$$

d'où

$$U' = m\frac{\sqrt{1-u^2}}{u},$$

ou

$$U = m\int \frac{du}{u}\sqrt{1-u^2}.$$

En posant $U = \sin\psi$, on obtient

$$U = m\int \frac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\,d\psi = m\int\left(\frac{d\psi}{\sin\psi} - \sin\psi\,d\psi\right);$$

c'est-à-dire, en supprimant la constante arbitraire, évidemment inutile,

$$U = m\left[\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\psi + \cos\psi\right],$$

ou

$$(55) \qquad U = m\left[\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}\right].$$

Substituant les valeurs (54) et (55) dans l'équation (51), on a la solution cherchée :

$$(56) \qquad \omega = h\theta + k + m\left[\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}\right].$$

21. Pour conclure, des résultats précédents, l'équation de la surface, reprenons les formules

$$R = \sqrt{1 - p_1^2 - q_1^2}\ (3),\quad p = \frac{q_1}{R}\ (4),\quad -q = \frac{p_1}{R}\ (5)$$

$$x = \frac{d\omega}{d\alpha}\ (8),\qquad y = \frac{d\omega}{d\beta}\ (9),$$

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{\alpha}{u}\frac{d\omega}{du} - \frac{\beta}{u^2}\frac{d\omega}{d\theta}\ (21),\quad \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta}{u}\frac{d\omega}{du} + \frac{\alpha}{u^2}\frac{d\omega}{d\theta}\ (22).$$

Les quatre dernières donnent

$$(57)\qquad x = \frac{d\omega}{du}\cos\theta - \frac{1}{u}\frac{d\omega}{d\theta}\sin\theta,$$

$$(58)\qquad y = \frac{d\omega}{du}\cos\theta + \frac{1}{u}\frac{d\omega}{d\theta}\cos\theta;$$

puis, les trois premières,

$$(59)\qquad p = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\sin\theta,$$

$$(60)\qquad -q = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cos\theta.$$

On déduit, de ces dernières valeurs,

$$(61)\qquad dz = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{d\omega}{du}\,d\theta + d\left(\frac{1}{u}\frac{d\omega}{d\theta}\right)\right]\ (^*).$$

A cause de

$$\frac{d\omega}{d\theta} = h,\quad \frac{d\omega}{du} = m\frac{\sqrt{1-u^2}}{u},$$

les équations (57), (58) et (61) deviennent

$$(62)\qquad x = \frac{m}{u}\sqrt{1-u^2}\cos\theta - \frac{h}{u}\sin\theta,$$

$$(63)\qquad y = \frac{m}{u}\sqrt{1-u^2}\sin\theta + \frac{h}{u}\cos\theta,$$

$$dz = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{m}{u}\sqrt{1-u^2}\,d\theta - \frac{h}{u^2}\,du\right].$$

(*) On peut vérifier que le second membre est une différentielle exacte. On voit en même temps, ce qui était évident *à priori*, qu'il n'était pas nécessaire de former l'expression de ω.

Cette valeur de dz donne, en supposant nulle la constante arbitraire introduite par l'intégration,

$$(64) \qquad z = -m\theta + \frac{1}{2} h\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}.$$

22. Il reste, pour obtenir en x, y, z l'équation de la surface, à éliminer u et θ. Or les équations (62) et (63) donnent, par des combinaisons simples,

$$u^2 = \frac{m^2+h^2}{x^2+y^2+m^2}, \quad \sin\theta = \frac{my\sqrt{1-u^2}-hx}{h^2+m^2(1-u^2)}\,u, \quad \cos\theta = \frac{mx\sqrt{1-u^2}+hy}{h^2+m^2(1-u^2)}\,u;$$

puis,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{my\sqrt{1-u^2}-hx}{mx\sqrt{1-u^2}+hy} = \frac{my\sqrt{x^2+y^2-h^2}-hx\sqrt{x^2+y^2+m^2}}{mx\sqrt{x^2+y^2-h^2}+hy\sqrt{x^2+y^2+m^2}}.$$

Par suite, l'équation (64) devient

$$(65) \qquad \left\{ \begin{aligned} z = &-m \operatorname{arc\,tang} \frac{my\sqrt{x^2+y^2-h^2}-hx\sqrt{x^2+y^2+m^2}}{mx\sqrt{x^2+y^2-h^2}+hy\sqrt{x^2+y^2+m^2}} \\ &+ h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2+m^2}-\sqrt{x^2+y^2-h^2}}{\sqrt{m^2+h^2}}. \end{aligned} \right.$$

23. Afin de simplifier cette équation, remplaçons les coordonnées rectangulaires x, y, par des coordonnées polaires, ρ, φ. Posons, en même temps,

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{h}{m}\sqrt{\frac{\rho^2+m^2}{\rho^2-h^2}};$$

nous aurons, au lieu de l'équation (65),

$$(66) \qquad z = -m \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\zeta}{1+\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\zeta} + h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{\rho^2+m^2}-\sqrt{\rho^2-m^2}}{\sqrt{m^2+h^2}},$$

ou

$$(67) \qquad z = -m(\varphi-\zeta) + h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{\rho^2+m^2}-\sqrt{\rho^2-m^2}}{\sqrt{m^2+h^2}}.$$

24. Si, dans cette dernière équation, on fait varier les constantes arbitraires m et h, on obtient une infinité de surfaces appartenant à une même *famille*, mais qui diffèrent sous le rapport de la forme et des dimensions. Réunissons celles qui répondent à des valeurs de m, égales et de signes contraires, et à des valeurs de h, égales et de signes contraires; nous obtiendrons, pour les équations de ces *couples* de surfaces,

$$z = -m(\varphi \mp \zeta) \pm h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{\rho^2+m^2}-\sqrt{\rho^2-h^2}}{\sqrt{m^2+h^2}},$$

$$z = \quad m(\varphi \pm \zeta) \pm h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{\rho^2+m^2}-\sqrt{\rho^2-h^2}}{\sqrt{m^2+h^2}};$$

ou, en conservant une seule des deux nappes symétriques que donneraient ces deux formules,

$$(68) \qquad z = m\varphi \pm \left[m\zeta + h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{\rho^2+m^2}-\sqrt{\rho^2-h^2}}{\sqrt{m^2+h^2}}\right].$$

25. La surface minimum représentée par cette équation jouit d'une propriété remarquable : elle se réduit, dans des cas extrêmes, soit à l'*héliçoïde à plan directeur,* soit à *la surface de révolution engendrée par une chaînette,* c'est-à-dire aux deux surfaces minimums dont les géomètres se sont d'abord occupés.

