Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

CORRESPONDANCE.

M. **Ollier**, nommé Correspondant pour la Section de Médecine et Chirurgie, dans la séance du 18 mai 1874, adresse ses remercîments à l'Académie.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'addition des fonctions elliptiques;* par M. E. Catalan.

« I. Pour intégrer l'équation

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0, \tag{1}$$

on emploie, en général, des méthodes longues ou compliquées (*). En voici une qui est exempte de ces deux défauts.

» Après avoir mis l'équation (1) sous la forme

$$\Delta(y)\,dx + \Delta(x)\,dy = 0, \tag{2}$$

j'observe que, pour rendre le premier terme intégrable, on peut le multiplier par $\frac{1}{\cos^2 x}$, ou encore par $\frac{1}{\cos^2 x\,[1 + \tan^2 x\,\Delta(y)^2]}$. En effet,

$$\int \frac{\dfrac{\Delta(y)\,dx}{\cos^2 x}}{1 + \operatorname{tang}^2 x\,\Delta(y)^2} = \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tang} x\,(\Delta y)]. \tag{3}$$

Or

$$\cos^2 x[1 + \operatorname{tang}^2 x\,\Delta(y)^2] = 1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 y[1 + \operatorname{tang}^2 y\,\Delta(x)^2].$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu de l'équation (2),

$$\frac{\Delta(y)\,dx}{\cos^2 x\,[1 + \operatorname{tang}^2 x\,\Delta(y)^2]} = \frac{\Delta(x)\,dy}{\cos^2 y\,[1 + \operatorname{tang}^2 y\,\Delta(x)^2]}. \tag{4}$$

» Soient maintenant, d'après la formule (3),

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang} x\,\Delta(y), \quad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} y\,\Delta(x); \tag{5}$$

(*) La démonstration que j'ai donnée en 1869, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, est fort simple, mais elle exige plusieurs transformations.

et, par conséquent,

$$(6)\quad \begin{cases} d\alpha = \dfrac{\Delta(y)\,dx}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y} - c^2\dfrac{\sin x\cos x\sin y\cos y\,dy}{(1 - c^2\sin^2 x\cos^2 y)\,\Delta(y)}, \\ d\beta = \dfrac{\Delta(x)\,dy}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y} - c^2\dfrac{\sin x\cos x\sin y\cos y\,dx}{(1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y)\,\Delta(x)}; \end{cases}$$

puis, en vertu de la proposée,

$$(7)\qquad d\alpha + d\beta = 0.$$

L'intégrale cherchée est donc $\alpha + \beta = \text{const.}$, ou $\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \text{const.}$, ou enfin

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\sin x\cos y\,\Delta(y) + \sin y\cos x\,\Delta(x)}{\cos x\cos y - \sin x\sin y\,\Delta(x)\,\Delta(y)},$$

résultat connu (*).

» II. D'après les valeurs (6), on a

$$d(\alpha + \beta) = d\mu = \left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\frac{\Delta(x)\,\Delta(y) - c^2\sin x\sin y\cos x\cos y}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y}.$$

Ainsi, *pour transformer le premier membre de la proposée en une différentielle exacte, il a suffi de le multiplier par*

$$\lambda = \frac{\Delta(x)\,\Delta(y) - c^2\sin x\sin y\cos x\cos y}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y} = \Delta(\mu)\ (**).$$

Conséquemment, $\left[\dfrac{dx}{\Delta(x)} + \dfrac{dy}{\Delta(y)}\right]\varphi(\lambda)$ *est aussi une différentielle exacte*, la

(*) Après avoir démontré cette formule, Legendre ajoute : « Si l'on prenait deux angles » auxiliaires α, β, tels que

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}x\,\Delta(y),\quad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}y\,\Delta(x),$$

» il en résulterait

$$\mu = \alpha + \beta,$$

» ce qui est un moyen de calculer aisément μ par les Tables de sinus. » Comment l'illustre auteur du *Traité des Fonctions elliptiques* ne s'est-il pas aperçu que ces variables α, β réduisent l'équation (1) à la forme (6)?

Un mot encore. Dans le *triangle sphérique de Lagrange*, α, β sont les segments déterminés, sur le côté μ, par la hauteur correspondante. Ce triangle sphérique donne donc, de la manière la plus simple, toute la *théorie de l'addition des fonctions de première espèce*.

(**) En effet,

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = \frac{d\mu}{\Delta(\mu)}.$$

fonction φ étant arbitraire; et, *si*

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\varphi(\lambda) = d\mathrm{V},$$

on peut adopter, comme intégrale de l'équation (1),

$$\mathrm{V} = \text{const.}$$

» Soit, par exemple, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$; alors

$$d\mathrm{V} = \frac{d\mu}{\Delta(\mu)}\,\frac{1}{\Delta(\mu)} = \frac{d\mu}{1 - c^2\sin^2\mu} = \frac{d\mu}{\cos^2\mu + b^2\sin^2\mu};$$

puis

$$\mathrm{V} = \frac{1}{b}\,\mathrm{arc\,tang}(b\,\mathrm{tang}\,\mu) = \text{const.},$$

solution évidente.

» Si l'on prend $\varphi(\lambda) = \lambda^2\Delta(\mu)^2$, on a

$$d\mathrm{V} = \left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\left[\frac{\Delta(x)\Delta(y) - c^2\sin x\cos x\sin y\cos y}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y}\right]^2 = \Delta(\mu)\,d\mu = d\mathrm{E}(\mu);$$

mais (*)

$$d\mathrm{E}(\mu) = dx\,\Delta(x) + dy\,\Delta(y) - c^2 d(\sin x\sin y\sin\mu);$$

donc *la quantité*

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)}\right]\left[\frac{\Delta(x)\Delta(y) - c^2\sin x\cos x\sin y\cos y}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y}\right]^2$$

est une différentielle exacte, identiquement égale à

$$dx\,\Delta(x) + dy\,\Delta(y) - c^2 d\left[\sin x\cos x\,\frac{\sin x\cos y\,\Delta(y) + \sin y\cos x\,\Delta(x)}{1 - c^2\sin^2 x\sin^2 y}\right]. \text{ »}$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Réponse de M. l'abbé* **Aoust** *aux observations de M.* Serret.

« Je remercie l'Académie de ce qu'elle a bien voulu déroger à ses règlements en faisant insérer dans les *Comptes rendus* ma Note *Sur les intégrales des courbes qui ont une même surface polaire*. Cette insertion permettra aux géomètres d'apprécier la justesse des observations que j'ai l'honneur d'adresser en réponse à celles que M. Serret a faites sur ma Note. Cet éminent analyste s'est occupé avant moi, plusieurs fois, de la même question. Je connaissais, avant d'écrire ma Note, ses belles recherches *Sur les for-*

(*) *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 43.