Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

versées, et dix-sept d'entre elles étaient comprises entre la raie b et la raie 5404 d'Angström; à certains instants, toutes les lignes de cet intervalle semblaient renversées. Avant-hier, l'éruption continuait encore, mais elle ne s'étendait plus que sur 36 degrés du bord : hier, elle comprenait 30 degrés; enfin, ce matin, il n'y avait de spectre métallique que sur trois points; il était faible et l'on n'observait toujours pas de taches. Les détails de toutes ces observations seront donnés dans un prochain numéro des *Memorie*, avec les figures relatives. Pour aujourd'hui, je me contente d'annoncer à l'Académie le fait que j'ai observé, savoir, dans une région solaire, une éruption s'étendant presque sur 50 degrés en latitude, et qui a employé sept jours pour se terminer. Tandis qu'un phénomène aussi extraordinaire se produisait, sur une étendue aussi énorme, le magnésium et la raie 1474 de Kirchhoff étaient visibles sur le bord entier du Soleil. Voilà donc un mouvement général dans les couches supérieures du Soleil, indépendant du mouvement de rotation de l'astre, puisque le Soleil tourne toujours de la même manière. »

ANALYSE. — *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet;* par M. E. Catalan. (Extrait.)

« **1.** Soit

$$(1) \qquad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+n-1} = l(\mu+n-1) + \varphi(n,\mu) + C_\mu,$$

μ étant une quantité positive, et la fonction $\varphi(n,\mu)$ s'annulant pour n infini. Quant à la constante C_μ, définie par l'égalité

$$(2) \qquad C_\mu = \lim\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+n-1} - l(\mu+n-1)\right],$$

elle se réduit à la *constante d'Euler* C, si $\mu = 1$.

» **2.** D'après l'équation (1),

$$(3) \qquad C_\mu = \int_0^1 \left[\frac{x^{\mu-1}}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right] dx,$$

$$(4) \qquad \varphi(n,\mu) = -\int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right] x^{\mu+n-2}\, dx,$$

$$(5) \qquad C_1 - C_\mu = C - C_\mu = \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\, dx.$$

» D'ailleurs (*),

$$(6) \qquad C + \frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^1 \frac{1 - x^{\mu-1}}{1-x}\,dx;$$

donc

$$(7) \qquad C_\mu = -\frac{d.l\Gamma(\mu)}{d\mu}.$$

» Ainsi la *constante* C_μ, considérée comme *fonction* du paramètre μ, est une transcendante connue. Si μ est commensurable, $C - C_\mu$ est exprimable sous forme finie : en particulier, $C - C_2 = 1, \ldots$.

» 3. Dans la Note citée, j'ai prouvé que

$$(8) \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right] + \int_0^1 \left[\frac{x}{1-x} + \frac{1}{l(x)}\right] x^{\mu-1}\,dx = 0,$$

si μ est un *nombre entier*. Par une démonstration très-simple, on établit la *généralité* de cette équation. En conséquence, et *pour toutes les valeurs positives de* μ,

$$(9) \qquad \varphi(n,\mu) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[x^{2(\mu+n-1)} + x^{4(\mu+n-1)} + x^{8(\mu+n-1)} + \ldots\right].$$

» 4. Prenons la formule connue

$$(10) \qquad l\Gamma(\mu) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right) l(\mu) - \mu + \frac{1}{2}\,l(2\pi) + \varpi(\mu),$$

dans laquelle $\varpi(\mu)$ est la *fonction de Binet*, savoir :

$$(11) \qquad \varpi(\mu) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx.$$

Il en résulte, à cause des relations (7) et (8),

$$(12) \qquad C_\mu = \frac{1}{2\mu} - \varpi'(\mu),$$

$$(13) \quad \left\{\begin{aligned} \varpi'(\mu) &= -\frac{1}{2\mu} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-\mu x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2\mu} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left(x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots\right); \end{aligned}\right.$$

(*) *Voir*, par exemple, *Note sur une formule de M. Botesu* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, juillet et novembre 1872).

