Journal de l'École polytechnique / publié par le Conseil d'instruction de cet établissement

MÉMOIRE

SUR

LES SURFACES GAUCHES A PLAN DIRECTEUR;

Par E. CATALAN,

Répétiteur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique.

Je me suis proposé, dans ce travail, la recherche de quelques-unes des propriétés dont jouit la surface gauche engendrée par une droite qui se meut parallèlement à un même plan; j'ai pris ensuite, pour application des formules générales, l'héliçoïde à plan directeur. Cette dernière surface, employée dans les arts, et en particulier dans la coupe des pierres, est remarquable par la simplicité des théorèmes auxquels on est conduit, quand on lui applique les équations relatives aux lignes de plus grande pente, aux lignes de courbure, à la ligne minimum, etc.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Rapportons la surface à trois axes rectangulaires, et prenons le plan directeur pour plan des xy. Les équations d'une génératrice quelconque seront

$$y = \alpha x + \varphi(\alpha), \tag{1}$$
$$z = \psi(\alpha), \tag{2}$$

α étant un paramètre variable, et $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ représentant des fonctions de ce paramètre. Dans chaque cas particulier, l'élimination de α entre ces équations donnera l'équation de la surface.

2. Chaque génératrice se projette, sur le plan des xy, suivant une droite qui lui est parallèle et qui est représentée par l'équation (1). Si l'on donne

à α une infinité de valeurs, cette équation représentera une série de droites, lesquelles auront pour enveloppe une certaine courbe dont on obtiendra l'équation en éliminant α entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à α, savoir,

$$(3) \qquad 0 = x + \varphi'(\alpha).$$

Si nous voulons seulement l'équation différentielle de l'enveloppe, observons qu'en un point (x, y) de cette courbe, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de son équation, doit être égale à α. Remplaçons donc, dans l'équation (1), α par $\frac{dy}{dx}$ ou y'; nous obtiendrons, pour l'équation différentielle demandée,

$$(4) \qquad y = xy' + \varphi(y').$$

Cette équation différentielle a pour intégrale générale l'équation (1), et pour solution singulière l'équation de l'enveloppe.

Ligne de plus grande pente.

3. Supposons qu'ayant pris arbitrairement un point sur une génératrice, on abaisse de ce point une perpendiculaire sur la génératrice immédiatement inférieure; puis, que du point ainsi déterminé, on abaisse une perpendiculaire sur une troisième génératrice; et ainsi de suite. Le lieu des pieds des perpendiculaires sera, relativement au plan directeur que nous pouvons supposer horizontal, *une ligne de plus grande pente :* nous voyons que cette ligne coupe orthogonalement toutes les génératrices.

4. Or, lorsque deux droites sont perpendiculaires, leurs projections, faites sur un plan parallèle à l'une d'elles, sont également perpendiculaires; donc la projection horizontale de la ligne de plus grande pente doit couper orthogonalement les projections des génératrices, c'est-à-dire que cette projection est une développante de l'enveloppe.

5. Soit (*fig.* 1) AMB l'enveloppe des projections des génératrices, et soit CNBD une développante de cette courbe. La droite MN, tangente à AMB et normale à CNBD, représente une quelconque des génératrices.

D'après le n° **1**, l'équation de MN est

$$y = \alpha x + \varphi(\alpha),$$

α ayant une valeur convenable.

Si l'équation de la développante était connue, et que l'on en déduisît la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on devrait trouver $\alpha \frac{dy}{dx} + 1 = 0$. L'équation ci-dessus doit donc être vérifiée par $\alpha = -\frac{1}{y'}$; et, conséquemment, la développante est représentée par

$$(5) \qquad y = -\frac{x}{y'} + \varphi\left(-\frac{1}{y'}\right).$$

6. En différentiant cette équation, on obtient une équation linéaire qu'il est facile d'intégrer; mais on arrivera plus rapidement encore à l'équation de la développante par le calcul suivant:

Les équations (1) et (3) donnent, pour les coordonnées du point M,

$$x = -\varphi'(\alpha), \qquad y = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha);$$

d'où

$$dx = -\varphi''(\alpha)\, d\alpha, \qquad dy = -\alpha\varphi''(\alpha)\, d\alpha.$$

Appelons s l'arc MB : nous aurons

$$ds = \sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\, d\alpha;$$

puis

$$(6) \qquad s = \varphi'(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2} - \int \varphi'(\alpha)\frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + c,$$

c étant la constante arbitraire.

Si actuellement nous désignons par x_1 et y_1 les coordonnées du point N de la développante, nous aurons, à cause de MN = MM'B,

$$x_1 = x + \frac{s}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad y_1 = y + \frac{s\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

ou

$$(7)\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left[c - \int \varphi'(\alpha)\frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right], \quad y_1 = \varphi_1(\alpha) + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left[c - \int \varphi'(\alpha)\frac{\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right].$$

Lorsque la forme de la fonction φ sera donnée, l'élimination de α, entre ces deux équations, conduira à l'équation de la développante.

7. Si l'on imagine qu'une tangente roule, sans glisser, sur la courbe AMB, chacun des points de cette droite engendre une développante, laquelle a un point de rebroussement situé sur AMB; or, cette tangente, dans chacune de ses positions, est la projection d'une génératrice de la surface gauche. Nous pouvons donc nous représenter cette surface comme engendrée par le mouvement d'une droite horizontale touchant constamment le cylindre vertical dont AMB est la trace, et glissant en même temps sur la surface de ce cylindre, de telle sorte qu'à chaque instant le point de contact se déplacerait sur cette droite.

La loi de ce glissement est facile à déterminer: lorsque le point de contact s'élève de la quantité infiniment petite dz, intervalle entre les deux génératrices projetées en MN, M′N′, il doit parcourir, en projection horizontale, l'arc $\mathrm{MM}'=ds$; c'est-à-dire que l'on doit avoir, à cause de l'équation (1) et de $ds=\sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)$,

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\psi'(\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)}. \tag{8}$$

Observons bien que ds, ou l'arc parcouru en projection horizontale lorsque la génératrice s'élève de dz, représente la quantité dont le point de contact s'est déplacé sur cette droite : ds représente donc le glissement.

8. Lorsque la génératrice se meut ainsi pour engendrer la surface gauche, chacun de ses points décrit évidemment une ligne de plus grande pente.

Ligne de striction.

9. Considérons la suite des points suivant lesquels la génératrice touche la surface du cylindre; tous ces points sont situés sur une courbe remarquable, identique avec la *ligne de striction* (*) de la surface gauche.

En effet, supposons d'abord toutes les génératrices équidistantes, de telle sorte que la plus courte distance entre deux consécutives de ces droites soit une quantité fort petite δ. Construisons toutes ces plus courtes distances,

(*) *Voyez*, pour la ligne de striction, le *Calcul différentiel* de Lacroix, tome III, page 666.

lesquelles sont verticales; chacune d'elles se projette horizontalement en un point, à la rencontre des projections horizontales de deux génératrices. Faisons passer deux courbes, l'une par les extrémités supérieures de toutes ces petites verticales, et l'autre par leurs extrémités inférieures. Si δ diminue indéfiniment, la limite commune de ces deux courbes sera la ligne de striction : or, cette courbe limite est évidemment située sur la surface cylindrique.

10. La formule (8) donne la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec le plan des xy, la tangente en un point quelconque de la ligne de striction. De plus, cette courbe est représentée par l'ensemble des équations (1), (2), (3), c'est-à-dire par

$$x = -\varphi'(\alpha), \qquad y = -\alpha\varphi'(\alpha) + \varphi(\alpha), \qquad z = \psi(\alpha).$$

Pour avoir la différentielle $d\sigma$ de son arc, il suffit d'observer que

$$d\sigma = \sqrt{ds^2 + dz^2};$$

d'où

$$d\sigma = d\alpha\sqrt{(1+\alpha^2)\varphi''^2 + \psi'^2}. \tag{9}$$

Sections normales.