Si l'on suppose, en effet, $h = 0$, on obtient $z = m\varphi$, ou

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{z}{m}.$$

Si, au contraire, on fait $m = 0$, on réduit l'équation (68) à

$$z = \pm h\,\mathrm{l}\,\frac{\rho-\sqrt{\rho^2-h^2}}{h};$$

et cette dernière donne

$$+\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}h\left(e^{\frac{z}{h}} + e^{-\frac{z}{h}}\right).$$

26. Dans le cas général, notre surface, *intermédiaire* entre l'héliçoïde et la surface de révolution, a les caractères suivants :

1°. Elle admet, pour *surface diamétrale*, l'héliçoïde représenté par

$$z = m\varphi;$$

2°. Elle est extérieure au cylindre de révolution dont l'équation est

$$x^2+y^2=h^2;$$

3°. Elle touche ce cylindre suivant les hélices représentées par

$$\rho=h, \quad z=m\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right);$$

4°. Les sections faites par des cylindres de révolution autour de l'axe des z sont des hélices de même *pas :* une quelconque de ces courbes, par exemple l'hélice de contact, peut être prise pour *directrice* de la surface;

5°. Les plans passant par l'axe des z coupent la surface suivant des courbes égales, que l'on peut adopter pour génératrices : si l'on considère, parmi ces courbes, celle qui est située dans le plan des zx, on aura, pour son équation,

$$z=\pm\left[m \operatorname{arc tang} \frac{h\sqrt{x^2+m^2}}{m\sqrt{x^2-h^2}}+h\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{x^2+m^2}-\sqrt{x^2-h^2}}{\sqrt{m^2+h^2}}\right];$$

6°. Il résulte, des deux dernières propriétés, que *la surface minimum considérée ne diffère pas de la surface d'une vis :* le *filet,* indéfini, a pour *profil* la courbe dont nous venons d'écrire l'équation.

27. Revenons aux équations (52) et (53). L'intégrale générale de l'équation (52) est

$$(69) \qquad \mathrm{T}=-\frac{1}{2}c\theta^2+h\theta+k.$$

Quant à l'équation (53), comme elle a donné, dans le cas de $c=0$, $\mathrm{U}'=m\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$, nous emploierons, pour l'intégrer généralement, le procédé de la variation des constantes. Nous obtiendrons ainsi, en regardant m comme une fonction de u,

$$u\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{dm}{du}=c;$$

d'où

$$m=c\int\frac{du}{u\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

En posant, comme dans le n° **20**, $u = \sin\psi$, on trouve

$$m = c\int\frac{d\psi}{\sin\psi\cos^2\psi} = c\left[\int\frac{d\psi}{\sin\psi} + \int\frac{\sin\psi\,d\psi}{\cos^2\psi}\right] = c\left[\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{\cos\psi} + \frac{\gamma}{c}\right],$$

ou encore

$$m = c\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} + \frac{\gamma}{c}\right],$$

γ étant une constante.

La valeur générale de U' est donc

$$U' = c\left[\frac{1}{u} + \frac{\gamma}{c}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}\right]. \tag{70}$$

28. Les formules (57), (58) et (61) donnent ensuite, à cause de l'équation (69),

$$x = U'\cos\theta + \frac{c\theta - h}{u}\sin\theta, \tag{71}$$

$$y = U'\sin\theta - \frac{c\theta - h}{u}\cos\theta, \tag{72}$$

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left[U'\,d\theta - \frac{c}{u}\,d\theta + \frac{c\theta - h}{u^2}\,du\right] \\ &= -c\left[\frac{\gamma}{c} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}}\right]d\theta - \frac{c\theta - h}{u\sqrt{1-u^2}}\,du. \end{aligned}$$

Le second membre de cette dernière formule est la différentielle de

$$-\frac{1}{2}(c\theta - h)\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} - \gamma\theta.$$

Par suite, la surface est représentée par l'ensemble des équations (70), (71) et

$$z = -\frac{1}{2}(c\theta - h)\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}} - \gamma\theta, \tag{73}$$

que l'on peut réduire à

$$U' = \frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}},$$

$$x = U'\cos\theta + \frac{\theta}{u}\sin\theta, \quad y = U'\sin\theta - \frac{\theta}{u}\cos\theta,$$

$$z = -\theta - \frac{1}{2}\theta\,\mathrm{l}\,\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{1+\sqrt{1-u^2}},$$

par une transformation de coordonnées et un changement d'unité.

29. Si l'on pose

$$v = \frac{z}{\theta} + 1, \tag{74}$$

on conclut, de la dernière équation,

$$\sqrt{1-u^2} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, \quad u = \frac{2}{e^v + e^{-v}},$$

puis

$$U' = e^v - \frac{1}{2}v\,(e^v - e^{-v}).$$

Les valeurs de x et de y deviennent ensuite

$$\left\{\begin{aligned} x &= \left[e^v - \frac{1}{2}v\left(e^v - e^{-v}\right)\right]\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\left(e^v + e^{-v}\right)\sin\theta, \\ y &= \left[e^v - \frac{1}{2}v\left(e^v - e^{-v}\right)\right]\sin\theta - \frac{1}{2}\theta\left(e^v + e^{-v}\right)\cos\theta\ (*). \end{aligned}\right. \tag{75}$$

III.

Intégration des équations (A), (B), (C), . . .

30. A cause de

$$x = \frac{d\omega}{d\alpha}, \quad y = \frac{d\omega}{d\beta},$$

(*) D'après la forme de ces dernières expressions, il est probable que la surface peut être engendrée par le *roulement* d'une certaine courbe; mais nous ne pouvons nous arrêter à ces détails. Nous dirons seulement que la trace sur le plan des xy est une *développante de cercle*.

l'équation

$$\text{(D)} \qquad (1-\alpha^2)\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} + (1-\beta^2)\frac{d^2\omega}{d\beta^2} = 0,$$

est la même chose que

$$(1-\alpha^2)\frac{dx}{d\alpha} - 2\alpha\beta\frac{dx}{d\beta} + (1-\beta^2)\frac{dy}{d\beta} = 0.$$

Différentiant celle-ci par rapport à α, on trouve

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2x}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2x}{d\alpha d\beta} + (1-\beta^2)\frac{d^2y}{d\alpha d\beta} - 2\alpha\frac{dx}{d\alpha} - 2\beta\frac{dx}{d\beta} = 0;$$

mais

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{dy}{d\alpha};$$

donc

$$\text{(L)} \quad (1-\alpha^2)\frac{d^2x}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2x}{d\alpha d\beta} + (1-\beta^2)\frac{d^2x}{d\beta^2} - 2\alpha\frac{dr}{d\alpha} - 2\beta\frac{dx}{d\beta} = 0 \quad (*).$$