puis

$$(14)\qquad C_\mu = \frac{1}{\mu} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}(x^{2\mu} + x^{4\mu} + x^{8\mu} + \ldots);$$

et, en particulier (*),

$$(15)\qquad C_1 = C = 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}(x^2 + x^4 + x^8 + \ldots).$$

» 5. Connaissant $\varpi'(\mu)$, on trouve, par un calcul que je suis forcé de supprimer (**),

$$(16)\qquad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}l(2\mu\pi) - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}\left(\frac{1-x^{2\mu}}{2} + \frac{1-x^{4\mu}}{4} + \frac{1-x^{8\mu}}{8} + \cdots\right),$$

$$(17)\qquad l\Gamma(\mu) = (\mu - 1)\,l(\mu) - \mu - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}\left(\frac{1-x^{2\mu}}{2} + \frac{1-x^{4\mu}}{4} + \frac{1-x^{8\mu}}{8} + \cdots\right),$$

$$(18)\qquad -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\,l(x)}\left(\frac{1-x^2}{2} + \frac{1-x^4}{4} + \frac{1-x^8}{8} + \cdots\right) = 1.$$

» 6. La dernière formule équivaut à celle-ci :

$$e = \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{8}} \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(9)}{\Gamma\left(\frac{17}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{16}} \cdots;$$

d'où l'on tire ce développement curieux

$$(19)\qquad e = \frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots.$$

» 7. Si l'on suppose

$$(20)\qquad P_\mu = \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma\left(4\mu+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{8}}\cdots,$$

on trouve

$$(21)\qquad \Gamma(\mu+1) = \mu^\mu e^{-\mu}\sqrt{\pi}\,P_\mu,$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2n}\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\,\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad\left[\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots(^{***});\end{aligned}\right.$$

(*) *Note sur une formule de M. Botesu.*

(**) Dans un Mémoire remarquable, encore inédit, M. Ph. Gilbert a donné une *infinité de séries* propres à représenter la fonction de Binet.

(***) De cette relation (22), on peut déduire le *développement* de e^n en *produit indéfini.*

et, comme $\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)$,

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1+\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\,\frac{2n-2}{2n-1}\right]^{2} \\ & \qquad \left[\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n+2}{2n+1}\cdots\frac{4n}{4n-1}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{4n+2}{4n+1}\cdots\frac{8n}{8n-1}\right]^{\frac{1}{4}}\cdots \end{aligned} \right.$$

Cette quantité est le *terme complémentaire* de la formule de Stirling, c'est-à-dire la fonction qui a pour développement, en *série divergente*,

$$\frac{B_1}{1.2.n} + \frac{B_3}{3.4.n^3} + \frac{B_5}{5.6.n^5} + \cdots.$$

» 8. Pour terminer, citons encore ces résultats, peut-être connus,

$$(24)\qquad \lim \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\mu)} = \sqrt{2};$$

$$(25)\qquad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdots,$$

$$(26)\qquad \sqrt{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdots \text{ »}$$

PHYSIQUE. — *Recherches sur la condensation électrique;*
Note de M. V. **Neyreneuf**, présentée par M. Edm. Becquerel.

« Dans les différentes circonstances de son emploi, un condensateur à lame de verre est un véritable électrophore agissant par ses deux faces, pouvant donner à volonté de l'électricité, soit positive, soit négative, ou les deux électricités à la fois. On vérifie facilement qu'il en est ainsi : 1° dans la décharge par contacts successifs : si l'on écarte, en effet, brusquement le plateau que l'on vient de toucher, on le trouve chargé, et chargé d'une électricité contraire à celle qui produisait la divergence du pendule; 2° dans la décharge instantanée : l'écart des deux plateaux après la production de l'étincelle va mettre en évidence sur ces deux plateaux des électricités contraires à celles qu'ils manifestaient d'abord ; 3° par le long emploi que l'on peut faire, quand le condensateur est *déchargé*, de la lame de verre comme électrophore.

» Les quantités d'électricité obtenues dans les trois cas que je viens de signaler sont considérables et peuvent produire de fortes divergences des pendules à moelle de sureau et des étincelles qui dépassent souvent en