Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

et nous avons pensé que l'observation d'Ichoux voulait dire que le plan de la trajectoire passait par le zénith de ce lieu. C'est d'après cette indication que nous avons tracé une troisième ligne intermédiaire qu'il faut peut-être considérer comme représentant jusqu'à présent la trajectoire la plus probable du bolide du 14 mai. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Bolide observé à Paris dans la nuit du 6 au 7 juin 1864.* Extrait d'une Note de **M. Coulvier-Gravier.**

« ... Le 6 juin 1864, à 9 heures 56 minutes du soir, un globe filant venant du sud-sud-est, se dirigeant au nord-nord-ouest, prit naissance entre la Couronne et ζ pieds d'Hercule, et disparut après 100 degrés de course qu'il parcourut en trois secondes entre α Chèvre et l'arc de Persée. Sa position azimutale était à 345 degrés, et sa position verticale à 32 degrés, prise, comme nous le faisons toujours, au milieu du parcours de la trajectoire.

» Ce météore de première grandeur était, comme ils le sont toujours pour cette catégorie, de six fois environ le diamètre de Vénus dans son plus grand éclat. Il était de couleur blanche, couleur qu'il conserva tout le temps de son apparition; sa traînée non persistante était aussi presque blanche et compacte. Quelques degrés avant la fin de sa course, il se brisa en trois fragments, qui conservèrent la couleur du globe et disparurent après 2 à 3 degrés de course.

» Ce beau météore éclaira vivement l'horizon; il fut vu directement par M. Chapelas et par réflexion par M. Chartiaux, et, comme pour tous les globes filants que nous avons observés jusqu'ici, on n'aperçut pas pendant le parcours de sa longue trajectoire une seule parcelle de fumée, pas plus qu'on n'entendit le moindre bruit, soit pendant, soit après son apparition. Au moment où paraissait le globe filant, un orage très-intense avait lieu dans la région sud, extrémité de l'horizon; la lumière réfléchie du globe vers cette partie du ciel amoindrissait l'éclat des éclairs incessants qui partaient de cet orage. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le calcul des Nombres de Bernoulli; par* **M. E. Catalan.**

« Les relations nombreuses qui existent entre les Nombres de Bernoulli donnent lieu à des calculs pénibles, parce qu'il s'y introduit, nécessairement, des fractions de plus en plus compliquées. Dans le travail que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie, j'établis les formules

$$B_1 = \frac{P_1}{2.3}, \quad B_3 = -\frac{P_3}{2.15}, \dots \quad B_{2n-1} = \pm \frac{P_{2n-1}}{2(4^n - 1)},$$

$$P_{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2.3} P_{2n-3} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5} P_{2n-5} - \dots \pm \frac{2n}{2} P_1 = 1;$$

dans lesquelles $P_1, P_3 \dots, P_{2n-1}, \dots$, sont des *nombres entiers impairs*.

» I. En partant du développement de $\frac{x}{e^x - 1}$, on trouve (*)

$$\text{(A)} \quad \operatorname{tang} x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2} x - \dots + \dots \pm 4^n(4^n - 1)\frac{B_{2n-1}}{1.2.3\dots 2n} x^{2n-1} \mp \dots$$

Pour développer directement tang x, il suffit de prendre l'équation

$$y \cos x = \sin x,$$

et d'employer ensuite la formule de Mac-Laurin. On obtient ainsi

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{tang} x = y_1 x + y_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + y_{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{1.2\dots(2n-1)} + \dots,$$

$y_1, y_3, y_5, \dots$, étant des *nombres entiers*, déterminés par la relation

$$\text{(C)} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{2n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} y_{2n-3} \\ + \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3.4} y_{2n-5} - \dots \pm \frac{2n-1}{1} y_1 = \pm 1. \end{array} \right.$$

» II. La comparaison des formules (A), (B) donne

$$\text{(D)} \qquad B_{2n-1} = \pm \frac{2n}{4^n(4^n - 1)} y_{2n-1}.$$

» D'un autre côté, à cause des deux relations :

$$4^n B_{2n-1} + 4^{n-1} \frac{2n(2n-1)}{2.3} B_{2n-3} + \dots + 4 \frac{2n}{2} B_1 = \frac{2n}{2n+1},$$

$$B_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2.3} B_{2n-3} + \dots + \frac{2n}{2} B_1 = \frac{2n-1}{2(2n+1)} \text{(**)},$$

(*) *Comptes rendus*, t. LIV, p. 1031.
(**) *Comptes rendus*, t. LIV, p. 1060.