51. Pour ramener cette équation à une forme plus simple, posons, comme dans le n° **5**,

$$\alpha = u\cos\theta, \quad \beta = u\sin\theta;$$

nous aurons, par le calcul développé dans ce numéro :

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2x}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2x}{d\alpha d\beta} + (1-\beta^2)\frac{d^2x}{d\beta^2} = \frac{1}{u^2}\frac{d^2x}{d\theta^2} + (1-u^2)\frac{d^2x}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dx}{du},$$

$$\alpha\frac{dx}{d\alpha} + \beta\frac{dx}{d\beta} = u\frac{dx}{du};$$

puis, au lieu de l'équation (L),

$$\text{(M)} \qquad \frac{d^2x}{d\theta^2} + u^2(1-u^2)\frac{d^2x}{du^2} + u(1-2u^2)\frac{dx}{du} = 0.$$

Faisant ensuite, comme dans le n° **6**,

$$u = \frac{1}{\sin\lambda},$$

(*) Ce procédé est celui de Legendre. (Lacroix, tome II, page 623.)

nous obtiendrons

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + u^2(1-u^2)\frac{d^2x}{du^2} + u\frac{dx}{du} = \frac{d^2x}{d\theta^2} - \frac{d^2x}{d\lambda^2} - \frac{2}{\sin\lambda\cos\lambda}\frac{dx}{d\lambda},$$

$$2u^3\frac{dx}{du} = -\frac{2}{\sin\lambda\cos\lambda}\frac{dx}{du};$$

en sorte que l'équation (M) deviendra simplement

$$\text{(N)} \qquad \frac{d^2x}{d\theta^2} - \frac{d^2x}{d\lambda^2} = 0.$$

32. L'équation (N) a pour intégrale générale

$$(76) \qquad x = f(\lambda+\theta) + \mathrm{F}(\lambda-\theta).$$

D'ailleurs, l'équation qui donnerait y serait semblable à (N); donc

$$(77) \qquad y = f_1(\lambda+\theta) + \mathrm{F}_1(\lambda-\theta),$$

mais il est bien entendu que les fonctions f, F, f_1, F_1, ne sont pas indépendantes les unes des autres.

Pour trouver les relations qui existent entre ces fonctions, formons les valeurs de $\frac{d\omega}{d\lambda}$ et $\frac{d\omega}{d\theta}$,

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d\omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{d\omega}{d\beta}\frac{d\beta}{d\lambda},$$

ou

$$(78) \qquad \frac{d\omega}{d\lambda} = x\frac{d\alpha}{d\lambda} + y\frac{d\beta}{d\lambda};$$

et, semblablement,

$$(79) \qquad \frac{d\omega}{d\theta} = x\frac{d\alpha}{d\theta} + y\frac{d\beta}{d\theta}.$$

D'ailleurs, de

$$\alpha = \frac{\cos\theta}{\sin\lambda}, \quad \beta = \frac{\sin\theta}{\sin\lambda},$$

on déduit

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}=-\frac{\cos\theta\cos\lambda}{\sin^2\lambda},\quad \frac{d\alpha}{d\theta}=-\frac{\sin\theta}{\sin\lambda},$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda}=-\frac{\sin\theta\cos\lambda}{\sin^2\lambda},\quad \frac{d\beta}{d\theta}=+\frac{\cos\theta}{\sin\lambda};$$

donc, à cause des formules (76) et (77),

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=-\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}[(f+F)\cos\theta+(f_1+F_1)\sin\theta],$$

$$\frac{d\omega}{d\theta}=-\frac{1}{\sin\lambda}[(f+F)\sin\theta-(f_1+F_1)\cos\theta].$$

On conclut, de la première valeur,

$$\frac{d^2\omega}{d\theta d\lambda}=-\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}[(f'-F'+f_1+F_1)\cos\theta+(f'_1-F'_1-f-F)\sin\theta];$$

et, de la seconde,

$$\frac{d^2\omega}{d\lambda d\theta}=-\frac{1}{\sin\lambda}[(f'+F')\sin\theta-(f'_1+F'_1)\cos\theta]$$
$$+\frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda}[(f+F)\sin\theta-(f_1+F_1)\cos\theta].$$

Ces deux expressions doivent être égales ; donc

$$\cos\lambda\,[(f'-F')\cos\theta+(f'_1-F'_1)\sin\theta]$$
$$=\sin\lambda\,[(f'+F')\sin\theta-(f'_1+F'_1)\cos\theta],$$

ou

$$(80)\quad f'\cos(\lambda+\theta)-F'\cos(\lambda-\theta)+f'_1\sin(\lambda+\theta)+F'_1\sin(\lambda-\theta)=0.$$

On satisfait à cette équation en prenant

$$f'(\lambda+\theta)=\varpi'(\lambda+\theta)\sin(\lambda+\theta),\quad f'_1(\lambda+\theta)=-\varpi'(\lambda+\theta)\cos(\lambda+\theta),$$
$$F'(\lambda-\theta)=\pi'(\lambda-\theta)\sin(\lambda-\theta),\quad F'_1(\lambda-\theta)=\pi'(\lambda-\theta)\cos(\lambda-\theta);$$

les caractérisques ϖ' et π', ou ϖ et π, désignant des fonctions arbitraires.

33. Faisons, comme précédemment,

$$\lambda + \theta = a, \quad \lambda - \theta = b;$$

et nous aurons, au lieu des formules (76) et (77),

$$(81) \qquad \begin{cases} x = \int \varpi'(a) \sin a da + \int \pi'(b) \sin b db, \\ y = -\int \varpi'(a) \cos a da + \int \pi'(b) \cos b db \text{ (*)}. \end{cases}$$

34. On peut employer différents moyens pour conclure, de ces valeurs, l'expression de ω. L'un des plus simples consiste à remarquer que, x et y étant les dérivées de ω, relatives à α et β, on a

$$d\omega = xd\alpha + yd\beta,$$

ou

$$\omega = \alpha x + \beta y - \int (\alpha dx + \beta dy).$$

Or,

$$\begin{aligned} \alpha dx + \beta dy &= u \cos\theta \left[\varpi'(a) \sin a da + \pi'(b) \sin b db\right] \\ &\quad - u \sin\theta \left[\varpi'(a) \cos a da - \pi'(b) \cos b db\right] \\ &= u \sin(a - \theta) \varpi'(a) da + u \sin(b + \theta) \pi'(b) db; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\alpha dx + \beta dy = \varpi'(a) da + \pi'(b) db,$$

et

$$\int (\alpha dx + \beta dy) = \varpi(a) + \pi(b).$$

(*) Ces expressions, auxquelles M. Serret est arrivé en transformant les formules de Monge (*Comptes rendus*, tome XL, page 1080), sont, comme on peut déjà le prévoir, beaucoup plus commodes que ces dernières.

