

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1839.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

PAR E. CATALAN. (*).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de $n + 1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

Parmi ces décompositions, il y en a qui renferment le triangle ABC : leur nombre est P_n .

Il y en a qui renferment le triangle BCD : elles sont toutes distinctes des précédentes, et leur nombre est pareillement P_n .

A ces deux groupes, nous devons ajouter :

1°. Les décompositions du polygone de n côtés CEF...ZABC, dans lesquelles n'entre pas le triangle ABC; je désigne leur nombre par $P_{n,1}$;

2°. Les décompositions de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent pas les deux triangles consécutifs ABC, BCD; je désigne leur nombre par $P_{n,2}$;

3°. Les décompositions de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent pas les trois triangles consécutifs ABC, BCD, CDE; leur nombre est $P_{n,3}$;

.....
 (n - 2)°. Enfin, les décompositions du polygone de n côtés ZBCD...XYZ, dans lesquelles n'entrent pas les $n - 2$ triangles consécutifs BCD, CDE,.... XYZ : leur nombre est $P_{n,n-2}$.

En réunissant ces décompositions, nous obtiendrons toutes celles

(*) Cette solution est trouvée depuis le mois de novembre dernier. Comme on en a de plus simples, je ne me serais pas décidé à la publier, si, par une coïncidence assez remarquable, M. BINET n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

du polygone proposé, sans qu'il y en ait d'omises ou de répétées; donc

$$P_{n+1} = P_n + P_n + P_{n,1} + P_{n,2} + \dots + P_{n,n-2}. \quad (1)$$

Désignons actuellement par $P_{k,l}$ le nombre des décompositions d'un polygone de k côtés, $abcd\dots lmnopq\dots xyz$, dans lesquelles n'entrent pas l triangles consécutifs $abc, bcd, cde, \dots mnp$.

Il est facile de s'assurer que l'on obtiendra ces décompositions si l'on ajoute, à celles qui ne contiennent pas les $l+1$ triangles $abc, bcd, \dots mnp, npq$, toutes les décompositions du polygone de $k-1$ côtés $abcd\dots lmnq\dots xyz$, dans lesquelles n'entrent pas les $l-1$ triangles consécutifs $abc, bcd, \dots lmn$: on a donc

$$P_{k,l} = P_{k,l+1} + P_{k-1,l-1};$$

ou, en changeant l en $l-1$:

$$P_{k,l} = P_{k,l-1} - P_{k-1,l-2}. \quad (2)$$

Pour intégrer cette équation linéaire du second ordre, aux différences finies et partielles à trois variables, on pourrait employer les méthodes de Lagrange ou celles de Laplace (*); mais on parviendra plus facilement au résultat, de la manière suivante.

Changeons l en $l-1, l-2, \dots 4, 3, 2$, et ajoutons les équations résultantes; nous obtiendrons

$$P_{k,l} = P_{k,l} - [P_{k-1,l-2} + P_{k-1,l-3} + \dots + P_{k-1,1} + P_{k-1,0}]. \quad (3)$$

Si, dans cette nouvelle équation, on suppose successivement $l=1, l=2, l=3, \dots$ et si l'on observe avec un peu d'attention les résultats, on trouve qu'ils peuvent se mettre sous cette forme,

$$\begin{aligned} P_{k,1} &= P_{k,1}, \\ P_{k,2} &= [P_{k,1}] - [P_{k-1,0}], \\ P_{k,3} &= [P_{k,1} - P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0}], \\ P_{k,4} &= [P_{k,1} - 2P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0} - P_{k-2,0}], \end{aligned}$$

(*) Lagrange, *Mémoires de Berlin*, année 1775, page 183; Laplace, *Académie des Sciences, Savants étrangers*, tome VII, année 1773.

$$\begin{aligned} P_{k,5} &= [P_{k,1} - 3P_{k-1,1} + P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 2P_{k-2,0}], \\ P_{k,6} &= [P_{k,1} - 4P_{k-1,1} + 3P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 3P_{k-2,0} + P_{k-3,0}], \\ P_{k,7} &= [P_{k,1} - 5P_{k-1,1} + 6P_{k-2,1} - 3P_{k-3,1}] - [P_{k-1,0} - 4P_{k-2,0} + 3P_{k-3,0}], \text{ etc.} \end{aligned}$$

Et en général :

1°. Si l est pair, et $= 2i$:

$$P_{k,l} = \left\{ \begin{aligned} & \left[P_{k,1} - \frac{2i-2}{1} P_{k-1,1} + \frac{2i-3}{1} \frac{2i-4}{2} P_{k-2,1} - \dots \pm \frac{i}{1} P_{k-i+1,1} \right] \\ & - \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-3}{1} P_{k-2,0} + \frac{2i-4}{1} \frac{2i-5}{2} P_{k-3,0} - \dots \pm P_{k-i,0} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2°. Si l est impair, et $= 2i + 1$:

$$P_{k,l} = \left\{ \begin{aligned} & \left[P_{k,1} - \frac{2i-1}{1} P_{k-1,1} + \frac{2i-2}{1} \frac{2i-3}{2} P_{k-2,1} - \dots \mp P_{k-i,1} \right] \\ & - \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-2}{1} P_{k-2,0} + \frac{2i-3}{1} \frac{2i-4}{2} P_{k-3,0} - \dots \pm i P_{k-i,0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

On vérifie aisément que ces valeurs de $P_{k,l}$ satisfont, suivant que l est pair ou impair, à l'équation (2). D'ailleurs, elles contiennent deux fonctions arbitraires : elles sont donc bien, l'une ou l'autre, l'intégrale générale de cette équation.

Dans le problème dont il s'agit, on a $P_{k,0} = P_k$: en effet, si dans le polygone de k côtés, nous n'omettons aucun triangle, nous devons trouver toutes les décompositions. En même temps, si l'on ajoute aux décompositions qui contiennent le triangle abc , celles qui ne le contiennent pas, on les obtiendra toutes; ainsi $P_{k-1} + P_{k,1} = P_k$, ou

$$P_{k,1} = P_k - P_{k-1}. \quad (6)$$

Remplaçant donc, dans les équations (4) et (5), $P_{k,0}$ par P_k , et $P_{k,1}$ par sa valeur, il viendra, en confondant en une seule les deux formules,

$$P_{k,l} = P_k - \frac{l}{1} P_{k-1} + \frac{l-1}{1} \frac{l-2}{2} P_{k-2} - \dots \quad (7)$$

Le second membre s'arrête de lui-même.

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \dots = 0. \quad (8)$$

Si $n = 2i$, le second membre se termine par $\mp \frac{i+1}{1} P_{i+1}$; et si $n = 2i + 1$, par $\pm P_{i+1}$. On voit que cette équation se déduit de la précédente, en y faisant $k = n + 1$ et $l = n$.

En rapprochant le mode de décomposition qui vient d'être employé, de celui qui avait été donné d'abord par *Ségner*, et de la formule trouvée probablement par *Euler*, on arrive à cette conséquence remarquable, savoir que les trois équations,

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \dots = 0, \quad (A)$$

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_3P_{n-1} + P_n, \quad (B)$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n, \quad (C)$$

donneront pour P_{n+1} la même valeur numérique, pourvu que l'on suppose dans les deux dernières, $P_3 = 1$, et dans la première, $P_3 = 1$ et $P_4 = 2$.