II. Par le point (x, y, z) projeté en m (*fig.* 2), faisons passer un plan perpendiculaire à la génératrice projetée en mg. Soit M la projection d'un point quelconque de la section, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point. Nommons θ l'angle de mg avec Ox.

En rapportant la courbe d'intersection à deux axes perpendiculaires, dont l'un soit la verticale projetée en m, et dont l'autre soit la trace mx' du plan normal, nous aurons d'abord

$$X = x + x'\sin\theta, \qquad Y = y - x'\cos\theta, \qquad Z = z'.$$

Les coordonnées X, Y, Z satisfont aux équations (1) et (2) de la surface; donc

$$x'(\cos\theta + \alpha\sin\theta) = y - \alpha x - \varphi(\alpha); \tag{10}$$

$$z' = \psi(\alpha). \tag{11}$$

Ces équations, dans lesquelles y, x, θ sont des constantes, tandis que α est un paramètre variable, représentent la section normale.

12. Cherchons le rayon de courbure au point m de cette courbe. A cet effet, désignons par ds l'élément qui aboutit au point projeté en M, et par ρ le rayon de courbure en ce point: nous aurons, par une formule connue,

$$\frac{ds}{\rho} = d.\operatorname{arctang}\frac{dz'}{dx'};$$

d'où

$$(12) \qquad \rho = \frac{ds^3}{dx'd^2z' - dz'd^2x'}.$$

La formule (10) donne

$$x' = \frac{y - \alpha x - \varphi}{\cos\theta + \alpha\sin\theta}, \qquad dx' = -\frac{x\cos\theta + (y-\varphi)\sin\theta + (\cos\theta + \alpha\sin\theta)\varphi'}{(\cos\theta + \alpha\sin\theta)^2}d\alpha;$$

$$d^2x' = -\frac{\varphi''}{\cos\theta + \alpha\sin\theta}d\alpha^2 + 2\frac{(\cos\theta + \alpha\sin\theta)\varphi' + x\cos\theta + (y-\varphi)\sin\theta}{(\cos\theta + \alpha\sin\theta)^3}\sin\theta\, d\alpha^2.$$

La formule (11) donne aussi

$$dz' = \psi'.d\alpha, \qquad d^2z' = \psi''.d\alpha^2.$$

Actuellement, il faut chercher ce que deviennent les valeurs de dx' et d^2x' pour le point projeté en m. En remplaçant $\operatorname{tang}\theta$ par α, et en ayant égard à la relation $y = \alpha x + \varphi$, elles se réduisent à

$$dx' = -\frac{x+\varphi'}{\sqrt{1+\alpha^2}}d\alpha, \qquad d^2x' = -\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\alpha^2}}d\alpha^2 + 2\frac{(x+\varphi')\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}d\alpha^2.$$

On a, en outre,

$$ds = d\alpha\sqrt{\psi'^2 + \frac{(x+\varphi')^2}{1+\alpha^2}}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (12), nous obtiendrons, pour l'expression du rayon de courbure d'une section normale, perpendiculaire au plan directeur,

$$(13) \qquad \rho = \frac{[(1+\alpha^2)\psi'^2 + (x+\varphi')^2]^{\frac{3}{2}}}{(1+\alpha^2)[\varphi''\psi' - (x+\varphi')\psi''] - 2(x+\varphi')\alpha\psi'}.$$

Dans cette formule, α et x sont deux variables indépendantes, lesquelles déterminent le point m.

Surface minimum.

13. Quand on cherche, par le calcul des variations, la surface terminée à un contour donné, et dont l'aire soit un minimum, on est conduit à l'équation aux différences partielles

$$(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs=0,$$

laquelle exprime que la surface dont il s'agit a, en chaque point, ses deux rayons principaux, égaux et de signes contraires.

Cherchons quelle est, parmi les surfaces gauches à plan directeur, celle qui jouit de cette dernière propriété.

La section normale, faite au point (x, y, z), et passant par la génératrice, a son rayon de courbure infini. De plus, on sait que la somme des courbures de deux sections normales, perpendiculaires entre elles, est égale à la somme des courbures principales. Si donc cette dernière est nulle, la première doit l'être pareillement. On conclut de là que la section normale, perpendiculaire à la génératrice, doit avoir son rayon de courbure infini. Donc, à cause de la formule (13),

$$(1+\alpha^2)\left[\varphi''\psi'-(x+\varphi')\psi''\right]-2(x+\varphi')\alpha\psi'=0.$$

Comme α et x sont indépendants l'un de l'autre, et que cette relation doit être vérifiée pour tous les points de la surface, elle se partage dans les deux équations suivantes :

$$(1+\alpha^2)(\varphi''\psi'-\varphi'\psi'')-2\alpha\varphi'\psi'=0, \qquad (1+\alpha^2)\psi''+2\alpha\psi'=0.$$

La dernière peut se mettre sous la forme

$$\frac{d.}{d\alpha}\left[(1+\alpha^2)\psi'\right]=0.$$

Elle donne

$$\psi'(\alpha)=\frac{c}{1+\alpha^2}, \qquad \text{et} \qquad \psi(\alpha)=c\,\text{arc tang}\,\alpha+c'.$$

Quant à la première équation, si l'on divise tous ses termes par ψ'^2, elle devient

$$(1+\alpha^2)\frac{d.\frac{\varphi'}{\psi'}}{d\alpha}-2\alpha\frac{\varphi'}{\psi'}=0,\qquad \text{ou}\qquad \frac{d.}{d\alpha}\left(\frac{\frac{\varphi'}{\psi'}}{1+\alpha^2}\right)=0;$$

d'où

$$\varphi'=\mathrm{A}(1+\alpha^2)\psi',\qquad \varphi'(\alpha)=\mathrm{B};$$

et ensuite,

$$\varphi(\alpha)=\mathrm{B}\alpha+\mathrm{B}'.$$

La surface gauche cherchée peut donc être représentée par

$$y=\alpha x+(\mathrm{B}\alpha+\mathrm{B}'),\qquad z=c\ \text{arc tang}\,\alpha+c'.$$

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, on pourra réduire ces deux formules à

$$y=\alpha x,\qquad z=c\ \text{arctang}\,\alpha;$$

d'où, en éliminant α,

$$z=c\ \text{arctang}\,\frac{y}{x}.$$

Cette dernière équation représente un héliçoïde gauche à plan directeur. Nous avons donc ce théorème : *De toutes les surfaces à plan directeur, l'héliçoïde est la seule qui soit une surface minimum* (*).

Ligne minimum.

14. Soit généralement $\varphi(x, y, z)=0$ l'équation d'une surface. Si l'on veut obtenir la ligne la plus courte tracée sur cette surface, et terminée à deux points donnés, on doit, à l'équation précédente, joindre celle-ci

$$\frac{d\varphi}{dx}d.\frac{dy}{ds}=\frac{d\varphi}{dy}d.\frac{dx}{ds},$$

(*) Depuis que ce Mémoire est composé, j'ai démontré, dans le tome VII du Journal de M. Liouville, un théorème plus général.

dans laquelle

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Pour appliquer cette théorie au cas qui nous occupe, écrivons, sous cette forme symétrique, l'équation de la surface gauche,

$$(14) \qquad x f(z) + y F(z) = a.$$

La constante qui forme le second membre pourra, en général, être prise égale à l'unité ; elle sera zéro quand toutes les génératrices rencontreront l'axe des z, c'est-à-dire lorsque la surface gauche sera un conoïde ayant cet axe pour directrice.

Nous aurons donc, avec cette équation,

$$(15) \qquad f(z)\, d.\frac{dy}{ds} = F(z)\, d.\frac{dx}{ds}.$$

Lorsque les fonctions f et F seront connues, on éliminera z entre (14) et (15), et l'on aura une équation du second ordre entre x et y.