De plus,

$$\alpha x + \beta y = u\cos\theta\left[\int \varpi'(a)\sin a da + \int \pi'(b)\sin b db\right] - u\sin\theta\left[\int \varpi'(a)\cos a da - \int \pi'(b)\cos b db\right]$$

$$= u\cos\theta\left[\varpi(a)\sin a + \pi(b)\sin b - \int \varpi(a)\cos a da - \int \pi(b)\cos b db\right]$$
$$- u\sin\theta\left[\varpi(a)\cos a - \pi(b)\cos b - \int \varpi(a)\sin a da + \int \pi(b)\sin b db\right];$$

donc

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} \omega = &-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\left[\int \varpi(a)\cos a da + \int \pi(b)\cos b db\right] \\ &+\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\left[\int \varpi(a)\sin a da - \int \pi(b)\sin b db\right]. \end{aligned}\right.$$

Telle est, sous sa forme la plus simple, l'intégrale générale de l'équation

$$(\mathrm{G})\qquad \sin(a+b)\frac{d^2\omega}{da\,db} + \frac{d\omega}{da} + \frac{d\omega}{db} = 0.$$

35. Nous avons trouvé, tout à l'heure, $\int(\alpha dx + \beta dy) = \varpi(a) + \pi(b)$. Mais, par le n° **4**,

$$\alpha = p_1 = \frac{dz_1}{dx},\quad \beta = q_1 = \frac{dz_1}{dy};$$

donc aussi

$$(83)\qquad z_1 = \varpi(a) + \pi(b).$$

Cette valeur, jointe aux expressions de x et de y, représente l'intégrale générale de l'équation (C). L'intégrale générale de l'équation (A) sera donc donnée par les formules

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \int \varpi'(a)\sin a da + \int \pi'(b)\sin b db, \\ y &= -\int \varpi'(a)\cos a da + \int \pi'(b)\cos b db, \\ z &= \sqrt{-1}\left[\varpi(a) + \pi(b)\right], \end{aligned}\right.$$

qui peuvent tenir lieu des formules de Monge.

36. Avant d'aller plus loin, nous ferons voir que l'équation (A) est vérifiée, non-seulement par le système (84), mais encore par ceux que l'on obtient en changeant le signe du premier terme dans l'expression de y, ou en changeant π en $-\pi$ dans la valeur de z. En d'autres termes, *on peut prendre indifféremment, pour intégrale de l'équation* (A), *soit les valeurs précédentes, soit celles-ci :*

$$(85)\qquad \begin{cases} x = \int \varpi'(a)\sin a da + \int \pi'(b)\sin b db, \\ y = \int \varpi'(a)\cos a da + \int \pi'(b)\cos b db, \\ z = \sqrt{-1}\,[\varpi(a) + \pi(b)]. \end{cases}$$

$$(86)\qquad \begin{cases} x = \quad \int \varpi'(a)\sin a da + \int \pi'(b)\sin b db, \\ y = -\int \varpi'(a)\cos a da + \int \pi'(b)\cos b db, \\ z = \sqrt{-1}\,[\varpi(a) - \pi(b)]; \end{cases}$$

$$(87)\qquad \begin{cases} x = \int \varpi'(a)\sin a\, da + \int \varpi'(b)\sin b db, \\ y = \int \varpi'(a)\cos a\, da + \int \pi'(b)\cos b db, \\ z = \sqrt{-1}\,[\varpi(a) - \pi(b)]. \end{cases}$$

1°. Pour vérifier les formules (84), on peut procéder comme il suit : On a

$$p\frac{dx}{da} + q\frac{dy}{da} = \frac{dz}{da},\quad p\frac{dx}{db} + q\frac{dy}{db} = \frac{dz}{db};$$

donc

$$p\sin a - q\cos a = \sqrt{-1},\quad p\sin b + q\cos b = \sqrt{-1}.$$

La dérivée de la première équation, relative à b, ou la dérivée de la seconde, par rapport à a, donnent, indifféremment,

$$\sin a\,(r\sin b + s\cos b) - \cos a\,(s\sin b + t\cos b) = 0,$$

ou

$$(88)\qquad r\sin a\sin b + s\sin(a - b) - t\cos a\cos b = 0.$$

D'ailleurs,

$$p = \frac{\cos a + \cos b}{\sin(a+b)}\sqrt{-1},\qquad q = \frac{\sin a - \sin b}{\sin(a+b)}\sqrt{-1};$$

ou

$$p = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\sqrt{-1}, \qquad q = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\sqrt{-1}.$$

On conclut, de ces valeurs,

$$1+p^2 = -\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2\sin^2\frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\cos a\cos b}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$1+q^2 = +\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2\sin^2\frac{1}{2}(a+b)} = +\frac{\sin a\sin b}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$2pq = -\frac{\sin(a-b)}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Par conséquent, l'équation (88) équivaut à

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0. \tag{A}$$

2°. Le même calcul, appliqué aux équations (85), donne

$$p\sin a + q\cos a = \sqrt{-1}, \quad p\sin b + q\cos b = \sqrt{-1};$$

$$r\sin a\sin b + s\sin(a+b) + t\cos a\cos b = 0; \tag{89}$$

$$p = \frac{\cos b - \cos a}{\sin(a-b)}\sqrt{-1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{-1},$$

$$q = \frac{\sin a - \sin b}{\sin(a-b)}\sqrt{-1} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{-1};$$

$$1+p^2 = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2\cos^2\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin a\sin b}{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$1+q^2 = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2\cos^2\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin a\sin b}{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$2pq = -\frac{\sin(a+b)}{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)};$$

et enfin, à cause de l'équation (89),

$$(1+p^2)t - 2pq\,s + (1+q^2)r = 0.$$

3°. Les formules (86) donnent, pareillement,

$$p\sin a - q\cos a = \sqrt{-1},\quad p\sin b + q\cos b = -\sqrt{-1};$$

$$(90)\qquad r\sin a\sin b + s\sin(a-b) - t\cos a\cos b = 0;$$

$$p = +\frac{\cos a - \cos b}{\sin(a+b)}\sqrt{-1} = +\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\sqrt{-1},$$

$$q = -\frac{\sin a + \sin b}{\sin(a+b)}\sqrt{-1} = -\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\sqrt{-1};$$

$$1+p^2 = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2\cos^2\frac{1}{2}(a+b)} = +\frac{\cos a\cos b}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$1+q^2 = \frac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2\cos^2\frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\sin a\sin b}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$2pq = \frac{\sin(a-b)}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)};$$

puis, par l'équation (90),

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0.$$

4°. Enfin, si l'on adopte les formules (87), on trouve

$$p\sin a + q\cos a = \sqrt{-1},\quad p\sin b + q\cos b = -\sqrt{-1};$$

$$r\sin a\sin b + s\sin(a+b) + t\cos a\cos b = 0;$$

$$p = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{-1},\quad q = -\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{-1};$$

$$1+p^2 = -\frac{\cos a\cos b}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)},\quad 1+q^2 = -\frac{\sin a\sin b}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$2pq = \frac{\sin(a+b)}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)};$$

etc.

