Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

THÉORÈME

SUR LA RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR E. CATALAN.

La formule suivante

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(m\cos\theta + n\sin\theta\sin\omega + p\sin\theta\cos\omega)\sin\theta d\theta d\omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} \varphi\left(\alpha\sqrt{m^2+n^2+p^2}\right)d\alpha,$$

que l'on doit à M. Poisson [*], est comprise comme cas particulier dans une autre formule que je vais démontrer, et où l'intégrale double se trouve remplacée par une intégrale multiple.

Soit l'intégrale d'ordre $n-1$,

$$(1)\quad A = \int\int\ldots dx_1.dx_2\ldots dx_{n-1}.\varphi(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n)\sqrt{1+\left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)^2},$$

dans laquelle les variables reçoivent toutes les valeurs, positives ou négatives, propres à vérifier l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

et dans laquelle aussi, par conséquent, les variables indépendantes satisfont à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \overset{=}{<} 1.$$

Cette intégrale revient évidemment à

$$(2)\quad A = \int\int\ldots \frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{x_n}\varphi(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n).$$

[*] *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III, page 126

Pour la réduire, je prends les formules de transformation suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} x_1 = a_1u_1 + b_1u_2 + \ldots + l_1u_n, \\ x_2 = a_2u_1 + b_2u_2 + \ldots + l_2u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_nu_1 + b_nu_2 + \ldots + l_nu_n : \end{cases}$$

dans ces équations, les coefficients de u_1 sont

$$a_1 = \frac{m_1}{\Delta},\quad a_2 = \frac{m_2}{\Delta},\ \ldots\ldots,\quad a_n = \frac{m_n}{\Delta},$$

en supposant

$$\Delta^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2;$$

les autres coefficients satisfont aux conditions

$$(4)\quad \begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1, \ \ldots\ l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0, \ \ldots\ a_1l_1 + a_2l_2 + \ldots + a_nl_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots + k_nl_n = 0. \end{cases}$$

Le nombre des coefficients a_1, b_1, etc., dans les formules (3), est $n^2 - n$. Les équations de condition sont en nombre $(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. On pourra donc prendre arbitrairement $n^2 - n - \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, ou $\frac{n(n-3)}{2}$ coefficients.

En ajoutant les carrés des équations (3), et ayant égard aux relations (4), on trouve

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2;$$

donc

$$(5)\qquad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 1.$$

Les formules (3) et (4) donnent aussi

$$(6)\qquad m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = u_1\Delta;$$

donc, au moyen de la transformation de variables qui vient d'être indiquée, la fonction $\varphi(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)$ devient simplement

$$\varphi(u_1 \Delta).$$

Il nous reste actuellement à transformer la quantité $dx_1 \ldots dx_{n-1}$. Or, M. Jacobi a démontré depuis long-temps [*] que le système de variables employé ci-dessus donne cette relation très simple :

$$\frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{x_n} = \frac{du_1 . du_2 \ldots du_{n-1}}{u_n}.$$

En substituant dans la formule (2), on trouve

$$(7) \qquad \mathrm{A} = \int\int \ldots \frac{du_1 . du_2 \ldots du_{n-1}}{u_n} \varphi(u_1 \Delta).$$

Dans cette nouvelle intégrale, les variables doivent recevoir toutes les valeurs réelles satisfaisant à l'équation (5).

Actuellement, remplaçons u_n par sa valeur, et donnons à u_1 une valeur déterminée; nous aurons à évaluer

$$(8) \qquad \mathrm{B} = \int\int \ldots \frac{du_2 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \ldots - u_{n-1}^2}},$$

les limites étant données par

$$u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \overset{=}{<} 1 - u_1^2.$$

On sait [**] que cette intégrale d'ordre $n - 2$, a pour expression

$$(9) \qquad \mathrm{B} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}};$$

---

[*] Journal de M. Crelle, tome XII, page 40. — M. Sturm m'a fait voir que l'on peut arriver facilement à cette relation, en effectuant le changement de variables *successivement*, au lieu de l'opérer en une seule fois.

[**] *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples*, tome IV de ce Journal, page 336.

donc, en substituant dans la formule (7), et doublant le résultat à cause du radical, on obtiendra

$$(10) \qquad A = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \varphi\,(u_1 \Delta)\, du_1\, (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Enfin, en égalant les valeurs (2) et (10), on a ce théorème :

$$(11) \int\!\!\int \ldots \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}} \varphi(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n) = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \varphi(u \Delta)\, du (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Si l'on pose $u = \cos\theta$, on obtient, au lieu de la formule (10),

$$(12) \qquad A = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \varphi\,(\Delta \cos\theta) \sin^{n-2}\theta\, d\theta.$$

Lorsque $n = 3$, la formule (11) coïncide avec celle de M. Poisson.

(Juin 1840.)