15. Dans le cas de $a = 0$, les fonctions f et F s'éliminent immédiatement, et l'on obtient

$$x d.\frac{dx}{ds} + y d.\frac{dy}{ds} = 0,$$

pour équation de la ligne minimum.

Le rayon du cercle osculateur de cette courbe fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d.\frac{dx}{ds}$, $d.\frac{dy}{ds}$, $d.\frac{dz}{ds}$. D'un autre côté, la génératrice fait, avec ces mêmes axes, des angles ayant pour cosinus $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et *zéro*. L'équation précédente exprime donc que le rayon du cercle osculateur est perpendiculaire à la génératrice. C'est ce que l'on pouvait prévoir, attendu que la ligne minimum a son plan osculateur normal à la surface.

Enveloppe des paraboloïdes normaux.

16. Si, par différents points situés sur une même génératrice d'une surface gauche S, on mène des normales à cette surface, elles seront toutes situées sur un paraboloïde hyperbolique, que l'on peut appeler *paraboloïde normal à la surface gauche*.

Considérons diverses génératrices consécutives G, G′, G″,..., et les paraboloïdes normaux correspondants P, P′, P″,.... Les paraboloïdes consécutifs P et P′ se couperont suivant une courbe C; les paraboloïdes P′ et P″ se couperont de même suivant une courbe C′; et ainsi de suite. Il est clair que le lieu des courbes C, C′, C″,... sera une surface Σ, à laquelle les paraboloïdes seront tangents, lorsque les génératrices G, G′, G″,... se succéderont à des distances infiniment petites. Autrement dit, la surface Σ sera l'enveloppe des paraboloïdes. On voit, de plus, que cette surface Σ sera, en quelque sorte, relativement à la surface gauche donnée, ce qu'est la développée d'une courbe plane, relativement à cette courbe. En effet, les paraboloïdes remplacent les normales, et leur enveloppe est la surface Σ.

17. La courbe C, étant l'intersection de deux paraboloïdes successifs P et P′, si nous prenons sur cette courbe un point M, nous pourrons mener, de ce point, deux normales à la surface gauche : l'une de ces normales sera une génératrice du paraboloïde P, et l'autre, une génératrice du paraboloïde P′. Nous voyons que M est le point de rencontre de deux normales à S, consécutives; donc les pieds de ces deux droites appartiennent à une ligne de courbure de S; et enfin la surface Σ, enveloppe des paraboloïdes normaux à la surface gauche S, est identique avec le lieu des centres de courbure de cette dernière.

18. On sait que la surface lieu des centres de courbure est généralement composée de deux nappes distinctes correspondant, l'une à la première courbure, et l'autre à la seconde courbure de S. Il suit de là que la courbe C, suivant laquelle les deux paraboloïdes P et P′ se rencontrent, est formée de deux branches, situées de part et d'autre de S, et que l'enveloppe Σ des paraboloïdes normaux est une surface ayant deux nappes.

19. Reprenons l'équation

$$xf(z) + y\mathrm{F}(z) = a.$$

Les équations d'une normale sont

$$(\mathrm{X}-x)+p(\mathrm{Z}-z)=0, \qquad (\mathrm{Y}-y)+q(\mathrm{Z}-z)=0,$$

p et q étant les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation (14), savoir :

$$p=-\frac{f}{xf'+y\mathrm{F}'}, \qquad q=-\frac{\mathrm{F}}{xf'+y\mathrm{F}'};$$

ce qui donne

$$(\mathrm{X}-x)(xf'+y\mathrm{F}')=(\mathrm{Z}-z)f, \qquad (\mathrm{Y}-y)(xf'+y\mathrm{F}')=(\mathrm{Z}-z)\mathrm{F}.$$

Éliminant x et y entre ces deux équations et celle de la surface, on trouve, pour équation du paraboloïde normal,

$$(16)\ (\mathrm{X}f+\mathrm{YF}-a)[a(ff'+\mathrm{FF}')+(\mathrm{XF}-\mathrm{Y}f)(\mathrm{F}f'-f\mathrm{F}')]=(\mathrm{Z}-z)(\mathrm{F}^2+f^2)^2.$$

En discutant cette équation, dans laquelle z est constant pour un même paraboloïde, on reconnaît facilement que celui-ci a son *axe* vertical, et que son *sommet* est déterminé par les équations

$$\begin{gathered}\mathrm{Z}-z=0,\\ \mathrm{X}f+\mathrm{YF}-a=0,\\ (\mathrm{XF}-\mathrm{Y}f)(\mathrm{F}f'-f\mathrm{F}')+a(ff'+\mathrm{FF}')=0.\end{gathered}$$

Elles montrent que le plan horizontal, dont l'ordonnée est z, coupe le paraboloïde suivant la génératrice de la surface gauche et suivant une perpendiculaire à cette génératrice. Les *plans directeurs* du paraboloïde sont donc verticaux et perpendiculaires entre eux.

20. Si l'on multiplie la seconde des trois dernières équations par $ff'+\mathrm{FF}'$, et qu'on ajoute le produit au premier membre de la dernière, on trouve

$$(f^2+\mathrm{F}^2)(\mathrm{X}f'+\mathrm{YF}')=0,$$

ou plus simplement

$$\mathrm{X}f'+\mathrm{YF}'=0.$$

Cette relation, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées du sommet du paraboloïde, nous apprend que ce point est situé sur la ligne de striction de la surface gauche. En effet, le point de rencontre des projections horizontales de deux génératrices consécutives de cette surface est évidemment donné par les équations

$$xf + yF - a = 0,$$
$$xf' + yF' = 0,$$

lesquelles ne diffèrent de celles du sommet que par le changement de X et Y en x et y. Si actuellement nous faisons varier z, nous conclurons de cette observation que *le lieu des sommets des paraboloïdes normaux est la ligne de striction de la surface gauche.*

21. Considérons l'angle droit formé par les deux génératrices horizontales d'un quelconque des paraboloïdes. Si nous faisons mouvoir cet angle de manière que son sommet parcoure la ligne de striction et que l'un de ses deux côtés décrive la surface gauche, son second côté engendrera une nouvelle surface gauche dont la ligne de striction aura, avec celle de la première surface, cette relation simple : *La projection horizontale de la seconde ligne de striction est la développée de la projection de la première.*

Cette proposition résulte évidemment de ce que la ligne de striction est projetée suivant l'enveloppe des projections des génératrices.

22. Pour les applications, il pourra être commode de transformer de la manière suivante l'équation (16).

Nous avons trouvé ci-dessus l'identité

$$\begin{aligned}&(XF - Yf)(Ff' - fF') + a(ff' + FF') \\ &= (Xf' + YF')(f^2 + F^2) - (Xf + YF - a)(ff' + FF').\end{aligned}$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu de l'équation (16),

$$\begin{aligned}&(Xf + YF - a)\,[(Xf' + YF')(f^2 + F^2) - (Xf + YF - a)(ff' + FF')] \\ &= (Z - z)(F^2 + f^2)^2.\end{aligned}$$

Avec un peu d'attention, on reconnaît que cette dernière équation peut être écrite sous la forme abrégée

$$(17) \qquad \frac{d}{dz}\left[\frac{(Xf+YF-a)^2}{f^2+F^2}+(Z-z)^2\right]=0.$$

On formera donc, dans chaque cas particulier, la fonction comprise dans la parenthèse : sa dérivée par rapport à z, égalée à zéro, sera l'équation du paraboloïde normal.

23. Dans l'équation (16), ou dans l'équation (17), z peut être considéré comme étant un paramètre variable. Si donc on prend la dérivée par rapport à z, que l'on égale cette dérivée à zéro, et qu'ensuite on élimine z entre la nouvelle équation et celle du paraboloïde, on obtiendra l'équation du lieu des centres.

