Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

Par E. CATALAN. (*).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

Parmi ces décompositions, il y en a qui renferment le triangle ABC : leur nombre est P_n.

Il y en a qui renferment le triangle BCD : elles sont toutes distinctes des précédentes, et leur nombre est pareillement P_n.

A ces deux groupes, nous devons ajouter :

1°. Les décompositions du polygone de n côtés CEF...ZABC, dans lesquelles n'entre pas le triangle ABC; je désigne leur nombre par $P_{n,1}$;

2°. Les décompositions de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent pas *les deux triangles consécutifs* ABC, BCD; je désigne leur nombre par $P_{n,2}$;

3°. Les décompositions de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent pas *les trois triangles consécutifs* ABC, BCD, CDE; leur nombre est $P_{n,3}$;

. . . .

$(n-2)$°. Enfin, les décompositions du polygone de n côtés ZBCD...XYZ, dans lesquelles n'entrent pas *les $n-2$ triangles consécutifs* BCD, CDE,.... XYZ : leur nombre est $P_{n,n-2}$.

En réunissant ces décompositions, nous obtiendrons toutes celles

(*) Cette solution est trouvée depuis le mois de novembre dernier. Comme on en a de plus simples, je ne me serais pas décidé à la publier, si, par une coïncidence assez remarquable, M. Binet n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

du polygone proposé, sans qu'il y en ait d'*omises* ou de *répétées;* donc

$$P_{n+1} = P_n + P_n + P_{n,1} + P_{n,2} + \ldots + P_{n,n-2}. \quad (1)$$

Désignons actuellement par $P_{k,l}$ le nombre des décompositions d'un polygone de k côtés, *abcd...lmnpq...xyz*, dans lesquelles n'entrent pas l triangles consécutifs *abc*, *bcd*, *cde*,... *mnp*.

Il est facile de s'assurer que l'on obtiendra ces décompositions si l'on ajoute, à celles qui ne contiennent pas les $l+1$ triangles *abc*, *bcd*,... *mnp*, *npq*, toutes les décompositions du polygone de $k-1$ côtés *abcd...lmnq...xyz*, dans lesquelles n'entrent pas les $l-1$ triangles consécutifs *abc*, *bcd*,... *lmn* : on a donc

$$P_{k,l} = P_{k,l+1} + P_{k-1,l-1};$$

ou, en changeant l en $l-1$:

$$P_{k,l} = P_{k,l-1} - P_{k-1,l-2}. \quad (2)$$

Pour intégrer cette équation linéaire du second ordre, aux différences finies et partielles à trois variables, on pourrait employer les méthodes de Lagrange ou celles de Laplace (*); mais on parviendra plus facilement au résultat, de la manière suivante.

Changeons l en $l-1$, $l-2$,... 4, 3, 2, et ajoutons les équations résultantes; nous obtiendrons

$$P_{k,l} = P_{k,1} - [P_{k-1,l-2} + P_{k-1,l-3} + \ldots + P_{k-1,1} + P_{k-1,0}]. \quad (3)$$

Si, dans cette nouvelle équation, on suppose successivement $l=1$, $l=2$, $l=3$,.... et si l'on observe avec un peu d'attention les résultats, on trouve qu'ils peuvent se mettre sous cette forme,

$$\begin{aligned}
P_{k,1} &= P_{k,1}, \\
P_{k,2} &= [P_{k,1}] - [P_{k-1,0}], \\
P_{k,3} &= [P_{k,1} - P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0}], \\
P_{k,4} &= [P_{k,1} - 2P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0} - P_{k-2,0}],
\end{aligned}$$

(*) Lagrange, *Mémoires de Berlin*, année 1775, page 183; Laplace, *Académie des Sciences, Savants étrangers*, tome VII, année 1773.

$$P_{k,5} = [P_{k,1} - 3P_{k-1,1} + P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 2P_{k-2,0}],$$
$$P_{k,6} = [P_{k,1} - 4P_{k-1,1} + 3P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 3P_{k-2,0} + P_{k-3,0}],$$
$$P_{k,7} = [P_{k,1} - 5P_{k-1,1} + 6P_{k-2,1} - 3P_{k-3,1}] - [P_{k-1,0} - 4P_{k-2,0} + 3P_{k-3,0}], \text{ etc.}$$

Et en général :

1°. Si l est pair, et $= 2i$:

$$\left.\begin{aligned} P_{k,l} = & \left[P_k - \frac{2i-2}{1} P_{k-1,1} + \frac{2i-3}{1}\,\frac{2i-4}{2} P_{k-2,1} - \ldots \pm \frac{i}{1} P_{k-i+1,1}\right] \\ & - \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-3}{1} P_{k-2,0} + \frac{2i-4}{1}\,\frac{2i-5}{2} P_{k-3,0} - \ldots \pm P_{k-i,0}\right]; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

2°. Si l est impair, et $= 2i + 1$:

$$\left.\begin{aligned} P_{k,l} = & \left[P_{k,1} - \frac{2i-1}{1} P_{k-1,1} + \frac{2i-2}{1}\,\frac{2i-3}{2} P_{k-2,1} - \ldots \mp P_{k-i,1}\right] \\ & - \left[P_{k-1,0} - \frac{2i-2}{1} P_{k-2,0} + \frac{2i-3}{1}\,\frac{2i-4}{2} P_{k-3,0} - \ldots \pm i P_{k-i,0}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On vérifie aisément que ces valeurs de $P_{k,l}$ satisfont, suivant que l est pair ou impair, à l'équation (2). D'ailleurs, elles contiennent deux fonctions arbitraires : elles sont donc bien, l'une ou l'autre, l'intégrale générale de cette équation.

Dans le problème dont il s'agit, on a $P_{k,0} = P_k$: en effet, si dans le polygone de k côtés, nous n'omettons aucun triangle, nous devons trouver toutes les décompositions. En même temps, si l'on ajoute aux décompositions qui contiennent le triangle abc, celles qui ne le contiennent pas, on les obtiendra toutes ; ainsi $P_{k-1} + P_{k,1} = P_k$, ou

$$P_{k,1} = P_k - P_{k-1}. \qquad (6)$$

Remplaçant donc, dans les équations (4) et (5), $P_{k,0}$ par P_k, et $P_{k,1}$ par sa valeur, il viendra, en confondant en une seule les deux formules,

$$P_{k,l} = P_k - \frac{l}{1} P_{k-1} + \frac{l-1}{1}\,\frac{l-2}{2} P_{k-2} - \ldots \qquad (7)$$

Le second membre s'arrête de lui-même.

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$P_{n+1} - \frac{n}{1}P_n + \frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}P_{n-1} - \ldots = 0. \qquad (8)$$

Si $n=2i$, le second membre se termine par $\mp\frac{i+1}{1}P_{i+1}$; et si $n=2i+1$, par $\pm P_{i+1}$. On voit que cette équation se déduit de la précédente, en y faisant $k=n+1$ et $l=n$.

En rapprochant le mode de décomposition qui vient d'être employé, de celui qui avait été donné d'abord par *Ségner*, et de la formule trouvée probablement par *Euler*, on arrive à cette conséquence remarquable, savoir que les trois équations,

$$P_{n+1} - \frac{n}{1}P_n + \frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}P_{n-1} - \ldots = 0, \qquad (A)$$

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_3P_{n-1} + P_n, \qquad (B)$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n}P_n, \qquad (C)$$

donneront pour P_{n+1} la même valeur numérique, pourvu que l'on suppose dans les deux dernières, $P_3=1$, et dans la première, $P_3=1$ et $P_4=2$.