57. Si, à la valeur de ω trouvée ci-dessus:

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega = &-\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\left[\int\varpi(a)\cos a\,da + \int\pi(b)\cos b\,db\right]\\ &+\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\left[\int\varpi(a)\sin a\,da - \int\pi(b)\sin b\,db\right],\end{aligned}\right.$$

on joint

$$\alpha = u\cos\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},\quad \beta = u\sin\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

on aura l'intégrale de l'équation

$$\text{(D)} \qquad (1-\alpha^2)\frac{d^2\omega}{d\alpha^2} - 2\alpha\beta\frac{d^2\omega}{d\alpha\, d\beta} + (1-\beta^2)\frac{d^2\omega}{d\beta^2} = 0.$$

De même, l'intégrale de l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + u^2(1-u^2)\frac{d^2\omega}{du^2} + u\frac{d\omega}{du} = 0,$$

est représentée par l'ensemble des formules

$$u = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}, \quad \theta = \frac{1}{2}(a-b),$$
$$\omega = -u\cos\theta\left[\int \varpi(a)\cos a\,da + \int \pi(b)\cos b\,db\right]$$
$$+ u\sin\theta\left[\int \varpi(a)\sin a\,da - \int \pi(b)\sin b\,db\right].$$

IV.

Intégration de l'équation (A), *sous forme réelle.*

38. Dans les formules (87), prenons

$$(91) \qquad \varpi(a) = \Phi(a) + \sqrt{-1}\,\Psi(a),$$

$$(92) \qquad \pi(b) = \Phi(b) - \sqrt{-1}\,\Psi(b),$$

les caractéristiques Φ, Ψ désignant deux fonctions arbitraires *réelles,* sinon pour toutes les valeurs réelles des variables a, b, du moins dans une certaine étendue. Prenons, en même temps,

$$a = m + n\sqrt{-1}, \quad b = m - n\sqrt{-1},$$

m et n étant deux variables *réelles*. Enfin, supposons qu'après la substitution de ces dernières valeurs, on ait pu séparer les parties réelles et les parties imaginaires des fonctions Φ, Ψ, de sorte que

$$(93)\left\{\begin{array}{ll} \Phi\left(m+n\sqrt{-1}\right) = \mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1}, & \Phi\left(m-n\sqrt{-1}\right) = \mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{-1}, \\ \Psi\left(m+n\sqrt{-1}\right) = \mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}, & \Psi\left(m-n\sqrt{-1}\right) = \mathrm{P}-\mathrm{Q}\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

M, N, P, Q étant des fonctions réelles de m et de n. Il résultera, de ces diverses hypothèses,

$$\varpi'(a)\,da = d\mathrm{M} - d\mathrm{Q} + (d\mathrm{N} + d\mathrm{P})\sqrt{-1},$$
$$\varpi'(b)\,db = d\mathrm{M} - d\mathrm{Q} - (d\mathrm{N} + d\mathrm{P})\sqrt{-1},$$

puis,

$$
\begin{aligned}
dx &= \left[dM - dQ + (dN + dP)\sqrt{-1}\right] \sin\left(m + n\sqrt{-1}\right) \\
&\quad + \left[dM - dQ - (dN + dP)\sqrt{-1}\right] \sin\left(m - n\sqrt{-1}\right) \\
&= 2(dM - dQ)\sin m \cos\left(n\sqrt{-1}\right) + 2(dN + dP)\sqrt{-1}\cos m \sin\left(n\sqrt{-1}\right), \\
&= (dM - dQ)\sin m\,(e^n + e^{-n}) - (dN + dP)\cos m\,(e^n - e^{-n}), \\
dy &= \left[dM - dQ + (dN + dP)\sqrt{-1}\right] \cos\left(m + n\sqrt{-1}\right) \\
&\quad + \left[dM - dQ - (dN + dP)\sqrt{-1}\right] \cos\left(m - n\sqrt{-1}\right) \\
&= 2(dM - dQ)\cos m \cos\left(n\sqrt{-1}\right) - 2(dN + dP)\sqrt{-1}\sin m \sin\left(n\sqrt{-1}\right) \\
&= (dM - dQ)\cos m\,(e^n + e^{-n}) + (dN + dP)\sin m\,(e^n - e^{-n}), \\
z &= -2(N + P);
\end{aligned}
$$

ou, enfin,

$$
(94)\quad \begin{cases}
x = \int (dM - dQ)\sin m\,(e^n + e^{-n}) - \int (dN + dP)\cos m\,(e^n - e^{-n}), \\
y = \int (dM - dQ)\cos m\,(e^n + e^{-n}) + \int (dN + dP)\sin m\,(e^n - e^{-n}), \\
z = -2(N + P).
\end{cases}
$$

39. Ces nouvelles formules, quand on laisse les fonctions Φ et Ψ complétement arbitraires, représentent, aussi bien que les formules (84), (85), (86) et (87), l'intégrale générale de l'équation (A). Elles ont, sur celles-ci et sur les formules de Monge, l'avantage de donner des surfaces réelles, lorsque ces mêmes fonctions sont soumises à la restriction indiquée dans le numéro précédent.