Équation différentielle de la surface gauche.

24. L'équation aux différences partielles, du second ordre, a une forme remarquable. On parvient aisément à cette équation, par le calcul suivant.

Les valeurs de p et q, obtenues ci-dessus, donnent

$$\frac{p}{q}=\frac{f}{F}.$$

Si nous différentions cette équation, successivement par rapport à x et z, et par rapport à y et z, nous obtiendrons

$$\frac{qr-ps}{q^2}=\left(\frac{f}{F}\right)'p, \qquad \frac{qs-pt}{q^2}=\left(\frac{f}{F}\right)'q,$$

en désignant par $\left(\frac{f}{F}\right)'$ la dérivée de $\frac{f}{F}$. Divisant ces deux équations membre à membre, on a

$$\frac{qr-ps}{qs-pt}=\frac{p}{q},$$

ou

$$(18) \qquad q^2r-2pqs+p^2t=0,$$

pour l'équation différentielle demandée. L'équation (14) satisfaisant à cette dernière, et contenant deux fonctions arbitraires, en est l'intégrale générale (*).

25. L'équation différentielle de la surface minimum étant

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0;$$

si nous voulons que la surface gauche jouisse de la propriété du minimum, il faudra que son équation satisfasse à

$$r + t = 0.$$

L'intégrale de celle-ci est

$$z = \varphi\left(x + y\sqrt{-1}\right) + \psi\left(x - y\sqrt{-1}\right). \tag{19}$$

Par suite, l'équation de la surface gauche minimum, à plan directeur, devra satisfaire en même temps aux équations (18) et (19). D'après ce que nous avons démontré plus haut, l'héliçoïde gauche jouit seul de cette double propriété.

SECONDE PARTIE.

Ainsi que nous l'avons annoncé, nous allons appliquer à cette surface particulière les considérations générales développées dans les articles précédents.

26. En choisissant une unité convenable, nous pourrons toujours mettre l'équation de l'héliçoïde sous la forme

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}; \tag{20}$$

d'où

$$p = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad q = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

27. L'enveloppe des projections horizontales des génératrices est l'origine des coordonnées; la ligne de striction est l'axe des z, ou la directrice rectiligne; et les lignes de plus grande pente, projetées suivant des circonférences ayant pour centre l'origine, sont des hélices de même pas. Les

(*) *Calcul différentiel* de LACROIX, tome II, page 585.

trois premiers énoncés conviennent évidemment à toutes les surfaces conoïdes dans lesquelles la directrice est perpendiculaire au plan directeur.

Ligne minimum sur l'héliçoïde.

28. Reprenons l'équation de cette ligne :

$$xd.\frac{dx}{ds} + yd.\frac{dy}{ds} = 0.$$

En développant le calcul, nous aurons d'abord

$$ds\,(xd^2x + yd^2y) - d^2s\,(xdx + ydy) = 0.$$

Posons

$$y = u \sin\omega, \qquad x = u \cos\omega\,;$$

d'où

$$dy = \sin\omega\, du + u \cos\omega\, d\omega, \qquad dx = \cos\omega\, du - u \sin\omega\, d\omega,$$
$$d^2y = \sin\omega\, d^2u + 2\cos\omega\, du\, d\omega - u \sin\omega\, d\omega^2,$$
$$d^2x = \cos\omega\, d^2u - 2\sin\omega\, du\, d\omega - u\cos\omega\, d\omega^2;$$

en prenant ω pour variable indépendante.

L'équation de l'héliçoïde revient à $z = \omega$; donc

$$ds^2 = du^2 + (1 + u^2)\, d\omega^2, \qquad ds\, d^2s = du\, d^2u + u\, du\, d\omega^2.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation ci-dessus devient, après la multiplication par ds,

$$[du^2 + (1 + u^2)\, d\omega^2]\,(ud^2u - u^2 d\omega^2) - (du\, d^2u + u\, du\, d\omega^2)\, u\, du = 0;$$

ou bien, en réduisant,

$$(1 + u^2)\,\frac{d^2u}{d\omega^2} - 2u\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 - u(1 + u^2) = 0.$$

29. Pour intégrer cette équation, je pose

$$u = \text{tang}\, \nu;$$

d'où

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{1}{\cos^2\nu}\,\frac{d\nu}{d\omega}, \qquad \frac{d^2u}{d\omega^2} = \frac{1}{\cos^2\nu}\,\frac{d^2\nu}{d\omega^2} + 2\,\frac{\sin\nu}{\cos^3\nu}\left(\frac{d\nu}{du}\right)\,;$$

et ensuite

$$(21) \qquad \frac{d^2 v}{d\omega^2} - \sin v \cos v = 0.$$

En multipliant les deux membres par $2\,dv$, nous aurons

$$d.\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 = d.\sin^2 v, \qquad \frac{dv}{d\omega} = \sqrt{\sin^2 v + c};$$

puis

$$(22) \qquad d\omega = \frac{dv}{\sqrt{\sin^2 v + c}}.$$

30. L'intégrale de cette nouvelle formule sera très-différente, selon que la constante arbitraire c sera positive, négative, ou nulle.

1°. Si c est positive, prenons

$$v = \frac{\pi}{2} - \varphi, \qquad c = \cot^2\beta;$$

nous aurons

$$d\omega = -\frac{\sin\beta\, d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta \sin^2\varphi}},$$

$$\omega = \mathrm{B} \pm \sin\beta \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta \sin^2\varphi}},$$

et

$$u = \cot\varphi.$$

2°. La constante c étant négative, il faut, pour que le radical soit réel, qu'elle soit moindre que l'unité : elle peut donc être représentée par $-\cos^2\gamma$. Posons

$$\cos v = \sin\gamma \sin\varphi;$$

nous aurons, par un calcul facile,

$$\omega = \mathrm{C} \pm \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\varphi}}, \qquad u = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2\varphi}}{\sin\gamma \sin\varphi}.$$

3°. Enfin, si la constante c est nulle, l'équation (22) donne

$$d\omega = \pm \frac{dv}{\sin v} = \pm\, d.\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v;$$

donc, en prenant le signe $+$,

$$\omega = \log k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v,$$

k étant la constante.

De $\operatorname{tang} v = u$, l'on déduit

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{1-\cos v}{1+\cos v} = \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\sqrt{1+u^2}+1} = \frac{(\sqrt{1+u^2}-1)^2}{u^2}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u};$$

puis

$$e^{\omega} = k\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u}.$$

Si l'on pose $k = e^{\alpha}$, cette équation donne

$$e^{(\omega-\alpha)} = \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u}, \qquad e^{-(\omega-\alpha)} = \frac{\sqrt{1+u^2}+1}{u};$$

et enfin

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\left[e^{-(\omega-\alpha)} - e^{(\omega-\alpha)}\right].$$

Si l'on avait pris $d\omega = -\dfrac{dv}{\sin v}$, on aurait trouvé

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\left[e^{(\omega-\alpha)} - e^{-(\omega-\alpha)}\right].$$

31. Nous voyons que, selon les positions des deux points donnés sur la surface héliçoïdale, la ligne minimum qui les unit, représentée généralement par l'équation (22), aura des formes très-différentes. Autrement dit, cette équation représente trois genres de courbes, à peu près comme l'équation générale du second degré entre deux variables, peut représenter des ellipses, des paraboles ou des hyperboles.

