

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

droite, mais un cercle tangent à la direction primitive. Dans la région bo-
réale, ce cercle est placé de telle sorte que le mobile dévie à droite de la
ligne d'impulsion, relativement à un observateur placé au point de départ. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les Nombres de Bernoulli et sur quelques
formules qui en dépendent; par M. E. CATALAN.*

(Commissaires, MM. Bertrand, Serret.)

« L'une des savantes Notes ajoutées, par MM. Hermite et Serret, au
Traité élémentaire de Lacroix, a rappelé mon attention sur quelques résul-
tats assez simples, auxquels j'étais parvenu depuis longtemps. Je demande
à l'Académie la permission de les lui soumettre.

» I. *Expression générale des Nombres de Bernoulli.* — M. Serret reproduit, à
peu de chose près, le calcul donné autrefois par Lacroix, d'après Laplace.
Ce calcul est assez compliqué, et la formule à laquelle il conduit n'est pas
la plus simple que l'on puisse employer quand on veut calculer *directement*
le $p^{\text{ième}}$ Nombre de Bernoulli. Dans une Note insérée au Journal de M. Tor-
tolini (*), j'ai démontré la formule :

$$B_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Delta(1^p) + \frac{1}{4} \Delta^2(1^p) - \dots \pm \frac{1}{p+2} \Delta^p(1^p),$$

laquelle équivaut à

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} (2^p - 1^p) + \frac{1}{4} \left(3^p - \frac{2}{1} 2^p + 1^p \right) - \dots \\ \pm \frac{1}{p+2} \left[(p+1)^p - \frac{p}{1} p^p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} (p-1)^p - \dots \pm 1^p \right] (**). \end{array} \right.$$

» Dans la même Note, j'ai indiqué un procédé qui permet de calculer de
proche en proche, et très-simplement, les différences successives de 1^p .

» II. *Développement de $\frac{x}{e^x - 1}$.* — On peut, de bien des manières, prouver

(*) Juillet-août 1859.

(**) A l'exemple de Lacroix (*Calcul des différences*, t. III, p. 84), j'appelle B_p le coef-
ficient de n dans le développement de

$$1^{p+1} + 2^{p+1} + \dots + n^{p+1},$$

ordonné suivant les puissances de n . D'ailleurs $B_p = 0$ lorsque p est pair et plus grand que
zéro. M. Serret désigne par B_n ce qui, avec notre notation, serait $(-1)^{n-1} B_{2n-1}$.

que, pour des valeurs réelles ou imaginaires de x dont le nombre soit suffisamment petit, l'on a

$$(B) \quad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \dots,$$

les coefficients A_2, A_4, A_6, \dots étant donnés, en fonction des Nombres de Bernoulli, par les formules :

$$(C) \quad A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \quad A_4 = \frac{B_3}{1.2.3.4}, \quad A_6 = \frac{B_5}{1.2.3.4.5.6}, \dots$$

» III. *Développement de $x \cot x$.* — Si, dans l'équation (B), on change x en $x\sqrt{-1}$, on obtient, comme l'on sait,

$$(D) \quad x \cot x = 1 - 4A_2 x^2 + 4^2 A_4 x^4 - 4^3 A_6 x^6 + \dots$$

» IV. *Développement de $\frac{x}{\sin x}$.* — On a, identiquement,

$$\cot \frac{1}{2}x - \cot x = \frac{1}{\sin x};$$

donc, à cause de la formule (D),

$$(E) \quad \frac{x}{\sin x} = 1 + 2(2-1)A_2 x^2 - 2(2^3-1)A_4 x^4 + 2(2^5-1)A_6 x^6 - \dots$$

» V. *Développement de $\tan x$.* — On a aussi

$$\cot x - 2 \cot 2x = \tan x;$$

d'où l'on conclut

$$(F) \quad \tan x = 4(4-1)A_2 x - 4^2(4^2-1)A_4 x^3 + 4^3(4^3-1)A_6 x^5 - \dots \quad (*)$$

» VI. *Développement de $\sin^m x$.* — 1° L'exposant m étant entier positif, ce développement aura la forme

$$x^m + C_2 x^{m+2} + C_4 x^{m+4} + \dots + C_{2p} x^{m+2p} + \dots$$

(*) M. Schlömilch s'est occupé de cette série (*Archives mathématiques de Grunert*, t. XVI).

