Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

ou bien

$$30:01:13 = 2^{n-1}1^{1}[\dot{2}, 3, 0] : 2^{n-1}3[\dot{2}, 0, 1] : 2^{n-1}0[\dot{2}, 1, 3].$$

» En substituant dans l'équation identique

$$\frac{30}{23} \cdot \frac{13}{30} \cdot \frac{23}{31} = 1$$

les valeurs des quantités $30:23$, $13:30$, $23:31$, tirées des équations (13), (14), (15), on trouvera la relation

$$\begin{aligned} & 1^{n-1}2\,[\dot{1}, 3, 0]\; 2^{n-1}0\,[\dot{2}, 1, 3]\; 0^{n-1}1\,[0, 2, 3] \\ = {} & 1^{n-1}0\,[\dot{1}, 2, 3]\; 2^{n-1}1\,[\dot{2}, 3, 0]\; 0^{n-1}2\,[\dot{0}, 3, 1], \end{aligned}$$

d'où, en se servant de la condition (12), on tire enfin l'équation

$$(16) \qquad [\dot{0}, 2, 3]\,[1, 3, 0]\,[\dot{2}, 1, 3] = [\dot{0}, 3, 1]\,[\dot{1}, 2, 3]\,[\dot{2}, 3, 0],$$

qui exprime la condition pour qu'il soit possible de faire passer par quatre points P, P_1, P_2, P_3 une surface quadrique tangente à la surface U en ces quatre points, et en même temps osculatrice en trois de ces points.

» Les conditions pour un plus grand nombre de points ne présentent aucune difficulté. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur les surfaces orthogonales ;* par **M. E. Catalan** (*).

« I. Problème. — *Déterminer toutes les surfaces* Σ *qui coupent orthogonalement les surfaces* S *représentées par*

$$(1) \qquad F(x, y, z) = c.$$

» Cherchons d'abord les trajectoires orthogonales des surfaces S. Soit $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ la différentielle de $F(x, y, z)$. Les équations différentielles du problème sont

$$(2) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Les surfaces S, se succédant d'une manière continue, admettent une in-

(*) La méthode suivante est tirée, en partie, d'un petit Mémoire intitulé : *Recherche des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante* (*Académie de Belgique, Mémoires des Savants étrangers*, t. XXXII, 15 décembre 1863).

finité de trajectoires orthogonales; donc *les équations simultanées* (2) *sont toujours intégrables*. Si

$$(3) \qquad f(x, y, z) = \alpha, \quad f_1(x, y, z) = \beta$$

en sont les intégrales, celles-ci représentent toutes les trajectoires cherchées, et l'équation

$$(4) \qquad f(x, y, z) = \varphi[f_1(x, y, z)]$$

représente toutes les surfaces Σ, φ étant une fonction arbitraire (*).

» II. PROBLÈME. — 1° *Reconnaître si les surfaces* S, *représentées par l'équation* (1), *appartiennent à un système orthogonal triple;* 2° *trouver, si elles existent, les surfaces* Σ_1, Σ_2 *qui, avec les surfaces* S, *constituent ce système.*

Attribuons à la fonction φ deux formes particulières, ψ et π : si les surfaces correspondantes sont orthogonales, le problème sera résolu. La condition d'*orthogonalité* est

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 - \left(\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz}\right)(\psi' + \pi') \\ &\qquad + \left[\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2\right]\psi'\pi' = 0. \end{aligned} \right.$$

» Dans cette équation,

$$\psi' = \psi'[f_1(x, y, z)] = \psi'(\beta), \qquad \pi' = \pi'[f_1(x, y, z)] = \pi'(\beta).$$

» En chaque point des lignes de courbure de S, déterminées par les surfaces Σ, on a

$$f(x, y, z) = \psi(\beta), \quad f_1(x, y, z) = \beta.$$

« Si donc, entre les équations (3) et (5), on élimine deux des trois va-
» riables x, y, z, l'équation résultante devra être *identique*. En exprimant
» les conditions nécessaires pour que la troisième variable disparaisse
» ainsi en même temps que les deux autres, on obtiendra deux équations
» différentielles entre ψ, π et β (**). »

III. PROBLÈME. — *Quelles doivent être la forme d'une fonction* F (a, b, x) *et les valeurs des paramètres* a, b, *pour que l'on ait identiquement*

$$F(a, b, x) = 0 \text{ (***)?}$$

(*) De là résulte que *si*, comme on l'a supposé, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ *est intégrable*, l'intégration de l'équation $Pp + Qq = R$ équivaut à la solution du problème proposé.