Pour simplifier la discussion de ces courbes, nous supposerons que les deux points donnés, tout en conservant leurs positions relatives, montent ou descendent sur les hélices qui les contiennent, de telle sorte que les constantes provenant de l'intégration soient nulles. En même temps, nous prendrons ω positif, ce qui revient à supposer que celui des deux points donnés qui se trouve le plus bas, est placé sur l'axe des x. Nous aurons ainsi :

(23) 1^er^ *genre :* $\omega = \sin\beta \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}}, \qquad u = \cot\varphi;$

(24) 2^e^ *genre :* $\omega = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}, \qquad u = \frac{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}{\sin\gamma\sin\varphi};$

(25) 3^e^ *genre :* $\frac{1}{u} = \frac{1}{2}(e^\omega - e^{-\omega}).$

32. Prenons d'abord la courbe du dernier genre, représentée par l'équation (25).

Soit (*fig.* 3) Ox un axe fixe, et soit O le pôle. Décrivons de ce point, comme centre, avec un rayon OA égal à l'unité de longueur, une circonférence ABCD. Nous porterons sur cette ligne, à partir du point A, les valeurs de ω.

On trouve, pour	$\omega = 1$,	$u = 0,85$;
	2,	0,28;
	3,	0,10;
	4,	0,04;
	. . . . . .	. . . . .
et pour	$\omega = \frac{1}{2}$,	$u = 1,92$;
	$\frac{1}{4}$,	3,97;
	$\frac{1}{8}$,	8,00;
	. . . . . .	. . . . .

On voit que pour $\omega > 1$, les valeurs de u décroissent fort rapidement; par conséquent, la première partie de la courbe est une spirale EFGHI..., qui s'approche de plus en plus du pôle, lequel est un point asymptotique.

Quant à la seconde partie EL..., elle est presque rectiligne, ce qui fait soupçonner qu'elle a une asymptote parallèle à l'axe. On justifie cette hypothèse à l'aide des règles ordinaires, et l'on trouve que la droite RS, tangente au cercle ABCD, est asymptote à la courbe.

33. La spirale que nous venons de construire est seulement la projection d'une ligne minimum. Quant à cette courbe elle-même, on voit que, d'une part, elle s'approche rapidement de l'axe des z, et que, de l'autre côté, elle s'approche indéfiniment du plan des xy, en s'éloignant de l'axe des z. Elle atteint ce plan à une distance infinie de l'axe, et elle atteint cet axe à une distance infinie du plan.

34. Discutons actuellement les équations (23). La valeur de ω est exprimée par une fonction elliptique de première espèce, dans laquelle l'amplitude et le module sont respectivement φ et $\sin\beta$. En attribuant à β différentes valeurs, on obtient diverses courbes : nous avons construit (*fig.* 4) celle qui répond à $\beta = 45°$, ou $\sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

A l'aide des Tables de Legendre et des Tables de sinus, on trouve

pour	$\varphi = 0°$,	$\omega = 0$,	$u = \infty$;
	$10°$,	$0,124$,	$5,671$;
	$20°$,	$0,249$,	$2,748$;
	$30°$,	$0,379$,	$1,732$;
	$40°$,	$0,514$,	$1,164$;
	$50°$,	$0,656$,	$0,839$;
	$60°$,	$0,808$,	$0,577$;
	$70°$,	$0,968$,	$0,364$;
	$80°$,	$1,137$,	$0,176$;
	$90°$,	$1,311$,	0;
	$120°$,	$1,814$,	$-0,577$;
	$150°$,	$2,243$,	$-1,732$;
	$180°$,	$2,621$,	$-\infty$.

La courbe passe donc par l'origine. Elle a pour axe la droite OE, bissectrice de l'angle formé par les directions des rayons vecteurs infinis. Elle a aussi une asymptote parallèle à l'axe polaire. En effet, les équations (23) donnent, lorsque ω est très-petit,

$$u \sin\omega = u\omega = \frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\varphi}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}}.$$

La vraie valeur de cette quantité est ce que devient $\sin\beta \dfrac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}}$ pour $\varphi = 0$; c'est-à-dire $\sin\beta$. Par suite, la droite GH, menée à la distance $\sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, de l'axe Ox, est asymptote. Il y a une autre asymptote, symétrique de celle-ci par rapport à l'axe OE.

35. Dans la courbe que nous venons de construire, nous avions $\beta = 45°$, et la valeur de ω répondant à $u = 0$, était $\omega = 1{,}311$. Si nous faisons varier β, et si nous désignons généralement par Ω l'arc qui correspond à $u = 0$, nous aurons, en prenant la notation de Legendre,

$$\Omega = \sin\beta\, F_1(\sin\beta).$$

On trouve, pour	$\beta = 0°$,	$\Omega = 0{,}274$;
	$20°$,	$0{,}554$;
	$30°$,	$0{,}843$;
	$40°$,	$1{,}149$;
	$50°$,	$1{,}482$;
	$60°$,	$1{,}858$;
	$70°$,	$2{,}353$;
	$80°$,	$3{,}105$;
	$89°$,	$5{,}438$;
	$90°$,	∞.

Il résulte de ce tableau, que le module $\sin\beta$ augmentant de plus en plus, l'arc Ω croît indéfiniment; lorsque $\sin\beta$ diffère très-peu de l'unité, la courbe décrit plusieurs spires avant d'atteindre le pôle; et lorsque $\beta = 90°$, elle se transforme dans la courbe du troisième genre, et le nombre des spires devient infini (voyez *fig.* 6).

36. La même discussion, faite sur la courbe représentée par les équations (24), montre que, dans le cas de $\gamma = 45°$, elle a la forme indiquée dans la *fig.* 5. Les asymptotes GH, G'H' sont distantes du centre d'une quantité égale à $\sqrt{2}$: en général, cette distance est $\frac{1}{\sin\gamma}$. Le sommet B de la courbe répond à

$$\omega = F_1(\sin\gamma) = \Omega, \quad u = \cot\gamma = U.$$

Si donc γ croît depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, Ω augmente indéfiniment, et U converge vers zéro. En même temps, l'asymptote GH, qui se trouve à l'infini lorsque $\gamma = 0$, est à une distance 1 de Ox, pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$. La courbe du second genre a donc encore pour limite celle du troisième.

37. Cherchons l'inclinaison de la tangente en un point de la ligne minimum, sur la génératrice qui passe en ce point.

Soient OM, O′M′ (*fig.* 7) deux génératrices consécutives de l'héliçoïde, projetées horizontalement en om, om', et soit MM′ un élément de la ligne minimum, projeté en mm'. Si du point M nous abaissons la perpendiculaire PM sur O′M′, elle aura pour projection mp, perpendiculaire à om', attendu que O′M′ est une horizontale. Donc, en désignant par θ l'angle MM′P, par u le rayon vecteur om, et par ds l'élément MM′,

$$\cos\theta = \frac{du}{ds}.$$

On a trouvé ci-dessus

$$ds^2 = du^2 + (1 + u^2)\,d\omega^2.$$

D'ailleurs, l'équation (22) donne, à cause de $v = \operatorname{arc\,tang} u$,

$$d\omega = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{u^2+c(1+u^2)}};$$

d'où

$$ds^2 = (1+c)\frac{(1+u^2)\,du^2}{c+(1+c)u^2};$$

puis

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{c+(1+c)u^2}{(1+c)(1+u^2)}}.$$

On a une expression plus simple en prenant la cotangente; car on trouve

$$(26) \qquad \cot\theta = \sqrt{c+(1+c)u^2}.$$

38. Nous avons vu que la grandeur de la constante c détermine le genre de la courbe minimum. D'après la formule précédente, suivant que l'on a

$$c \gtreqless 0, \qquad \text{on aura aussi} \qquad \cot\theta \gtreqless u.$$

Ainsi, le genre de la courbe dépend seulement du signe de la différence qui existe entre son rayon vecteur et la cotangente de l'angle que fait ce rayon avec la tangente à la courbe. Il résulte aussi de cette observation, que si l'on se donne un point de la courbe, avec l'angle correspondant à ce point, on aura

$$c = \frac{\cot^2\theta - u^2}{1 + u^2};$$

alors la courbe sera parfaitement déterminée, ainsi que les constantes α, β ou γ.

Lignes de courbure de l'héliçoïde.

