Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

bandes lumineuses se détachent sur un spectre continu, particulier à la comète. Celle-ci diffère donc, à ce point de vue, d'une nébuleuse, dont la lumière se concentre tout entière dans un petit nombre de lignes, qui sont par suite très-brillantes. En même temps, nous reconnaissons la double origine de la lumière de la comète, une lumière propre qui donne les bandes, et une autre portion empruntée au Soleil. Que la lumière réfléchie existe en quantité très-sensible dans la comète, c'est ce que prouve le fait, constaté par nous, que la lumière de cet astre est partiellement polarisée dans un plan passant par le Soleil. Cette polarisation est assez forte pour être démontrée à l'aide d'un simple prisme biréfringent. D'ailleurs elle ne peut être confondue avec la polarisation atmosphérique, si l'on a le soin, comme l'a indiqué depuis longtemps M. Praczmouzki, d'observer les deux images de la comète sur la partie commune des deux images du fond du ciel. »

GÉOMÉTRIE. — *Remarques sur une Note de* M. Darboux, *relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique; par* **M. E. CATALAN.**

« Je demande à l'Académie la permission de lui soumettre les remarques suivantes, qui me sont suggérées par la lecture du *Compte rendu* de l'avant-dernière séance. A peine ai-je besoin de déclarer que je ne suis animé d'aucun esprit de dénigrement à l'égard de M. Darboux; nul, plus que moi, ne reconnaît le mérite de ce jeune et déjà célèbre géomètre.

» I. La formule $R = \frac{\rho^3 \rho_1}{abc}$ se trouve à la page 263 de mes *Mélanges mathématiques.*

» II. Les formules $\lambda^2 = \frac{(a^2 - \rho^2)^3 (a^2 - \rho_1^2)}{a^2 (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$, etc., ne sont pas nouvelles : je les ai trouvées (ce qui n'était pas difficile) en 1868; M. Gilbert, mon savant confrère à l'Académie de Belgique, les a trouvées aussi, et il est probable qu'elles se sont présentées à tous les professeurs qui ont eu à traiter la question du *lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde.*

» III. Il est bien vrai que l'équation $R = B^2 - 4AC = 0$ ne présente *pas toujours* l'enveloppe des courbes (*) représentées elles-mêmes par

$$(1) \qquad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0;$$

mais M. Darboux ne va-t-il pas un peu loin en affirmant que *c'est précisé-*

(*) A la page 1331 des *Comptes rendus*, on a imprimé par erreur : *des cercles.*

ment le contraire qui arrive, et que $R = 0$ *représente le lieu des points de rebroussement des courbes*? Si, par exemple, on prend les hyperboles dont l'équation est

$$c^2 + (x + y)c + 1 - xy = 0, \tag{2}$$

on trouve

$$(2x^2 + 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 + 2xy + y^2 + 2)\frac{dy}{dx} + 2y^2 + 1 = 0, \tag{3}$$

et, comme équation de l'enveloppe,

$$x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0. \tag{4}$$

Dans ce cas, la fonction R a pour valeur

$$(x - y)^2(x^2 + 6xy + y^2 - 4);$$

donc, si l'on fait abstraction du facteur $(x - y)^2$, sur lequel je reviendrai tout à l'heure, $R = 0$ représente l'enveloppe des hyperboles données, et non le *lieu des points de rebroussement de ces courbes*, au moins je le suppose.

» IV. Ce n'est pas tout : à l'appui de sa thèse, M. Darboux fait observer qu'*en général* les équations

$$R = 0, \tag{5}$$
$$\frac{dR}{dx} - \frac{B}{2A}\frac{dR}{dy} = 0 \tag{6}$$

ne peuvent être vérifiées simultanément. Dans l'exemple précédent, l'équation (6) est

$$(x^2 + 2xy + y^2 + 2)(y + 3x) - 2(2x^2 + 1)(x + 3y) = 0,$$

ou

$$(y - x)(y^2 + 6xy + x^2 - 4) = 0;$$

c'est-à-dire

$$(y - x)R = 0.$$

» On pourrait évidemment multiplier les vérifications de la règle ordinaire. Quels sont donc les cas d'exception à cette règle?