on a

$$(4^n - 1)B_{2n-1} + (4^{n-1} - 1)\frac{2n(2n-1)}{2.3}B_{2n-3} + \ldots + (4-1)\frac{2n}{2}B_1 = \frac{1}{2};$$

d'où, en posant

$$B_{2n-1} = \pm\frac{P_{2n-1}}{2(4^n-1)}: \tag{E}$$

$$\left\{\begin{aligned} &P_{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2.3}P_{2n-3} \\ &+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5}P_{2n-5} - \ldots \pm \frac{2n}{2}P_1 = 1. \end{aligned}\right. \tag{F}$$

» III. Si, dans la dernière équation, on suppose $n = 1$, $n = 2$, $n = 3, \ldots$, on trouve

$$P_1 = 1, \quad P_3 = 1, \quad P_5 = 3, \quad P_7 = 17, \quad P_9 = 155, \quad P_{11} = 2073, \ldots;$$

en sorte que les premières valeurs de P_{2n-1} sont entières. Pour démontrer que toutes le sont, je m'appuie sur les remarques suivantes :

» 1° A cause des formules (D), (E) :

$$y_{2n-1} = \frac{4^{n-1}}{n}P_{2n-1}. \tag{G}$$

Donc, *si* P_{2n-1} *est entier, ce nombre est divisible par tous les diviseurs impairs de* n.

» 2° $\frac{N}{D}$ *étant la fraction irréductible équivalente à* $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} = C$ (*), *le dénominateur* D *divise* a *et* b; d'où il résulte que C *se réduit à un nombre entier, lorsque* a *et* b *sont premiers entre eux.*

» 3° Le terme général de l'équation (F) est, abstraction faite du signe,

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+2)\Gamma(2n-2p+1)}P_{2n-2p-1}. \tag{H}$$

Le dénominateur de la fraction irréductible équivalente au coefficient de $P_{2n-2p-1}$ est un diviseur commun à $2p+1$ et $2n-2p$, ou commun à $2p+1$ et $n-p$ (2°); si donc $P_{2n-2p-1}$ est un nombre entier, ce dénominateur divise $P_{2n-2p-1}$ (1°).

» 4° Conséquemment, si $P_1, P_3, P_5, \ldots, P_{2n-3}$ sont des nombres entiers, P_{2n-1} est un nombre entier.

(*) a et b sont des nombres entiers.

» IV. Les nombres entiers

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+2)\Gamma(2n-2p+1)}P_{2n-2p-1} \quad\text{et}\quad \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+1)\Gamma(2n-2p+1)}$$

sont tous deux pairs ou tous deux impairs, lorsque $P_{2n-2p-1}$ est impair. *Si donc* $P_1, P_3, \ldots, P_{2n-3}$ *sont impairs,*

$$P_{2n-1} \equiv \frac{2n(2n-1)}{1.2}$$
$$+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{2n(2n-1)}{1.2}+1 \pmod{2};$$

ou, d'après la formule du binôme,

$$P_{2n-1} \equiv 2^{2n-1}-1 \equiv -1 \pmod{2}:$$

P_{2n-1} *est impair.*

» V. *Remarque.* — D'après la formule (D), on pourrait calculer les Nombres de Bernoulli au moyen des nombres entiers y_1, y_3, $y_5, \ldots$; mais ceux-ci croissent beaucoup plus rapidement que P_1, P_3, $P_5 \ldots$ »

PHYSIQUE. — *Sur le pouvoir rotatoire des liquides actifs et de leurs vapeurs.* Note de **M. D. Gernez**, présentée par M. Pasteur.

« Lorsqu'en 1815 Biot fut conduit par le hasard à la découverte de la polarisation rotatoire dans les liquides, il reconnut aussitôt à ce phénomène remarquable tous les caractères d'une propriété dépendant de la forme individuelle des molécules. Parmi les expériences qu'il imagina pour mettre ce fait en évidence, la plus démonstrative consistait à volatiliser un liquide actif, l'essence de térébenthine, et à faire traverser la vapeur par un rayon de lumière polarisée. Après plusieurs essais infructueux, Biot réussissait enfin à constater l'existence du pouvoir rotatoire de la vapeur d'essence, lorsqu'une explosion et un incendie détruisirent ses appareils. Soit que cette expérience présentât trop de dangers, soit qu'elle parût d'une installation trop difficile, elle ne fut pas reprise depuis 1818. Il restait cependant à rechercher si le pouvoir rotatoire moléculaire est le même en grandeur et en direction dans la vapeur et le liquide qui l'a produite; il n'était pas sans intérêt non plus de déterminer la loi de dispersion des plans de polarisation des rayons de diverses couleurs sous les deux états : tel a été le but de mes recherches, que je n'aurais sans doute pu exécuter sans les bienveillants encouragements de MM. Pasteur et Verdet et les ressources que m'offrait le laboratoire de l'École Normale supérieure.