

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1841.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

THÉORÈME

SUR LA RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR E. CATALAN.

La formule suivante

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(m \cos \theta + n \sin \theta \sin \omega + p \sin \theta \cos \omega) \sin \theta d\theta d\omega = 2\pi \int_{-1}^{+1} \varphi(x \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}) dx,$$

que l'on doit à M. Poisson [*], est comprise comme cas particulier dans une autre formule que je vais démontrer, et où l'intégrale double se trouve remplacée par une intégrale multiple.

Soit l'intégrale d'ordre $n - 1$,

$$(1) \quad A = \iint \dots dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \varphi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) \sqrt{1 + \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)^2}$$

dans laquelle les variables reçoivent toutes les valeurs positives ou négatives, propres à vérifier l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1,$$

et dans laquelle aussi, par conséquent, les variables indépendantes satisfont à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1.$$

Cette intégrale revient évidemment à

$$(2) \quad A = \iint \dots \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{x_n} \varphi(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n).$$

[*] *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III, page 126

Pour la réduire, je prends les formules de transformation suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 u_1 + b_1 u_2 + \dots + l_1 u_n, \\ x_2 = a_2 u_1 + b_2 u_2 + \dots + l_2 u_n, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ x_n = a_n u_1 + b_n u_2 + \dots + l_n u_n. \end{cases}$$

dans ces équations, les coefficients de u_1 sont

$$a_1 = \frac{m_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{m_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{m_n}{\Delta},$$

en supposant

$$\Delta^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2;$$

les autres coefficients satisfont aux conditions

$$(4) \quad \begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1, \dots, l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2 = 1, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0, \dots, a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n = 0, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n = 0. \end{cases}$$

Le nombre des coefficients a_1, b_1, \dots , dans les formules (3), est $n^2 - n$. Les équations de condition sont en nombre $(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. On pourra donc prendre arbitrairement $n^2 - n - \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, ou $\frac{n(n-3)}{2}$ coefficients.

En ajoutant les carrés des équations (3), et ayant égard aux relations (4), on trouve

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2;$$

donc

$$(5) \quad u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1.$$

Les formules (3) et (4) donnent aussi

$$(6) \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = u_1 \Delta;$$

donc, au moyen de la transformation de variables qui vient d'être indiquée, la fonction $\varphi(m_1x_1 + \dots + m_nx_n)$ devient simplement

$$\varphi(u, \Delta).$$

Il nous reste actuellement à transformer la quantité $dx_1 \dots dx_{n-1}$. Or, M. Jacobi a démontré depuis long-temps [*] que le système de variables employé ci-dessus donne cette relation très simple :

$$\frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{x_n} = \frac{du_1 \dots du_{n-1}}{u_n}.$$

En substituant dans la formule (2), on trouve

$$(7) \quad A = \int \int \dots \frac{du_1 \dots du_{n-1}}{u_n} \varphi(u, \Delta).$$

Dans cette nouvelle intégrale, les variables doivent recevoir toutes les valeurs réelles satisfaisant à l'équation (5).

Actuellement, remplaçons u_n par sa valeur, et donnons à u_1 une valeur déterminée; nous aurons à évaluer

$$(8) \quad B = \int \int \dots \frac{du_2 \dots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{n-1}^2}},$$

les limites étant données par

$$u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{n-1}^2 \leq 1 - u_1^2.$$

On sait [**] que cette intégrale d'ordre $n - 2$, a pour expression

$$(9) \quad B = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}};$$

[*] Journal de M. Crelle, tome XII, page 40. — M. Sturm m'a fait voir que l'on peut arriver facilement à cette relation, en effectuant le changement de variables *successivement*, au lieu de l'opérer en une seule fois.

[**] *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples*, tome IV de ce Journal, page 336.

donc, en substituant dans la formule (7), et doublant le résultat à cause du radical, on obtiendra

$$(10) \quad A = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \varphi(u, \Delta) du, (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Enfin, en égalant les valeurs (2) et (10), on a ce théorème :

$$(11) \quad \int \int \dots \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}} \varphi(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n) = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \varphi(u, \Delta) du (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Si l'on pose $u = \cos \theta$, on obtient, au lieu de la formule (10),

$$(12) \quad A = 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi \varphi(\Delta \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta.$$

Lorsque $n = 3$, la formule (11) coïncide avec celle de M. Poisson.

(Juin 1840.)