(**) Mémoire cité. J'ai conclu de cette méthode divers systèmes orthogonaux.

(***) Si l'on remplace a, b, x par x, y, z, le problème peut être énoncé ainsi : *Trouver l'équation des surfaces qui contiennent des droites parallèles à l'axe* Oz.

» 1° La fonction F, nulle quelles que soient les valeurs attribuées à x, doit, en particulier, être nulle pour $x = 0$. Ainsi déjà les paramètres satisfont à la condition

$$F(a, b, 0) = 0.$$

» 2° Soit $y = F(a, b, x) - F(a, b, 0)$. Cette fonction y, *identiquement nulle* pour $x = 0$, doit être toujours nulle, c'est-à-dire *constante*. Comme le premier terme est variable et le second terme constant, la condition imposée est absurde, à moins que y ait la forme $\varphi(a, b)X$, X s'annulant avec x (*), et que les paramètres vérifient l'équation $\varphi(a, b) = 0$.

» 3° De $F(a, b, x) - F(a, b, 0) = \varphi(a, b)X$, on conclut que

$$F(a, b, x) = A + \lambda X,$$

les quantités A, λ *étant indépendantes de* x, *et la fonction* X *s'annulant avec* x.

» En outre, les valeurs des paramètres sont données par les équations

$$A = 0, \quad \lambda = 0.$$

» IV. Reprenons maintenant les équations (3) et (4). Supposons, comme précédemment, que les valeurs de x, y, tirées des deux premières, soient substituées dans la troisième. *Si le système orthogonal existe, on devra pouvoir disposer des fonctions* ψ, π, *de manière à faire disparaître* z. D'après le dernier paragraphe, le résultat de la substitution a la forme $A + \lambda Z$. Et comme les quantités $\psi' + \pi'$, $\psi'\pi'$ sont indépendantes de z, on a, séparément,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = A + \lambda Z, \quad \frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz} = B + \mu Z, \\ &\qquad\qquad \left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2 = C + \nu Z. \end{aligned}\right.$$

» Nous croyons donc pouvoir énoncer ce théorème :

» *Soient* $f(x, y, z) = \alpha$, $f_1(x, y, z) = \beta$ *les équations d'une infinité de lignes, trajectoires orthogonales des surfaces* S *représentées par* $F(x, y, z) = c$. *Pour que ces surfaces puissent faire partie d'un système orthogonal triple, les dérivées partielles* $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \ldots$ *doivent, après l'élimination de* x, y, *satisfaire aux équations* (6), A, B, C, λ, μ, ν *étant indépendantes de* z, *et* Z *s'annulant avec* z (**).

La fonction X peut contenir a et b.

Quand l'équation donnée a la forme $X + Y + Z = c$, considérée autrefois par

» V. Au moyen des valeurs (6), l'équation (5) devient

$$(A+\lambda Z)-(B+\mu Z)(\psi'+\pi')+(C+\nu Z)\psi'\pi'=0.$$

» Cette *équation de condition,* devant avoir lieu quel que soit z, se décompose en

$$A-B(\psi'+\pi')+C\psi'\pi'=0, \quad \lambda-\mu(\psi'+\pi')+\nu\psi'\pi'=0.$$

Par conséquent, ψ' et π' *sont les deux valeurs de* $\frac{d\alpha}{d\beta}$, *satisfaisant à l'équation*

$$(7) \qquad (B\nu-C\mu)\,d\alpha^2+(C\lambda-A\nu)\,d\alpha\,d\beta+(A\mu-B\lambda)\,d\beta^2=0,$$

du premier ordre et du second degré. Une équation du premier ordre ayant toujours une intégrale, il s'ensuit que : *si les conditions* (6) *sont remplies, il existe deux séries de surfaces* Σ_1, Σ_2 *formant, avec la surface* S, *un système triplement orthogonal. Les conditions* (6), *nécessaires, sont donc suffisantes* (*).

