Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

ALGÈBRE. — *Note sur une fonction homogène entière; par* **M. E. Catalan.**

« Plusieurs géomètres, parmi lesquels il suffit de citer MM. Cauchy, Bertrand et Serret, ont indiqué divers procédés qui permettent d'évaluer la fonction

$$\frac{a^{n+p-1}}{f'(a)}+\frac{b^{n+p-1}}{f'(b)}+\ldots+\frac{l^{n+p-1}}{f'(l)}$$

au moyen des coefficients de l'équation $f(x)=0$, dont $a, b, c,\ldots, k, l$, sont les n racines (supposées inégales); mais personne, que je sache, n'a fait attention à l'identité de cette fonction symétrique fractionnaire avec la fonction homogène et entière, du degré p,

$$\mathrm{H}_{n,p}=\sum a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}.$$

Cette identité résulte de la proposition suivante :

» Théorème. Soient $a, b, c,\ldots, k, l$ des quantités quelconques, inégales, en nombre n; et soit, pour abréger,

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l).$$

La fonction entière et homogène des n lettres $a, b, c,\ldots, k, l$, dont p est le degré, est égale à la somme des valeurs que prend la fraction $\frac{x^{n+p-1}}{f'(x)}$ quand y remplace x par $a, b, c,\ldots, k, l$. En d'autres termes,

$$(1)\qquad \mathrm{H}_{n,p}=\sum a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots l^{\lambda}=\frac{a^{n+p-1}}{f'(a)}+\frac{b^{n+p-1}}{f'(b)}+\ldots+\frac{l^{n+p-1}}{f'(l)},$$

les exposants $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \lambda$, entiers et non négatifs, étant déterminés par l'équation

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=p.$$

» Pour démontrer l'équation (1), qui devient identique si n égale 1 ou 2, il suffit de faire attention que

$$\mathrm{H}_{n,p}=\mathrm{H}_{n-1,p}+l\,\mathrm{H}_{n-1,p-1}+l^2\,\mathrm{H}_{n-1,p-2}+\ldots+l^p\,\mathrm{H}_{n-1,0},$$

et d'avoir égard aux relations connues :

$$\mathrm{H}_{n,0}=\frac{a^{n-1}}{f'(a)}+\frac{b^{n-1}}{f'(b)}+\ldots+\frac{l^{n-1}}{f'(l)}=1,$$

$$\frac{a^{n-2}}{f'(a)}+\frac{b^{n-2}}{f'(b)}+\ldots+\frac{l^{n-2}}{f'(l)}=0.$$

» Corollaire. Si l'on multiplie la fonction $H_{n,p}$, qui renferme $C_{p+n-1,n-1}$ termes, par

$$P = (a-b)(a-c)\ldots(a-l) \times (b-c)(b-d)\ldots(b-l) \times \ldots \times (k-l),$$

le produit contiendra seulement n termes.

» Par exemple,

$$\begin{gathered}(a^3 + b^3 + c^3 + a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + abc) \\ \times (a-b)(a-c)(b-c) = a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b).\end{gathered}$$

» *Remarque.* Le dernier énoncé suppose que l'on ne développe pas les produits qui multiplient a^{n+p-1}, b^{n+p-1}, c^{n+p-1},..., l^{n+p-1}. Dans le cas contraire, la fonction $H_{n,p}$. P prend la forme

$$\sum a^{n+p-1} \sum b^{n-2} c^{n-3} \ldots k^1 l^0,$$

d'après un théorème de Vandermonde; et alors elle contient un nombre de termes égal à $1.2.3\ldots n$. »

ASTRONOMIE. — *Note sur les distances respectives des orbites des planètes comparées avec leurs masses* (1); *par* **M. J. Reynaud.**

« Ayant établi, comme je l'ai fait par les considérations précédentes, qu'il existe pour chaque classe de planètes un ordre particulier de symétrie, il reste à rechercher si cette symétrie n'irait pas à une plus grande profondeur, de manière à nous permettre de spéculer, au moins par les lois de probabilité, dans les régions situées au delà de Neptune.

» Je suppose le système solaire transporté dans un quartier de l'univers d'une température assez élevée pour que toutes nos masses soient peu à peu réduites en vapeur, et je le transforme ainsi en anneaux concentriques et contigus. Il est évident que, comme dans une transformation d'équations, rien n'est changé quant au fond, puisque les circonstances seules sont modifiées; et j'arrive de la sorte à me procurer une valeur complexe

(1) Cette Note fait suite à celle qui a été présentée dans la séance du 13 décembre 1858 (*voir* page 957 du présent volume).