40. Nous obtiendrons une surface assez remarquable en prenant

$$\Phi\left(m + n\sqrt{-1}\right) = \cos\left(m + n\sqrt{-1}\right), \quad \Psi\left(m + n\sqrt{-1}\right) = 0.$$

En effet, dans ce cas,

$$
\begin{aligned}
M &= \cos m \cos\left(n\sqrt{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\cos m\,(e^n + e^{-n}), \\
N &= -\frac{1}{\sqrt{-1}}\sin m \sin\left(n\sqrt{-1}\right) = -\tfrac{1}{2}\sin m\,(e^n - e^{-n}), \\
dM &= -\tfrac{1}{2}\left[\sin m\,(e^n + e^{-n})\,dm - \cos m\,(e^n + e^{-n})\,dn\right], \\
dN &= -\tfrac{1}{2}\left[\cos m\,(e^n - e^{-n})\,dm + \sin m\,(e^n + e^{-n})\,dn\right], \\
&P = 0, \quad Q = 0;
\end{aligned}
$$

puis,

$$dx = -\frac{1}{2}\left[\sin m\,(e^n+e^{-n})\,dm - \cos m\,(e^n-e^{-n})\,dn\right]\sin m\,(e^n+e^{-n})$$
$$+\frac{1}{2}\left[\cos m\,(e^n-e^{-n})\,dm + \sin m\,(e^n+e^{-n})\,dn\right]\cos m\,(e^n-e^{-n})$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos 2m\,(e^{2n}+e^{-2n}) - 2\right]dm + \sin m\cos m\,(e^{2n}-e^{-2n})\,dn,$$

(95) $$x = \frac{1}{4}\sin 2m\,(e^{2n}+e^{-2n}) - m;$$

$$dy = -\frac{1}{2}\left[\sin m\,(e^n+e^{-n})\,dm - \cos m\,(e^n-e^{-n})\,dn\right]\cos m\,(e^n+e^{-n})$$
$$-\frac{1}{2}\left[\cos m\,(e^n-e^{-n})\,dm + \sin m\,(e^n+e^{-n})\,dn\right]\sin m\,(e^n-e^{-n})$$
$$= -\sin m\cos m\,(e^{2n}+e^{-2n})\,dm + \frac{1}{2}\cos 2m\,(e^{2n}-e^{-2n})\,dn,$$

(96) $$y = \frac{1}{4}\cos 2m\,(e^{2n}+e^{-2n});$$

(97) $$z = \sin m\,(e^n - e^n).$$

En éliminant n entre les équations (95), (96), (97), on trouve

$$x + m = y \operatorname{tang} 2m, \qquad \frac{z^2}{\sin^2 m} + 2 = \frac{4y}{\cos 2m}.$$

Changeons x en $-\frac{1}{2}x$, y en $-\frac{1}{2}(y-1)$, z en $\frac{1}{2}z$, m en $\frac{1}{2}\theta$: la forme de la surface n'aura pas changé, et nous aurons, au lieu des deux équations précédentes,

(98) $$\left\{\begin{array}{c}(x-\theta)\cos\theta = (y-1)\sin\theta,\\ z^2\cos\theta + 4y\,(1-\cos\theta) - 4\,(1-\cos\theta)^2 = 0.\end{array}\right.$$

41. L'ensemble de ces deux équations représente une *génératrice* de la surface minimum. Cette génératrice est *une parabole située dans un plan perpendiculaire au plan des xy, et dont l'axe est dans ce dernier plan.*

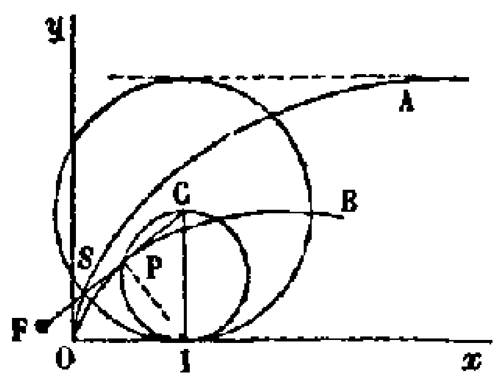
Les coordonnées du sommet de la parabole sont

$$z = 0, \quad y = 1 - \cos\theta, \quad x = \theta - \sin\theta.$$

A l'inspection de ces dernières valeurs, on reconnaît que *le lieu du sommet de la parabole est la cycloïde engendrée par un point d'une circonférence roulant sur l'axe des x, et dont le rayon serait l'unité.*

42. Le centre C du cercle générateur a pour coordonnées $x = \theta$, $y = 1$.

Ces valeurs vérifient les équations (98). Donc *l'axe de la parabole coïncide avec le rayon mené au sommet.* On sait que l'enveloppe de ce rayon CS est



une seconde cycloïde dont on obtient un point en abaissant IP perpendiculaire à CS. Les coordonnées x', y' de ce point P sont, en désignant encore par x, y les coordonnées de S,

$$x' = x + \mathrm{SP}\sin\theta = x + (1 - \cos\theta)\sin\theta,$$
$$y' = y + \mathrm{SP}\cos\theta = y + (1 - \cos\theta)\cos\theta.$$

Par suite, si l'on prend, sur le prolongement de CS, SF = SP, les coordonnées du point F seront

$$x'' = x - (1 - \cos\theta)\sin\theta, \quad y'' = y - (1 - \cos\theta)\cos\theta;$$

et il est facile de voir que le point F est le foyer de la parabole. En effet, α, β, γ étant les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne, on doit vérifier la relation

$$(\alpha - x'')^2 + (\beta - y'')^2 + \gamma^2 = (\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2,$$

ou

$$(x' - x'')(2\alpha - x' - x'') + (y' - y'')(2\beta - y' - y'') + \gamma^2 = 0.$$

Or, en substituant pour x, y, x', y', x'', y'' leurs valeurs, on trouve

$$4(1 - \cos\theta)\sin\theta[\alpha - \theta + \sin\theta]$$
$$+ 4(1 - \cos\theta)\cos\theta[\beta - 1 + \cos\theta] + \gamma^2 = 0,$$

relation qui devient identique si l'on a égard aux équations

$$(\alpha - \theta)\cos\theta = (\beta - 1)\sin\theta, \quad \gamma^2\cos\theta + 4\beta(1 - \cos\theta) - 4(1 - \cos\theta)^2 = 0.$$

43. La surface dont nous nous occupons peut donc être engendrée de la manière suivante :

Soient la cycloïde OSA *décrite par le point* S *appartenant à la circonférence* CI, *et la cycloïde* OPB, *enveloppe du rayon mobile* CS ; P *étant le point* *de contact. Si l'on conçoit, dans un plan perpendiculaire au plan de la figure, une parabole dont la directrice soit projetée en* P *et qui ait* S *pour sommet, cette courbe* (variable de grandeur) *engendre la surface.*

44. Jusqu'à présent on n'a pas, que nous sachions, donné d'exemple de surface minimum *algébrique*. Pour que les formules (94) représentent de pareilles surfaces, il suffit que les variables m, n y entrent, la première seulement sous les signes *sinus* et *cosinus*, la seconde en exposant. Ces conditions, auxquelles on peut satisfaire d'une infinité de manières, seront vérifiées si l'on prend

$$\Phi\left(m+n\sqrt{-1}\right)=\cos\left(2m+2n\sqrt{-1}\right),\quad \Psi\left(m+n\sqrt{-1}\right)=0.$$

