

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1842.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

NOTE

SUR UNE FORMULE DE COMBINAISONS;

PAR E. CATALAN.

Ayant remarqué, dans l'un des derniers numéros de ce Journal (page 169), l'énoncé d'un intéressant problème de probabilités, je cherchai à comprendre les calculs de l'auteur, et à refaire ces calculs. Mais je m'aperçus bientôt qu'il s'y est glissé des erreurs, lesquelles, en s'accumulant, rendent fausse la formule principale. Comme il ne m'a pas été possible de saisir parfaitement la marche suivie par l'auteur, j'ai cherché à remplacer sa formule par une autre [*].

Rappelons d'abord deux formules fréquemment employées dans la théorie des combinaisons.

1. En représentant par $C_{m,p}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises p à p , la formule du binôme donne

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots + C_{m,i}x^i + \dots,$$

$$(1+x)^{m'} = 1 + \frac{m'}{1}x + \frac{m'(m'-1)}{1.2}x^2 + \dots + C_{m',i'}x^{i'} + \dots$$

Si l'on multiplie les deux développements, et que l'on ordonne le résultat par rapport à x , le terme contenant x^p , dans $(1+x)^{m+m'}$, sera égal à la somme des produits deux à deux des termes tels que $C_{m,i}x^i$, $C_{m',i'}x^{i'}$, dans lesquels la somme $i+i'$ des exposants est égale à p . Donc

$$C_{m+m',p} = \sum C_{m,i} \times C_{m',i'}$$

[*] Ma Note a été lue à la Société Philomatique au mois de juillet dernier. Depuis, et sans qu'il ait eu connaissance de cette lecture, M. le capitaine Coste a rectifié les erreurs dont je parle ci-dessus.

01

$$(1) \quad C_{m+m',p} = \sum_0^p C_{m,i} \times C_{m',p-i}.$$

Cette formule suppose $p < m$, $p < m'$.

2. La formule du binôme donne aussi

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + C_{m+i-1,i} x^i + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{m'}} = 1 + \frac{m'}{1} x + \frac{m'(m'+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + C_{m'+i'-1,i'} x^{i'} + \dots$$

On aura donc, en faisant le produit, et en supposant $i+i' = p$,

$$2) \quad C_{m+m'+p-1,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{m'+p-i-1,m'-1}.$$

3. En prenant successivement $m' = 1, 2, 3, \dots$, on obtient, à l'aide de cette dernière formule, celles qui suivent :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{m+p,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1}, \\ C_{m+p+1,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+1,1}, \\ C_{m+p+2,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+2,2}, \\ C_{m+p+3,p} = \sum_0^p C_{m+i-1,m-1} \times C_{p-i+3,3}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

4. Proposons-nous actuellement de transformer la quantité

$$A = C_{m,m-p} \times C_{m'-1,p'} + C_{m-1,m-p} \times C_{m'+2,p'} + \dots + C_{m-p,m-p} \times C_{m'+p+1,p'}.$$

ou

$$4) \quad A = \sum_0^p C_{m-i,m-p} \times C_{m'+i+1,p'}.$$

Pour comprendre le but de la transformation cherchée, il faut supposer que m , m' et p soient de grands nombres, et que p' soit un petit nombre. Il est bien évident que le calcul numérique de A serait impraticable; or nous voulons remplacer cette quantité par une autre équivalente, mais composée de $p' + 1$ termes seulement.

Le premier membre, étant développé, devient

$$\begin{aligned} & \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ & + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ & + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 120 \cdot 330 + 84 \cdot 495 \\ & + 56 \cdot 715 + 35 \cdot 1001 + 20 \cdot 1365 + 10 \cdot 1820 + 4 \cdot 2380 + 3060 \\ & = 39600 + 41580 + 40040 + 35035 + 27300 + 18200 \\ & + 9520 + 3060 = 214\,335. \end{aligned}$$

Le second membre a pour valeur

$$\begin{aligned} & \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ & + 7 \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 210 \cdot 330 \\ & + 84 \cdot 792 + 28 \cdot 1716 + 7 \cdot 3432 + 6435 = 69300 + 66528 \\ & + 48048 + 24024 + 6435 = 214335 [*]. \end{aligned}$$

7. La formule (6) démontre une propriété remarquable des puissances négatives entières d'un binôme $(1-x)$.

Remplaçons $m-p+1$ par q , et $m'-p'+1$ par q' . Cette formule pourra d'abord être mise sous la forme

$$\sum_0^p C_{p+q-1+i, p-i} \times C_{p'+q'+i, q'+i} = \sum_0^{p'} C_{p'+q'-1-i, p'-i} \times C_{p+q+i, q+i}.$$

[*] La formule citée au commencement de cette Note donnerait, au lieu du second membre que nous venons de calculer, la quantité

$$\begin{aligned} & \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left[\frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{12 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{12 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 8 + \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \right] \\ & = 330 \left[330 + 288 + \frac{936}{5} + \frac{416}{5} + \frac{39}{2} \right] = 330 \cdot 618 + 66 \cdot 1352 + 165 \cdot 39 \\ & = 103\,940 + 89232 + 6435 = 199607. \end{aligned}$$

Posons ensuite

$$\frac{1}{(1-x)^q} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{p'+1}} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{q'} x^{q'} + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{q'}} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{p'} x^{p'} + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{p'+1}} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_q x^2 + \dots$$

Nous aurons, au moyen de l'équation ci-dessus,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} a_p b_{q'} + a_{p-1} b_{q'+1} + \dots + a_1 b_{p+q'-1} + b_{p+q'} &= c_{p'} d_q + c_{p'-1} d_{q+1} + \dots \\ &+ c_1 d_{p'+q-1} + d_{p'+q}. \end{aligned} \right.$$

Cette équation exprime la propriété annoncée.

8. Afin d'arriver à un résultat symétrique, nous avons transformé le facteur $C_{m'+i+1, p'}$ de la formule (4). Or, comme ce facteur peut, de différentes manières, être égalé à une somme de produits, la formule (6) peut également être remplacée par d'autres formules que nous n'indiquerons pas ici, parce qu'elles sont plus compliquées que cette dernière.