39. Prenons un point M sur la surface héliçoïdale, et menons le plan tangent en ce point. Soient (*fig.* 8) OM la génératrice rectiligne, et MA la trace, sur le plan tangent, de la section normale perpendiculaire à OM. Soient enfin MP et MP′ les traces des sections normales principales, ou les tangentes aux deux lignes de courbure passant en M. Les sections normales MO et MA, ayant des rayons de courbure infinis, doivent être également inclinées sur la section principale MP. De plus, les deux droites MO, MA sont perpendiculaires entre elles; donc elles doivent faire, avec MP, des angles de 45 degrés. Ainsi, *les lignes de courbure de l'héliçoïde rencontrent, sous un même angle de* 45 *degrés, toutes les génératrices rectilignes.*

40. Nous avons trouvé plus haut, pour l'inclinaison d'une courbe avec la génératrice passant en l'un de ses points,

$$\cos\theta = \frac{du}{ds}.$$

Donc, pour la ligne de courbure,

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{\sqrt{du^2 + (1 + u^2)\,d\omega^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Cette équation donne

$$d\omega = \pm \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Intégrant, choisissant l'axe polaire, de manière que $\omega = 0$ donne $u = 0$, on obtient

$$(27) \qquad \pm u = \frac{1}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega}).$$

Il est évident que toutes les lignes de courbure tracées sur la surface, et dirigées dans le même sens, sont identiques; ce qui tient à la nature de l'héliçoïde.

41. La courbe que nous venons d'obtenir a une liaison remarquable avec la ligne minimum du troisième genre. On voit, en effet, que si on les fait passer toutes deux par un même point situé à une distance 1 de l'axe des z, le produit des deux rayons vecteurs qui correspondent à une même valeur de ω, est constamment égal à l'unité. Cette remarque peut servir à construire facilement l'une des courbes, quand l'autre est donnée. On peut aussi, à cause de l'analogie avec la chaînette, construire la courbe (27) à l'aide de deux spirales logarithmiques. On trouve ainsi la forme indiquée *fig.* 9.

Paraboloïde normal.

42. Nommons x, y, z les coordonnées d'un point de l'héliçoïde, et X, Y, Z des coordonnées courantes : la normale au point x, y, z sera représentée par les équations

$$z = \text{arc tang}\frac{y}{x},$$

$$(X - x) - \frac{y}{x^2+y^2}(Z - z) = 0, \qquad (Y - y) + \frac{x}{x^2+y^2}(Z - z) = 0.$$

Je fais

$$z = \omega, \qquad \text{d'où} \qquad x = u\cos\omega, \quad y = u\sin\omega;$$

puis

$$u(X - u\cos\omega) - \sin\omega(Z - \omega) = 0,$$
$$u(Y - u\sin\omega) + \cos\omega(Z - \omega) = 0.$$

Multiplions la première de ces deux équations par $\sin\omega$, la seconde par $\cos\omega$, et retranchons : il viendra

$$(28)\qquad u(X\sin\omega - Y\cos\omega) - (Z - \omega) = 0.$$

Au contraire, si nous les multiplions respectivement par $\cos\omega$, $\sin\omega$, et si nous ajoutons, nous aurons

$$(29)\qquad X\cos\omega + Y\sin\omega - u = 0.$$

Les équations (28) et (29) peuvent être considérées comme étant celles de la normale au point (u, ω).

Éliminons u entre ces deux équations, nous obtiendrons, pour le lieu des normales menées le long d'une même génératrice,

$$Z - \omega = (X\cos\omega + Y\sin\omega)(X\sin\omega - Y\cos\omega).$$

Cette équation, qui aurait pu être obtenue plus rapidement par la règle du n° **22**, représente un paraboloïde. On peut la mettre sous une forme plus simple, car si l'on pose

$$X = U\cos\Omega,\qquad Y = U\sin\Omega,$$

elle devient

$$(30)\qquad 2(Z - \omega) = U^2\sin 2(\omega - \Omega).$$

Lieu des centres de courbure de l'héliçoïde.

43. Nous avons vu que cette surface est l'enveloppe de tous les paraboloïdes normaux. Pour obtenir son équation, nous prendrons la dérivée de la formule précédente, par rapport à ω; puis nous éliminerons ω.

L'équation (30) étant différentiée donne

$$-1 = U^2\cos 2(\omega - \Omega).$$

Élevons ces deux équations au carré, et ajoutons membre à membre: il vient

$$1 + 4(Z - \omega)^2 = U^4.$$

Éliminant donc ω entre les deux dernières, nous obtiendrons

$$-1 = U^2 \cos\left(2Z - 2\Omega \mp \sqrt{U^4 - 1}\right).$$

Celle-ci, étant résolue par rapport à Z, donne

$$Z - \Omega = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{U^4 - 1} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{U^2}\right).$$

On peut observer que

$$\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{U^2}\right) = \pm\left(\pi - \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{U^2}\right),$$

ce dernier arc étant positif et moindre que π. En outre, le cosinus étant $\frac{1}{U^2}$, la cotangente sera $\sqrt{U^4 - 1}$. L'équation du lieu demandé est donc

$$(31) \qquad Z - \Omega = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{U^4 - 1} \pm \tfrac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arc.cotang}\sqrt{U^4 - 1}\right).$$

44. Si l'on donne à U une valeur déterminée, le second membre reste constant; donc, en appelant Z' et Ω' des valeurs correspondantes de Z et Ω, on aura

$$Z - Z' = \Omega - \Omega'.$$

Ainsi, le rayon vecteur ne changeant pas, les accroissements de l'ordonnée verticale et de l'arc polaire correspondant, sont égaux. Autrement dit, les sections faites dans la surface lieu des centres de courbure, par des cylindres de révolution autour de l'axe de l'héliçoïde, sont des hélices. Cela était facile à prévoir; car si en un point de l'héliçoïde, on élève une normale égale à l'un des deux rayons principaux relatifs à ce point, et si ensuite on fait mouvoir cette droite sans que son pied sorte de l'hélice passant au point considéré, son autre extrémité décrira une hélice, laquelle appartient évidemment au lieu des centres de courbure.

De cette observation résulte que toutes les sections horizontales, faites dans la surface, sont identiques ; il en est de même des sections faites suivant l'axe des z. Nous allons construire une des sections horizontales ; et, puisqu'elles sont identiques, nous pourrons prendre celle qui est déterminée par le plan des xy.

45. Posant $Z = 0$, nous avons, pour l'équation de cette trace horizontale,

$$\Omega = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{U^4 - 1} \pm \tfrac{1}{2}\left(\pi - \text{arc cotang}\sqrt{U^4 - 1}\right).$$

Pour chaque valeur attribuée au rayon vecteur, il y a donc quatre valeurs de Ω. Appelons Ω' et Ω'' celles qui ne diffèrent que par le signe ; nous pourrons écrire, en représentant $\sqrt{U^4 - 1}$ par α,

(32) $$\Omega' = \pm \tfrac{1}{2}(\alpha - \text{arc tang}\,\alpha + \pi),$$

(33) $$\Omega'' = \pm \tfrac{1}{2}(\alpha + \text{arc tang}\,\alpha - \pi).$$

L'équation (32) représente une courbe composée de deux branches séparées, symétriques par rapport à l'origine. L'équation (33) représente pareillement une courbe ayant pour centre l'origine. Ces deux courbes, qui ont des formes différentes, appartiennent évidemment, l'une, à la première nappe du lieu cherché ; l'autre, à la seconde nappe de ce lieu. Quant aux deux branches de chaque courbe, elles proviennent de ce que l'héliçoïde gauche, représenté par $z = \text{arc tang}\frac{y}{x}$, est réellement composé de deux nappes, réunies par l'axe des z. Si l'on voulait, comme on le fait ordinairement, supposer que les génératrices de cette surface sont brusquement terminées à l'axe, on ne devrait prendre, dans les équations ci-dessus, qu'une seule valeur pour chacune des quantités Ω' et Ω''. C'est ce que nous avons fait, pour plus de simplicité, dans la *fig.* 10.