En effet, on obtiendra d'abord, par un calcul semblable au précédent (n° 40):

$$\mathrm{M}=\frac{1}{2}\cos 2m\,(e^{2n}+e^{-2n}),\quad \mathrm{N}=-\frac{1}{2}\sin 2m\,(e^{2n}-e^{-2n}),$$

$$(99)\qquad x=\frac{1}{3}(e^{3n}+e^{-3n})\sin 3m-(e^{n}+e^{-n})\sin m,$$

$$(100)\qquad y=\frac{1}{3}(e^{3n}+e^{-3n})\cos 3m+(e^{n}+e^{-n})\cos m,$$

$$(101)\qquad z=\sin 2m\,(e^{2n}-e^{-2n});$$

et il ne restera plus qu'à éliminer m et n. Pour cela, résolvons les équations (99) et (100) par rapport à $e^{3n}+e^{-3n}$ et $e^{n}+e^{-n}$; nous aurons

$$e^{3n}+e^{-3n}=3\,\frac{x\cos m+y\sin m}{\sin 4m}=\mathrm{A},\quad e^{n}+e^{-n}=\frac{y\sin 3m-x\cos 3m}{\sin 4m}=\mathrm{B}.$$

Cette dernière valeur, combinée avec l'équation (101), donne, par un calcul facile,

$$\mathrm{B}^4\sin^2 2m-4\mathrm{B}^2\sin 2m-z^2=0.$$

D'ailleurs,

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}^3-3\mathrm{B}.$$

Donc, en remettant pour A et B leurs valeurs, et en opérant quelques simplifications,

$$(y\sin 3m-x\cos 3m)^4-16\,(y\sin 3m-x\cos 3m)^2\sin 2m\cos^2 2m$$
$$-16z^2\sin^2 2m\cos^4 2m=0,$$

$$(y\sin 3m-x\cos 3m)^3-24\,(y\cos m+x\sin m)\sin^3 2m\cos^2 2m=0.$$

On tire, de ces deux équations,

$$(y \sin 3m - x \cos 3m)^2 = 4 \sin 2m \cos^2 2m \left(2 + \sqrt{4+z^2}\right),$$
$$y \sin 3m - x \cos 3m = 6\,\frac{\sin^2 2m\,(y \cos m + x \sin m)}{2 + \sqrt{4+z^2}};$$

ou

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned} &[y(3\,\mathrm{tang}\,m - \mathrm{tang}^3 m) + x(3\,\mathrm{tang}^2 m - 1)]^2 \\ &\qquad = 8\left(2 + \sqrt{4+z^2}\right)\mathrm{tang}\,m\,(1 - \mathrm{tang}^2 m)^2, \end{aligned}\right.$$

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned} &[y(3\,\mathrm{tang}\,m - \mathrm{tang}^3 m) + x(3\,\mathrm{tang}^2 m - 1)](1 + \mathrm{tang}^2 m) \\ &\qquad = \frac{24}{2 + \sqrt{4+z^2}}\,\mathrm{tang}^2 m\,(y + x\,\mathrm{tang}\,m). \end{aligned}\right.$$

L'élimination de $\mathrm{tang}\,m$ conduirait enfin à l'équation de la surface : cette élimination, n'ayant d'autre difficulté que la longueur des calculs, il n'y aurait pas intérêt à l'effectuer.

Additions au Mémoire précédent.

I.

1. Les formules

$$x = \int (dM - dQ)\sin m\,(e^n + e^{-n}) - \int (dN + dP)\cos m\,(e^n - e^{-n}),$$
$$y = \int (dM - dQ)\cos m\,(e^n + e^{-n}) + \int (dN + dP)\sin m\,(e^n - e^{-n}),$$

peuvent être simplifiées.

Pour le faire voir, remarquons d'abord que les relations

$$\Phi\left(m + n\sqrt{-1}\right) = M + N\sqrt{-1}, \quad \Phi\left(m - n\sqrt{-1}\right) = M - N\sqrt{-1},$$
$$\Psi\left(m + n\sqrt{-1}\right) = P + Q\sqrt{-1}, \quad \Psi\left(m - n\sqrt{-1}\right) = P - Q\sqrt{-1},$$

donnent

$$\frac{dM}{dm} = \frac{dN}{dn}, \quad \frac{dM}{dn} = -\frac{dN}{dm}, \quad \frac{dP}{dm} = \frac{dQ}{dn}, \quad \frac{dP}{dn} = -\frac{dQ}{dm},$$
$$\frac{d^2 N}{dm^2} + \frac{d^2 N}{dn^2} = 0, \quad \frac{d^2 P}{dm^2} + \frac{d^2 P}{dn^2} = 0.$$

Par suite

$$\frac{dx}{dm} = \quad \frac{d(\mathrm{N}+\mathrm{P})}{dn}\sin m\,(e^n+e^{-n}) - \frac{d(\mathrm{N}+\mathrm{P})}{dn}\cos m\,(e^n-e^{-n}),$$

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{d(\mathrm{N}+\mathrm{P})}{dm}\sin m\,(e^n+e^{-n}) - \frac{d(\mathrm{N}+\mathrm{P})}{dn}\cos m\,(e^n-e^{-n}),$$

ou

$$\frac{dx}{dm} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dn}\sin m\,(e^n+e^{-n}) + \frac{1}{2}\frac{dz}{dm}\cos m\,(e^n-e^{-n}),$$

$$\frac{dx}{dn} = \quad \frac{1}{2}\frac{dz}{dm}\sin m\,(e^n+e^{-n}) + \frac{1}{2}\frac{dz}{dn}\cos m\,(e^n-e^{-n});$$

et, semblablement,

$$\frac{dy}{dm} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dn}\cos m\,(e^n+e^{-n}) - \frac{1}{2}\frac{dz}{dm}\sin m\,(e^n-e^{-n}),$$

$$\frac{dy}{dn} = \quad \frac{1}{2}\frac{dz}{dm}\cos m\,(e^n+e^{-n}) - \frac{1}{2}\frac{dz}{dn}\sin m\,(e^n-e^{-n}).$$

Nous aurons donc, en représentant par V une certaine fonction de n,

$$x = -\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})\int\frac{dz}{dn}\sin m\,dm + \frac{1}{2}(e^n-e^{-n})\int\frac{dz}{dm}\cos m\,dm + \mathrm{V}.$$