» V. Soit

$$c^2 + Pc + Q = 0, \tag{7}$$

P et Q étant fonctions de x et de y. La *solution singulière* est

$$P^2 - 4Q = 0. \tag{8}$$

» D'un autre côté, si l'on élimine c entre la proposée (7) et sa différentielle immédiate, on trouve une équation de la forme (1), dans laquelle

$$(9)\qquad \begin{cases} A = \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2 - P\frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dy} + Q\left(\frac{dP}{dy}\right)^2, \\ B = 2\left(\frac{dQ}{dx}\frac{dQ}{dy} + Q\frac{dP}{dx}\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} + \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right), \\ C = \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - P\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dx} + Q\left(\frac{dP}{dx}\right)^2. \end{cases}$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$(10)\qquad R = B^2 - 4Ac = (P^2 - 4Q)\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2.$$

Par conséquent, *l'équation* $R = 0$ *se décompose en*

$$(8)\qquad P^2 - 4Q = 0,$$

qui représente l'enveloppe des courbes (7), *et en*

$$(11)\qquad \left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2 = 0.$$

Celle-ci appartient au lieu des points où se touchent les courbes simultanément représentées par

$$P = \lambda$$

et par

$$Q = \mu,$$

λ, μ *étant des constantes arbitraires.*

» Dans l'exemple ci-dessus,

$$P = x + y, \quad Q = 1 - xy,$$

et l'équation (11) se réduit à

$$(12)\qquad (x - y)^2 = 0.$$

Celle-ci, dont nous avons déjà parlé, représente donc le *lieu des points de contact d'un système de droites parallèles et d'hyperboles homothétiques.* En outre, *cette équation* (12) *est une solution singulière* de

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

ou

$$(2x^2 + 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + 2xy + y^2 + 2)\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y^2 + 1 = 0.$$

» VI. Soit encore l'équation *intégrale*

$$(13)\qquad 4x^2 + 2(x - 3y) + c + x^2 = 0,$$

que j'ai prise pour exemple dans une *Note sur la Théorie des solutions singulières* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXI[e] cahier). Il en résulte l'équation différentielle

$$(14)\qquad 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y\frac{dy}{dx} + x + 2y = 0,$$

et, comme équation de l'enveloppe des paraboles (13),

$$(15)\qquad (x-3y)^2 = 4x^2.$$

Si l'on égale à zéro la fonction $B^2 - 4AC$, on a

$$3y^2 = x(x+2y),$$

c'est-à-dire la relation (15). Ici l'on ne rencontre pas du tout l'exception que M. Darboux signale comme devant arriver si fréquemment.

» VII. Soient, pour abréger,

$$(16)\qquad \frac{dP}{dx} = \alpha,\quad \frac{dP}{dy} = \beta,\quad \frac{dQ}{dx} = \alpha',\quad \frac{dQ}{dy} = \beta';$$

alors les formules (9) deviennent

$$\begin{aligned} A &= \beta'^2 - P\beta\beta' + Q\beta^2,\\ B &= 2(\alpha'\beta' + Q\alpha\beta) - P(\alpha\beta' + \alpha'\beta),\\ C &= \alpha'^2 - P\alpha\alpha' + Q\alpha^2; \end{aligned}$$

et la relation (10) se réduit à l'identité

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

que l'on rencontre dans la théorie des nombres. On a ainsi un rapprochement, peut-être bien inattendu, entre deux parties différentes de l'analyse.

» VIII. Puisque l'occasion s'en présente, je mentionnerai trois propositions sur *le lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde :*

» 1° *Le long d'une même ligne de courbure de l'ellipsoïde, le rayon principal varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent ;*

» 2° *La surface dont il s'agit est l'enveloppe des ellipsoïdes représentés par*

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-\lambda^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2-\lambda^2)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2-\lambda^2)^2} = 1;$$

» 3° *Chacun de ces ellipsoïdes touche l'enveloppe suivant une arête de rebroussement.* »