» VI. *Application :*

$$(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})=c\sin z.$$

» Les équations des trajectoires sont, comme on le trouve aisément,

$$(3) \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{\cos z}=\alpha, \quad \frac{e^y-e^{-y}}{\cos z}=\beta.$$

Il en résulte

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2=(4+\alpha^2)(1+\tang^2 z)=A+\lambda Z,$$

$$\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dz}=\alpha\beta\tang^2 z=B+\mu Z,$$

$$\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dz}\right)^2=(4+\beta^2)(1+\tang^2 z)=C+\nu Z;$$

$$A=4+\alpha^2, \quad B=0, \quad C=4+\beta^2, \quad \lambda=4+\alpha^2, \quad \mu=\alpha\beta, \quad \nu=\beta^2+4.$$

M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII), les relations (6) conduisent assez rapidement aux conditions

$$X'X'''=2(X''-a)(X''-b), \quad Y'Y'''=2(Y''-a)(Y''-b), \quad Z'Z'''-2(Z''-a)(Z''-b),$$

trouvées par M. Serret.

(*) Depuis le mois d'août 1872, je suis en possession de ces résultats. Aujourd'hui, de même qu'à cette époque, ils me semblent presque paradoxaux, et je n'ose encore dire, comme un illustre astronome : « Je croyais rêver et faire quelque pétition de principe; mais c'est une chose très-certaine et très-exacte. »

» L'équation (7) est $\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}} = \pm \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2+4}}$: elle a pour intégrale

$$\alpha^2 + \beta^2 \pm g\alpha\beta + 4 - g^2 = 0.$$

Par conséquent, les équations des deux séries de surfaces cherchées sont

$$(e^x - e^{-x})^2 + (e^y - e^{-y})^2 + g(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (4 - g^2)\cos^2 z = 0,$$

$$(e^x - e^{-x})^2 + (e^y - e^{-y})^2 - h(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (4 - h^2)\cos^2 z = 0. \text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Réponse aux observations de M.* Combescure. Note de M. l'abbé **Aoust**.

« Je ne puis m'expliquer l'intervention de M. Combescure dans une question à laquelle il est étranger, puisque les réclamations qu'il adresse ne sont pas relatives à ma dernière Note, mais se rapportent à une autre antérieure, présentée par moi, il y a quatre ans, pendant lesquels il a gardé le silence. Ce que je comprends encore moins, c'est l'autorisation qu'il se donne de prononcer, dans une Lettre académique, des jugements sur un travail qui n'est pas soumis à son appréciation. Il appartient à l'Académie seule de juger si la Note dernièrement présentée par moi *ne contient rien d'essentiellement nouveau.*

» Je réponds maintenant à ses réclamations. Le travail de M. Combescure et le mien (*Mémoires de l'Académie de Marseille,* p. 143; 1870), faits à des points de vue différents, le premier par l'Analyse, le second par la Géométrie, ont un point de contact commun : c'est que mon travail commence où le sien finit; et encore, ce point de contact est purement virtuel, parce que les équations (1) et (2) de mon Mémoire, qui en sont le point de départ, ne sont pas écrites dans le sien, mais sont seulement contenues d'une manière implicite dans les formules générales (5) et (11) de son Mémoire, lesquelles sont le but principal de son problème (1). Or écrire les équations d'une courbe sous cette forme voilée, et même sous forme explicite, ou donner la théorie de la courbe, sont deux choses bien distinctes.

» Je démontre d'emblée, et en quelques lignes, les équations (1) et (2) de mon Mémoire par des considérations géométriques, lesquelles me servent à démontrer successivement une série de théorèmes relatifs aux surfaces engendrées par l'axe instantané, à la tangente et à sa construction, à la rectification de la courbe, à sa comparaison avec les podaires non planes; une généralisation des formules de Steiner, de Bernoulli, de l'Hôpital; en un mot, l'économie géométrique de la courbe. Aucune de ces