En réduisant les arcs en degrés, on trouve

pour	$U = 1,00$,	$\Omega' = \pm 90^\circ\ 0'$,	$\Omega'' = \mp 90^\circ\ 0'$;
	$1,02$,	$\pm 90^\circ 13'$,	$\mp 73^\circ 45'$;
	$1,05$,	$\pm 90^\circ 50'$,	$\mp 64^\circ 15'$;
	$1,06$,	$\pm 91^\circ\ 7'$,	$\mp 61^\circ 46'$;
	$1,08$,	$\pm 91^\circ 43'$,	$\mp 57^\circ 18'$;
	$1,10$,	$\pm 92^\circ 22'$,	$\mp 53^\circ 22'$;
	$1,20$,	$\pm 96^\circ 40'$,	$\mp 37^\circ 19'$;
	$1,25$,	$\pm 99^\circ 17'$,	$\mp 30^\circ 31'$;
	$1,50$,	$\pm 115^\circ 58'$,	$\pm 0^\circ 25'$;
	$1,75$,	$\pm 137^\circ 30'$,	$\pm 28^\circ 25'$;
	$2,00$,	$\pm 173^\circ 11'$,	$\pm 58^\circ 42'$;
	$2,25$,	$\pm 193^\circ\ 9'$,	$\pm 91^\circ 46'$;
	$2,50$,	$\pm 226^\circ 22'$,	$\pm 127^\circ 10'$;
	$2,75$,	$\pm 263^\circ 34'$,	$\pm 165^\circ 57'$;
	$3,00$,	$\pm 304^\circ 30'$,	$\pm 208^\circ\ 6'$.
	....	....	....

A l'aide de ces valeurs, on peut construire par points les deux courbes. En prenant (*fig.* 10) OX pour axe polaire et OA pour unité, on trouve, pour le lieu représenté par l'équation (32), la spirale ABC; et pour le lieu représenté par l'équation (33), la spirale DEF.

La première courbe est normale en A, au cercle AD; la seconde est tangente à ce même cercle, en D.

46. L'inspection de la figure montre que nos courbes ne pénètrent pas dans l'intérieur de la circonférence AD. Par conséquent, la surface lieu des centres de courbure est extérieure à un cylindre de révolution autour de l'axe des z. Nous pouvons vérifier, par un autre moyen, l'existence de cette propriété.

L'équation qui donne les grandeurs des rayons principaux, en un point x, y, z d'une surface, est, en employant les notations ordinaires,

$$(rt-s^2)\rho^2-[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\rho\sqrt{1+p^2+q^2}+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Dans le cas de l'héliçoïde à plan directeur, les deux rayons principaux étant égaux et de signes contraires, la quantité entre parenthèse est nulle. En même temps, à cause de $z = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$, on a

$$p = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad q = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$r = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad s = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad t = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

ce qui réduit l'équation ci-dessus à

$$\rho = \pm(1 + x^2 + y^2),$$

ou

(34) $$\rho = \pm(1 + u^2).$$

Considérons les rayons principaux relatifs à tous les points situés sur l'axe des x : les extrémités de ces droites seront situées sur deux courbes, symétriques par rapport à cet axe, et qui appartiendront évidemment à la surface lieu des centres de courbure. Elles peuvent même, en glissant sur des hélices, engendrer cette surface d'une manière fort simple.

Actuellement, si l'on suppose $y = 0$ dans la première valeur de ρ, et si l'on observe que le plan tangent à l'héliçoïde, pour un point distant de l'axe d'une quantité x, fait avec le plan horizontal un angle dont la tangente est $\frac{1}{x}$, on trouve facilement que ces deux courbes sont représentées par

$$y^2 - x^2 = 1, \qquad z^2 = y^2(y^2 - 1).$$

Or, la première équation prouve que ces deux courbes sont extérieures au cylindre dont nous avons parlé, et qu'elles ne font que le toucher. On remarquera en même temps que l'intersection de deux paraboloïdes normaux consécutifs se projette horizontalement suivant une hyperbole équilatère. On peut vérifier enfin, par un calcul direct, que la ligne représentée par les deux dernières équations est située sur la surface (31).

47. Pour terminer ces applications, nous allons chercher la courbe formée par les intersections des normales à l'héliçoïde, menées par les différents points d'une de ses lignes de courbure. Cette courbe, située sur la surface lieu des centres, est l'arête de rebroussement de la surface développable formée par toutes ces normales.

A cet effet, je reprends les équations de la normale et de la ligne de courbure, savoir:

$$u = \tfrac{1}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega}), \tag{27}$$

$$u(X \sin\omega - Y \cos\omega) - (Z - \omega) = 0, \tag{28}$$

$$X \cos\omega + Y \sin\omega = u. \tag{29}$$

La longueur de la partie de la normale comprise entre le point d'où elle est menée et le point de rencontre avec la normale suivante, est égale au rayon de courbure relatif au premier point; donc, à cause de l'équation (34),

$$(X - u \cos\omega)^2 + (Y - u \sin\omega)^2 + (Z - \omega)^2 = (1 + u^2)^2.$$

Si, entre ces quatre équations, nous éliminons u, ω et Z, nous aurons en X et Y l'équation de la projection horizontale de la courbe cherchée.

En développant la dernière équation, remplaçant $Z - \omega$ par sa valeur tirée de la seconde, et ayant égard à la troisième, on obtient d'abord

$$X^2 + Y^2 - u^2 + u^2(X \sin\omega - Y \cos\omega)^2 = (1 + u^2)^2.$$

Ajoutons celle-ci au carré de la première, multiplié par u^2 :

$$X^2 + Y^2 - u^2 + u^2(X^2 + Y^2) = u^4 + (1 + u^2)^2,$$

ou

$$X^2 + Y^2 = 1 + 2u^2.$$

Ainsi qu'on l'a vu précédemment, l'équation (27) peut se mettre sous la forme

$$\omega = l\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right).$$

En même temps, posons

$$X = U \cos \Omega, \qquad Y = U \sin \Omega,$$

nous aurons

$$U \cos(\Omega - \omega) = u, \qquad U^2 = 1 + 2u^2.$$

Celles-ci donnent

$$\Omega - \omega = \arc \cos \sqrt{\frac{U^2 - 1}{2U^2}};$$

donc, en ajoutant la précédente,

$$\Omega = \arc \cos \sqrt{\frac{U^2 - 1}{2U^2}} + l\left(\sqrt{\frac{U^2 - 1}{2}} + \sqrt{\frac{U^2 + 1}{2}}\right).$$

Telle est l'équation cherchée.

(Mai 1842.)

ADDITION.

Sur la ligne de longueur donnée, qui renferme une aire maximum sur une surface.

Dans une Note sur le même sujet (*), M. Delaunay a donné une interprétation géométrique de l'équation différentielle qui représente la courbe dont il s'agit. En partant de cette équation, je suis arrivé à un théorème assez simple, différent du théorème de M. Delaunay, et dont la démonstration résulte des calculs suivants.

1. On sait que la ligne minimum entre deux points, sur une surface, est représentée par

$$(1) \qquad pd.\frac{dy}{ds} - qd.\frac{dx}{ds} = 0,$$

en adoptant les notations ordinaires.