Si, après avoir remplacé $\sin x$ par $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, on applique le théorème de Mac-Laurin, on trouve aisément

$$(G) \quad C_{2p} = \frac{(-1)^p \cdot 2^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+2p)} \Delta^m \left[\left(-\frac{m}{2} \right)^{m+2p} \right].$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned} \Delta^m \left[\left(-\frac{m}{2} \right)^{m+2p} \right] &= \binom{m}{2} \left(-\frac{m}{2} \right)^{m+2p} - \frac{m}{1} \binom{m}{2} \left(-\frac{m}{2} - 1 \right)^{m+2p} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(-\frac{m}{2} - 1 \right)^{m+2p} - \dots \\ &\quad \pm \frac{m}{1} \left(-\frac{m}{2} + 1 \right)^{m+2p} \mp \left(-\frac{m}{2} \right)^{m+2p}. \end{aligned}$$

» 2° Si l'on suppose

$$(a) \quad \sin^{m+1} x = \sin^m x \cdot \sin x = x^{m+1} + D_2 x^{m+3} + \dots + D_{2p} x^{m+2p+1} + \dots,$$

on a

$$(b) \quad D_{2p} = C_{2p} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_{2p-2} + \dots \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p-1)} C_2 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+1)}.$$

D'un autre côté, en égalant les dérivées des deux membres de l'équation (a), et remplaçant $\cos x$ par son développement, on trouve une seconde valeur de D_{2p} . Il en résulte

$$(H) \quad p C_{2p} + \frac{m+1-p}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_{2p-2} - \frac{m+2-p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} C_{2p-4} + \dots \mp \frac{pm}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+1)} = 0.$$

Cette relation générale donne, successivement,

$$(c) \quad C_2 = -\frac{m}{6}, \quad C_4 = \frac{m(5m-2)}{360}, \quad C_6 = -\frac{m(35m^2-42m+16)}{45360}, \dots$$

» 3° En comparant la valeur de C_2 à celle qui résulte de la formule (G), on conclut cette réduction assez remarquable :

$$\begin{aligned} \binom{m}{2} \left(-\frac{m}{2} \right)^{m+2} - \frac{m}{1} \binom{m}{2} \left(-\frac{m}{2} - 1 \right)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(-\frac{m}{2} - 2 \right)^{m+2} - \dots \\ \pm \frac{m}{1} \left(-\frac{m}{2} + 1 \right)^{m+2} \mp \left(-\frac{m}{2} \right)^{m+2} = \frac{m}{24} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+2). \end{aligned}$$

» 4° Du reste, on peut retrouver les valeurs (c) en partant de l'identité

$$\sin^m x = [x - (x - \sin x)]^m,$$

et en y remplaçant $x - \sin x$ par son développement en série.

» VII. Développement de $\frac{1}{\cos x}$. — Parmi les différentes manières de l'obtenir, la plus simple (quant à présent) nous paraît consister à écrire

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{P_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots,$$

ou

$$1 = \left(1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{P_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \right).$$

Il résulte, de cette égalité :

$$P_2 - 1 = 0, \quad P_4 - \frac{4.3}{1.2} P_2 + 1 = 0, \quad P_6 - \frac{6.5}{1.2} P_4 + \frac{6.5}{1.2} P_2 - 1 = 0, \dots;$$

et, en général,

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} P_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} P_{2n-4} - \dots \\ \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2} P_2 \mp 1 = 0. \end{array} \right.$$

Conséquemment,

$$(K) \quad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{5}{1.2.3.4} x^4 + \frac{61}{1.2.3.4.5.6} x^6 + \frac{1385}{1.2 \dots 8} x^8 + \dots (*)$$

M. GUIRETTE soumet au jugement de l'Académie un *appareil inhalateur* de son invention, destiné à faire pénétrer dans les poumons un volume d'air supérieur à celui qui, dans certains cas pathologiques, y entrerait en vertu des mouvements naturels d'inspiration. L'auteur annonce que l'emploi méthodique de cet appareil a donné dans certains cas de phthisie d'excellents résultats, constatés par divers médecins de Paris, de Pau et de Bruxelles.

(Renvoi à l'examen d'une Commission composée de MM. Andral et Rayer.)

M. LAMEYRE présente la figure et la description d'un *appareil de perspective* à l'usage des peintres et spécialement destiné au dessin des monuments.

(Renvoi à l'examen de M. Chasles.)

(*) M. Schlömilch a également traité cette série dans le Recueil déjà cité.