La fonction inconnue V est déterminée par l'équation

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{dz}{dm}\sin m\,(e^n+e^{-n}) + \frac{1}{2}\frac{dz}{dn}\cos m\,(e^n-e^{-n}) \\
&= -\frac{1}{2}(e^n-e^{-n})\int\frac{dz}{dn}\sin m\,dm + \frac{1}{2}(e^n+e^{-n})\int\frac{dz}{dm}\cos m\,dm \\
&\quad - \frac{1}{2}(e^n+e^{-n})\int\frac{d^2z}{dn^2}\sin m\,dm + \frac{1}{2}(e^n-e^{-n})\int\frac{d^2z}{dm\,dn}\cos m\,dm + \frac{d\mathrm{V}}{dn}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\int\frac{dz}{dn}\sin m\,dm = -\frac{dz}{dn}\cos m + \int\frac{d^2z}{dm\,dn}\cos m\,dm,$$

$$\int\frac{dz}{dm}\cos m\,dm = \quad \frac{dz}{dm}\sin m - \int\frac{d^2z}{dm^2}\sin m\,dm;$$

donc, à cause de

$$\frac{d^2z}{dm^2} + \frac{d^2z}{dn^2} = -2\left[\frac{d^2(\mathrm{N}+\mathrm{P})}{dm^2} + \frac{d^2(\mathrm{N}+\mathrm{P})}{dn^2}\right] = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{V}}{dn} = 0.$$

La fonction V se réduisant à une constante, on a simplement

$$(a) \qquad x = -\tfrac{1}{2}(e^n + e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \sin m\, dm + \tfrac{1}{2}(e^n - e^{-n}) \int \frac{dz}{dm} \cos m\, dm.$$

On trouve, de la même manière

$$(b) \qquad y = -\tfrac{1}{2}(e^n + e^{-n}) \int \frac{dz}{dn} \cos m\, dm - \tfrac{1}{2}(e^n - e^{-n}) \int \frac{dz}{dm} \sin m\, dm.$$

Ainsi, quand on aura mis sous forme réelle,

$$\begin{aligned} z = - & \left[\Psi\left(m + n\sqrt{-1}\right) + \Psi\left(m - n\sqrt{-1}\right)\right] \\ & + \sqrt{-1}\left[\Phi\left(m + n\sqrt{-1}\right) - \Phi\left(m - n\sqrt{-1}\right)\right], \end{aligned}$$

de simples quadratures donneront x et y.

2. Soient, par exemple,

$$\Phi\left(m + n\sqrt{-1}\right) = \cos\left(m + n\sqrt{-1}\right), \quad \Psi\left(m + n\sqrt{-1}\right) = 0;$$

auquel cas

$$z = \sin m\,(e^n - e^{-n}).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}(e^n + e^{-n})^2 \int \sin^2 m\, dm + \tfrac{1}{2}(e^n - e^{-n})^2 \int \cos^2 m\, dm \\ &= -m + \tfrac{1}{4}(e^{2n} + e^{-2n}) \sin 2m, \\ y &= -\tfrac{1}{2}(e^n + e^{-n})^2 \int \sin m \cos m\, dm - \tfrac{1}{2}(e^n - e^{-n})^2 \int \cos m \sin m\, dm \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2n} + e^{-2n}) \cos 2m; \end{aligned}$$

comme on l'a vu ci-dessus (40).

II.

Lignes de courbure de la surface.

3. L'équation de ces lignes, que M. Michaël Roberts a obtenue en partant de l'intégrale donnée par Monge (*), prend une forme assez remarquable, si l'on adopte les formules (87).

En effet, l'équation différentielle connue,

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

(*) Journal de Liouville, tome XI, page 300.

devient d'abord

$$\frac{[\varpi'(a)\sin a\,da+\pi'(b)\sin b\,db]-[\varpi'(a)\,da-\pi'(b)\,db]\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}}{d.\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}}$$
$$+\frac{[\varpi'(a)\cos a\,da+\pi'(b)\cos b\,db]+[\varpi'(a)\,da-\pi'(b)\,db]\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}}{d.\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}}=0.$$

Mais,

$$d.\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a+b)(da+db)+\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)(da-db)}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\cos b\,da-\cos a\,db}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)},$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)(da+db)-\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)(da-db)}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}$$
$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin b\,da-\sin a\,db}{\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{(d\varpi\sin a+d\pi\sin b)\sin\frac{1}{2}(a-b)-(d\varpi-d\pi)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos b\,da-\cos a\,db}$$
$$+\frac{(d\varpi\cos a+d\pi\cos b)\sin\frac{1}{2}(a-b)+(d\varpi-d\pi)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin b\,da-\sin a\,db}=0.$$

Après quelques réductions, cette équation devient

$$\varpi'(a)\,da^2=\pi'(b)\,db^2.$$

Les lignes de courbure des surfaces minimums sont donc représentées par les équations (87), jointes à

$$(c)\qquad \int da\sqrt{\varpi'(a)}\pm\int db\sqrt{\pi'(b)}=\text{const.}$$

4. Comme application, prenons

$$\varpi(a)=\left(1+\sqrt{-1}\right)a,\quad \pi(b)=\left(1-\sqrt{-1}\right)b;$$

d'où

$$x=-\left(1+\sqrt{-1}\right)\cos a-\left(1-\sqrt{-1}\right)\cos b,$$
$$y=\left(1+\sqrt{-1}\right)\sin a+\left(1-\sqrt{-1}\right)\sin b,$$
$$z=(a-b)\sqrt{-1}-(a+b);$$

et, pour l'équation des lignes de courbure,

$$a\sqrt{1+\sqrt{-1}} \pm b\sqrt{1-\sqrt{-1}} = \text{const.}$$

En posant, comme dans le n° 38,

$$a = m + n\sqrt{-1}, \quad b = m - n\sqrt{-1},$$

on obtient, au lieu des formules précédentes,

$$\begin{aligned}
x &= -(e^n + e^{-n}) \cos m - (e^n - e^{-n}) \sin m,\\
y &= \quad (e^n + e^{-n}) \sin m - (e^n - e^{-n}) \cos m,\\
z &= -2(m+n),\\
& m\left[\sqrt{1+\sqrt{-1}} \pm \sqrt{1-\sqrt{-1}}\right]\\
& + n\left[\sqrt{1+\sqrt{-1}} \mp \sqrt{1-\sqrt{-1}}\right]\sqrt{-1} = \text{const.}
\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\sqrt{1+\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \sqrt{1-\sqrt{-1}} = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on trouve, en prenant les signes supérieurs,

$$m - n\frac{\beta}{\alpha} = \mu,$$

et, en prenant les signes inférieurs,

$$m\frac{\beta}{\alpha} + n = \nu,$$

μ et ν étant des constantes arbitraires.

D'ailleurs,

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{2} - 1;$$

donc les équations des lignes de courbure sont, finalement,

$$m - (\sqrt{2}-1)n = \mu, \quad (\sqrt{2}-1)m + n = \nu.$$