

SUR LA COURBURE DES SURFACES.

Lettre adressée à M. Casorati

PAR

E. CATALAN

à LIÈGE.

Monsieur,

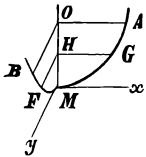
Je quittais Liège quand j'ai reçu le beau Mémoire que vous m'avez fait l'honneur et le plaisir de m'offrir. Cette circonstance de déplacement vous explique le retard de ma réponse. J'ai lu votre Mémoire avec le plus vif intérêt, et j'ai admiré la manière simple et élégante dont vous établissez votre jolie formule:

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right).$$

Atteint-elle le but que vous vous étiez proposé? Est-elle d'accord avec l'idée commune? Il me paraît que non. Voici l'un des motifs de mes doutes.

R_1 étant supposé positif, C ne change pas quand on y remplace R_2 par $-R_2$. En particulier, si l'on considère le *caténoïde* dans lequel $R_2 = -R_1$, puis la sphère dont le rayon serait R_1 , on a, pour ces deux surfaces, en deux points correspondants, $C = \frac{1}{R_1^2}$. Ainsi, le *caténoïde* et la *sphère* auraient même courbure. Cette conclusion est-elle d'accord avec l'idée commune? Je vous le demande.

Autrefois, je me suis occupé de cette question de la *courbure des surfaces*, question sur laquelle je n'ai rien publié. Depuis la lecture de votre Mémoire, mes *vieilles idées* sont revenues; et voici la solution (provisoire) qui en découle.



Coupons un ellipsoïde AMB ,¹ par un plan GHF , parallèle au plan tangent en M . Soient λ la distance de ces plans, et E l'aire de la calotte *ellipsoïdique*. D'autre part, considérons la sphère qui aurait O pour centre, et $OM = C$ pour rayon. Soit S l'aire de la calotte *sphérique*, correspondant à la calotte *ellipsoïdique*. Il me semble que l'on pourrait prendre, comme mesure de la courbure en M , la limite de $\frac{E}{S}$, répondant à $\lambda = 0$. Il est vrai que l'expression de E contient des intégrales elliptiques.² Mais, si l'on développe cette expression suivant les puissances de λ , et qu'ensuite on suppose $\lambda = 0$ (dans $\frac{E}{S}$), il est possible que le résultat soit simple. N'ayant ici aucun livre, je ne puis effectuer ce calcul. Je me contente de vous en indiquer le principe, me proposant d'y revenir, *peut-être* (je suis dans mon 77^{ième} printemps).

Agréé, Monsieur, l'assurance des sentiments de considération de Votre dévoué vieux collègue.

Spa (Belgique), 17 juin 1890.

¹ Ce sera l'ellipsoïde osculateur, si la surface donnée est convexe.

² Voir, dans le Journal de Liouville, mon *Mémoire sur l'aire de l'ellipsoïde*, etc.