

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

CORRESPONDANCE.

M. OLLIER, nommé Correspondant pour la Section de Médecine et Chirurgie, dans la séance du 18 mai 1874, adresse ses remerciements à l'Académie.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'addition des fonctions elliptiques;*
par M. E. CATALAN.

« I. Pour intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0,$$

on emploie, en général, des méthodes longues ou compliquées (*). En voici une qui est exempte de ces deux défauts.

» Après avoir mis l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad \Delta(y) dx + \Delta(x) dy = 0,$$

j'observe que, pour rendre le premier terme intégrable, on peut le multiplier par $\frac{1}{\cos^2 x}$, ou encore par $\frac{1}{\cos^2 x [1 + \text{tang}^2 x \Delta(y)^2]}$. En effet,

$$(3) \quad \int \frac{\frac{\Delta(y) dx}{\cos^2 x}}{1 + \text{tang}^2 x \Delta(y)^2} = \text{arc tang}[\text{tang} x (\Delta y)].$$

Or

$$\cos^2 x [1 + \text{tang}^2 x \Delta(y)^2] = 1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 y [1 + \text{tang}^2 y \Delta(x)^2].$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu de l'équation (2),

$$(4) \quad \frac{\Delta(y) dx}{\cos^2 x [1 + \text{tang}^2 x \Delta(y)^2]} = \frac{\Delta(x) dy}{\cos^2 y [1 + \text{tang}^2 y \Delta(x)^2]}.$$

» Soient maintenant, d'après la formule (3),

$$(5) \quad \text{tang} \alpha = \text{tang} x \Delta(y), \quad \text{tang} \beta = \text{tang} y \Delta(x);$$

*) La démonstration que j'ai donnée en 1869, dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, est fort simple, mais elle exige plusieurs transformations.

et, par conséquent,

$$(6) \quad \begin{cases} d\alpha = \frac{\Delta(y) dx}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} - c^2 \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y dy}{(1 - c^2 \sin^2 x \cos^2 y) \Delta(y)}, \\ d\beta = \frac{\Delta(x) dy}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} - c^2 \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y dx}{(1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y) \Delta(x)}; \end{cases}$$

puis, en vertu de la proposée,

$$(7) \quad d\alpha + d\beta = 0.$$

L'intégrale cherchée est donc $\alpha + \beta = \text{const.}$, ou $\text{tang}(\alpha + \beta) = \text{const.}$,
ou enfin

$$\text{tang} \mu = \frac{\sin x \cos y \Delta(y) + \sin y \cos x \Delta(x)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y \Delta(x) \Delta(y)},$$

résultat connu (*).

» II. D'après les valeurs (6), on a

$$d(\alpha + \beta) = d\mu = \left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} \right] \frac{\Delta(x) \Delta(y) - c^2 \sin x \sin y \cos x \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}.$$

Ainsi, pour transformer le premier membre de la proposée en une différentielle exacte, il a suffi de le multiplier par

$$\lambda = \frac{\Delta(x) \Delta(y) - c^2 \sin x \sin y \cos x \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} = \Delta(\mu) \quad (**).$$

Conséquemment, $\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} \right] \varphi(\lambda)$ est aussi une différentielle exacte, la

(*) Après avoir démontré cette formule, Legendre ajoute : « Si l'on prenait deux angles » auxiliaires α, β , tels que

$$\text{tang} \alpha = \text{tang} x \Delta(y), \quad \text{tang} \beta = \text{tang} y \Delta(x),$$

» il en résulterait

$$\mu = \alpha + \beta,$$

» ce qui est un moyen de calculer aisément μ par les Tables de sinus. » Comment l'illustre auteur du *Traité des Fonctions elliptiques* ne s'est-il pas aperçu que ces variables α, β réduisent l'équation (1) à la forme (6)?

Un mot encore. Dans le *triangle sphérique de Lagrange*, α, β sont les segments déterminés, sur le côté μ , par la hauteur correspondante. Ce triangle sphérique donne donc, de la manière la plus simple, toute la *théorie de l'addition des fonctions de première espèce*.

(**) En effet,

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = \frac{d\mu}{\Delta(\mu)}.$$

fonction φ étant arbitraire; et, si

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} \right] \varphi(\lambda) = dV,$$

on peut adopter, comme intégrale de l'équation (1),

$$V = \text{const.}$$

» Soit, par exemple, $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$; alors

$$dV = \frac{d\mu}{\Delta(\mu)} \frac{1}{\Delta(\mu)} = \frac{d\mu}{1 - c^2 \sin^2 \mu} = \frac{d\mu}{\cos^2 \mu + b^2 \sin^2 \mu};$$

puis

$$V = \frac{1}{b} \text{arctang}(b \text{tang} \mu) = \text{const.},$$

solution évidente.

» Si l'on prend $\varphi(\lambda) = \lambda^2 \Delta(\mu)^2$, on a

$$dV = \left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} \right] \left[\frac{\Delta(x) \Delta(y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} \right]^2 = \Delta(\mu) d\mu = dE(\mu);$$

mais (*)

$$dE(\mu) = dx \Delta(x) + dy \Delta(y) - c^2 d(\sin x \sin y \sin \mu);$$

donc la quantité

$$\left[\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} \right] \left[\frac{\Delta(x) \Delta(y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} \right]^2$$

est une différentielle exacte, identiquement égale à

$$dx \Delta(x) + dy \Delta(y) - c^2 d \left[\sin x \cos x \frac{\sin x \cos y \Delta(y) + \sin y \cos x \Delta(x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} \right]. »$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — Réponse de M. l'abbé Aoust aux observations de M. Serret.

« Je remercie l'Académie de ce qu'elle a bien voulu déroger à ses règlements en faisant insérer dans les *Comptes rendus* ma Note *Sur les intégrales des courbes qui ont une même surface polaire*. Cette insertion permettra aux géomètres d'apprécier la justesse des observations que j'ai l'honneur d'adresser en réponse à celles que M. Serret a faites sur ma Note. Cet éminent analyste s'est occupé avant moi, plusieurs fois, de la même question. Je connaissais, avant d'écrire ma Note, ses belles recherches *Sur les for-*

(*) *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 43.