Nommons L la fonction contenue dans le premier membre; nous aurons, en prenant x pour variable indépendante,

$$p(dsd^2y - dyd^2s) + qdxd^2s = \mathrm{L}ds^2,$$

ou

$$pd^2yds^2 + (qdx - pdy)dsd^2s = \mathrm{L}ds^3.$$

Or,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad dsd^2s = dyd^2y + dzd^2z;$$

ce qui change l'équation en

$$d^2y[(pdx + qdy)dx + pdz^2] + (qdx - pdy)dzd^2z = \mathrm{L}ds^3.$$

D'ailleurs $dz = pdx + qdy$; donc, en divisant les deux membres par dz, et remplaçant d^2z par $dpdx + dqdy + qd^2y$,

$$d^2y(1 + p^2 + q^2)dx + (qdx - pdy)(dpdx + dqdy) = \mathrm{L}\frac{ds^3}{dz};$$

(*) *Journal* de M. Liouville, tome VII, page 241.

ou enfin, en posant $dp = rdx + udy$, $dq = udx + tdy$,

$$(2)\quad \frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left(r+2u\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{dz}\mathrm{L}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

Ainsi, l'équation de la ligne minimum peut être mise sous la forme

$$(3)\quad \frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left(r+2u\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

D'après M. Delaunay, l'équation de la courbe de longueur donnée, qui renferme une aire maximum, est

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left(r+2u\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}\right)\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)\\&\qquad=\frac{1}{m}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3\sqrt{1+p^2+q^2}.\end{aligned}\right.$$

Or, les premiers membres des équations (3) et (4) sont identiques : cette circonstance indique une liaison nécessaire entre deux problèmes qui paraissaient différents.

2. La comparaison des équations (2) et (3) fait voir que l'équation (4) peut être écrite de cette manière:

$$(5)\quad \frac{pd.\frac{dy}{ds}-qd.\frac{dx}{ds}}{dz\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{1}{m}.$$

3. Pour interpréter cette formule, j'observe d'abord que si l'on trace un cercle sur un plan, et qu'ensuite on enroule le plan sur une surface développable quelconque, la circonférence se transformera en une courbe gauche jouissant de la propriété de maximum dont il s'agit. C'est-à-dire que si l'on remplace un arc de cette courbe par un arc de même longueur, l'aire limitée par le nouvel arc et par celui que l'on conserve dans la première courbe, sera moindre que l'aire limitée par celle-ci. Cela devient évident si l'on imagine le plan déroulé.

Par suite, lorsque la surface donnée est développable, l'équation (5) doit exprimer que la courbe dont il s'agit a pour transformée une circonférence de cercle.

4. Je dis actuellement que, la surface proposée étant quelconque, l'équation (5) exprime le théorème suivant :

Imaginez, sur une surface quelconque s, une courbe l de longueur donnée renfermant une aire maximum. Construisez une surface développable Σ *qui touche la surface s suivant la courbe l. Si vous développez la surface* Σ, *vous obtiendrez pour transformée de l, une circonférence* λ [*].

Le plan tangent au point x, y, z a pour équation

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

en représentant par x', y', z' les coordonnées courantes. Si nous différentions cette équation par rapport à x, y, z, p, q, nous obtiendrons une équation qui, réunie à la première, représentera l'intersection de deux plans tangents consécutifs ou une génératrice de la surface développable Σ. Cette seconde équation sera, à cause de $dz = pdx + qdy$,

$$0 = (x' - x)\,dp + (y' - y)\,dq.$$

D'ailleurs, les équations de la tangente à la courbe l sont

$$x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z).$$

Donc, en appelant θ l'angle des deux droites,

$$\cos\theta = \frac{dq\,dx - dp\,dy + (p\,dq - q\,dp)\,dz}{ds\sqrt{dp^2 + dq^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}}.$$

(*) M. Steiner est arrivé à ce théorème par des considérations purement géométriques. Voyez *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, tome VI, page 168.

On déduit de là (*Calcul différentiel* de Lacroix, tome Ier, page 647),

$$d\theta = -\frac{ds\,(dq\,d^2x - dp\,d^2y + dn\,d^2z) - d^2s\,(dq\,dx - dp\,dy + dn\,dz)}{ds\,\sqrt{(dp\,dx + dq\,dy)^2 + (dq\,dz - dn\,dx)^2 + (dp\,dz + dn\,dy)^2}},$$

en posant, pour abréger,

$$dn = pdq - qdp.$$

En simplifiant cette expression, à l'aide d'un calcul dont on peut voir le détail dans l'ouvrage cité, on trouve

$$d\theta = -\frac{(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + q(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + p(dy\,d^2z - dz\,d^2y)}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Le numérateur, multiplié par dz, devient

$$\begin{aligned}
&(pdx + qdy)\,(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + (ds^2 - dx^2 - dy^2)\,(qd^2x - pd^2y) \\
&+ (ds\,d^2s - dx\,d^2x - dy\,d^2y)\,(pdy - qdx) \\
&= ds\left[p\,(d^2s\,dy - ds\,d^2y) - q\,(d^2s\,dx - ds\,d^2x)\right] \\
&= -\,ds^3\left[pd.\frac{dy}{ds} - qd.\frac{dx}{ds}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$d\theta = \frac{ds}{dz}\,\frac{pd.\frac{dy}{ds} - qd.\frac{dx}{ds}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

A l'aide de cette transformation, l'équation (5) devient

$$(6) \qquad \frac{d\theta}{ds} = m.$$

Il est facile de voir que $d\theta$ est l'angle de contingence dans la transformée λ de la courbe l; donc $\frac{d\theta}{ds}$, ou m, représente le rayon de courbure de cette transformée; et comme m est une constante, λ est une circonférence.

5. Si, dans l'équation (5), on fait m infini, on retombe sur l'équation (1) de la ligne minimum; donc

Imaginez, sur une surface quelconque s, une courbe minimum l. Construisez une surface développable Σ qui touche la surface s suivant la courbe l. Si vous développez la surface Σ, vous obtiendrez, pour transformée de l, une ligne droite λ.

6. Cette même équation (5) n'est pas généralement intégrable. Cependant, nous allons voir que, dans le cas de l'héliçoïde, on peut l'intégrer une première fois.

Nous aurons d'abord, à cause de $p = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $q = \frac{x}{x^2+y^2}$, $dz = -\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$:

$$xd.\frac{dx}{ds} + yd.\frac{dy}{ds} = \frac{1}{m}(ydx - xdy)\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}}.$$

En employant des coordonnées polaires, comme dans le n° **28**, on transforme cette équation dans la suivante :

$$(7) \qquad (1+u^2)\frac{d^2u}{d\omega^2} - 2u\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 - u(1+u^2) + \frac{1}{m}\sqrt{u^2+1}\left[\left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 + 1 + u^2\right]^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Posons, comme précédemment, $u = \text{tang}\,v$; nous obtiendrons

$$\frac{d^2v}{d\omega^2} - \sin v \cos v + \frac{1}{m\cos^3 v}\left[\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 + \cos^2 v\right]^{\frac{3}{2}} = 0.$$

La quantité $\frac{d^2v}{d\omega^2} - \sin v \cos v$ est, à un facteur près, la différentielle de la quantité entre parenthèses; on peut donc mettre l'équation sous cette forme

$$\left[\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 + \cos^2 v\right]^{-\frac{3}{2}} d.\left[\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 + \cos^2 v\right] + \frac{2}{m}\frac{dv}{\cos^3 v} = 0;$$

d'où

$$-2\left[\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 + \cos^2 v\right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{m}\int\frac{dv}{\cos^3 v} = 0.$$

On a, d'ailleurs,

$$V = 2\int \frac{d\nu}{\cos^3\nu} = \log\left(c \cdot \frac{1+\sin\nu}{\cos\nu}\right) + \frac{\sin\nu}{\cos^2\nu},$$

c étant la constante.

Si l'on résout l'équation par rapport à $d\omega$, on obtient enfin

$$(8) \qquad d\omega = \frac{V\,d\nu}{\sqrt{4m^2 - V^2\cos^2\nu}}.$$

Le problème est ainsi ramené aux quadratures. On pourra d'ailleurs, si l'on se donne un point de la courbe et la direction de la tangente en ce point, déterminer les constantes c et m.

(Octobre 1843.)