Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

outre, quelques détails concernant le meilleur mode d'agencement des tuyaux des poêles.

(Renvoi à la Commission nommée pour la question des poêles de fonte.)

M. Bellenger adresse un Mémoire sur « La prophylaxie ou préservation rationnelle de la rage humaine ».

(Renvoi à la Commission des prix de Médecine et de Chirurgie.)

CORRESPONDANCE.

« **M. le Ministre de la Maison de l'Empereur et des Beaux-Arts** transmet à l'Académie un Rapport, fait par *M. Lefuel*, architecte de l'Empereur, au sujet des paratonnerres qui sont placés sur les combles des palais des Tuileries et du Louvre. M. le Ministre exprime le désir que ce travail soit examiné par la Commission qui s'est déjà occupée de la rédaction des instructions relatives aux paratonnerres des magasins à poudre, instructions qui ont été approuvées par l'Académie le 14 mai dernier; le Rapport que ferait cette Commission pourrait servir de règle pour les changements à introduire dans les dispositions actuelles.

» M. le Ministre informe d'ailleurs l'Académie qu'il a adressé une Lettre circulaire à tous les architectes qui sont attachés à la liste civile impériale, pour provoquer de leur part un Rapport semblable sur les paratonnerres des bâtiments dépendant de leur agence. »

La Lettre de M. le Ministre, avec le plan des combles du Louvre et des Tuileries qui y est joint, sera renvoyée à la Commission.

M. le Secrétaire perpétuel signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, les vingt-quatre numéros qui forment les deux premiers volumes du « Bulletin météorologique de l'Observatoire du Collége Charles-Albert, de Moncalieri ». Cette publication est adressée à l'Académie par *M. Denza*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les nombres d'Euler.* Note de **M. E. Catalan**, présentée par M. Delaunay.

« I. Si l'on suppose

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n},$$

on trouve

$$E_0 = 1, \quad E_2 = 1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = 61, \quad E_8 = 1385, \ldots,$$

puis (*)

$$E_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} E_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} E_{2n-4} - \cdots \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2} E_2 \mp E_0 = 0.$$

Les nombres *entiers* E sont appelés, par M. Sylvester, *nombres d'Euler* (**). De la relation précédente, on conclut aisément qu'ils ont la forme $4k+1$.

» II. Dans un *Mémoire sur les nombres de Bernoulli et d'Euler* (***), j'ai démontré la relation

$$\text{(A)} \qquad E_{2n} = 4^{n+1} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}},$$

analogue à la célèbre formule de Plana :

$$\text{(B)} \qquad B_{2n-1} = \pm 4n \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}.$$

» III. On sait que cette dernière formule donne aisément

$$\sum_0^\infty \frac{1}{p^2} = \frac{2 B_1 \pi^2}{\Gamma(3)}, \quad \sum_0^\infty \frac{1}{p^4} = -\frac{2^3 B_3 \pi^4}{\Gamma(5)}, \quad \sum_0^\infty \frac{1}{p^6} = \frac{2^5 B_5 \pi^6}{\Gamma(7)}, \ldots$$

De même, si l'on remplace (A) par

$$E_{2n} = \frac{4^{n+1}}{\pi^{2n+1}} \int_0^\infty \frac{t^{2n}\, dt}{e^t + e^{-t}},$$

que l'on développe $\frac{1}{e^t + e^{-t}}$, puis qu'on intègre chaque terme, on trouve la relation générale

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \cdots = \frac{\pi^{2n+1} E_{2n}}{4^{n+1}\,\Gamma(2n+1)},$$

laquelle n'avait peut-être pas été remarquée. Lorsque $n = 0$, cette relation se réduit à la formule de Leibnitz; et, lorsque $n = 1$, elle devient

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32},$$

formule connue. »

(*) *Comptes rendus*, t. LIV, p. 1033.

(**) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 1108.

(***) *Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XXXVII. — *Mélanges mathématiques*, p. 313.