Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

dans le chyle, dans la lymphe, dans les sérosités diverses du péritoine, de la plèvre, du péricarde, dans les sérosités morbides, en un mot dans presque tous les liquides albumineux de l'économie. Dans le lait, riche en matières albuminoïdes (caséum et albumine) on trouve un sucre non fermentescible directement, la *lactine*; dans l'œuf des oiseaux, un sucre fermentescible. Cette circonstance que l'albumine est presque toujours accompagnée d'une certaine quantité de sucre, semble une preuve manifeste que ce produit provient bien réellement de la décomposition d'une matière albuminoïde.

» Mon Mémoire se termine par quelques remarques sur la confusion que présentent les faits récemment annoncés, concernant l'existence d'une matière glycogène dans le tissu du foie. Ce défaut rend actuellement impossible tout examen expérimental des faits qui ont été annoncés relativement à ce produit. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Sur la théorie des développées;* *par* **M. E. Catalan.**

(Commissaires, MM. Lamé, Hermite.)

« En lisant les deux Notes récemment publiées par lord Brougham (*Comptes rendus*, juin 1857), j'ai été conduit à chercher quelles sont les développantes de la courbe étudiée par le célèbre Associé de l'Institut. Cette recherche présenterait peu d'intérêt, si elle ne donnait, très-aisément, l'intégrale d'une équation différentielle remarquable, du premier ordre et du quatrième degré, intégrale qu'il serait peut-être difficile d'obtenir par une autre voie.

» L'équation dont il s'agit pouvant, jusqu'à un certain point, être considérée comme un cas particulier de l'équation différentielle des *toroïdes*, je traiterai d'abord celle-ci.

» **1**. Quand les constantes a, b, c satisfont à la relation $a^2 = b^2 + c^2$, l'équation

$$(1) \qquad (ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

représente, comme on sait, la développée de l'ellipse et de la toroïde. On pourrait supposer que, dans le cas où ces constantes sont arbitraires, l'équation (1) appartient à une classe plus générale de courbes. Mais il n'en est rien. En effet, pourvu que a soit différent de b, on peut toujours poser

$$A = \frac{a}{a^2 - b^2} c^2, \qquad B = \frac{b}{a^2 - b^2} c^2;$$

et cette transformation conduit à

$$(2) \qquad (Ax)^{\frac{2}{3}} + (By)^{\frac{2}{3}} = (A^2 - B^2)^{\frac{2}{3}}.$$

» 2. Soit (α, β) le point de la *développante*, correspondant au point (x, y) de la développée (1). On a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{y - \beta}{x - \alpha};$$

d'où

$$(3) \qquad (a^2 d\beta^2 + b^2 d\alpha^2)(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta)^2 = c^4 d\alpha^2 d\beta^2,$$

équation différentielle de la développante.

» 3. Pour intégrer cette équation, commençons par déterminer la longueur s de l'arc de la développée, compris entre le point (x, y) et le point dont les équations sont

$$x = 0, \qquad y = -\frac{c^2}{b}.$$

En posant

$$(4) \qquad ax = c^2 \sin^3 \varphi, \qquad by = -c^2 \cos^2 \varphi,$$

nous aurons

$$(5) \qquad s = \frac{1}{ab}\left[a^3 - (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}\right].$$

De plus, le quart de la développée a pour longueur

$$(6) \qquad l = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

» 4. Soit actuellement θ l'angle formé par la partie positive de l'axe des *ordonnées*, avec la tangente à la développée : $\cot\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}\cot\varphi$; donc

$$(7) \qquad \sin\theta = \frac{b \sin\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}, \quad \cos\theta = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{b^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par h une *constante arbitraire*, on aura, par la propriété fondamentale des développantes,

$$\alpha = x + (l - s + h)\sin\theta, \quad \beta = y + (l - s + h)\cos\theta;$$

c'est-à-dire

$$(8)\quad \alpha = \left[a + \frac{bk}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\right]\sin\varphi,\quad \beta = \left[b + \frac{ak}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\right]\cos\varphi,$$

k étant une nouvelle constante, égale à $h - \frac{b^2}{a}$.

» 5. Le système (8) peut être regardé comme représentant l'intégrale générale de l'équation (3). Pour mettre cette intégrale sous la forme $F(\alpha, \beta, k) = 0$, on élimine la variable auxiliaire φ, et l'on obtient (*)

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - k^2)^2 (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2)^2 \\
&+ 4a^2b^2k^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - k^2)^3 \\
&+ 18a^2b^2k^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - k^2)(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2) \\
&+ 4(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2)^3 - 27a^4b^4k^4 = 0.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation générale des toroïdes : lorsque $k = 0$, elle devient

$$(a^2y^2 + b^2x^2 + a^2b^2)^2 = 0.$$

» 6. Dans l'équation (1), supposons $b = c = a$, nous aurons

$$(A)\qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

La courbe (A) est celle dont lord Brougham s'est occupé. On sait qu'elle peut être regardée, soit comme l'*enveloppe d'une droite* (D), *de longueur constante, glissant sur les côtés d'un angle droit,* soit comme l'*épicycloïde décrite par un point d'une circonférence roulant dans une circonférence quatre fois plus grande.*

» En répétant sur l'équation (A) les calculs précédents, on trouve, au lieu des équations (3), (4), (5), (6), (8), les relations suivantes :

$$(9)\qquad (d\alpha^2 + d\beta^2)(\alpha d\alpha + \beta d\beta)^2 = a^2 d\alpha^2 d\beta^2,$$

$$(10)\qquad x = a\sin^3\varphi,\quad y = -a\cos^3\varphi,$$

$$(11)\qquad s = \frac{3}{2}a\sin^2\varphi,\quad l = \frac{3}{2}a,$$

$$(12)\quad \alpha = \frac{1}{4}(2a + a\cos 2\varphi + k)\sin\varphi,\quad \beta = \frac{1}{4}(2a + a\cos 2\varphi + k)\cos\varphi.$$

» 7. Les formules (12) représentent les développantes de la courbe (A),

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome III, page 555.

ou l'intégrale générale de l'équation (9) : la constante arbitraire k est nulle pour la développante qui passe par *le sommet de la développée*, c'est-à-dire par le point dont les équations sont $x = a\sin^3\frac{\pi}{4}, y = -a\sin^3\frac{\pi}{4}$.

» **8.** Cette développante particulière (B) jouit d'une propriété assez curieuse : *elle est semblable à la développée* (A). De plus, son paramètre est $\frac{1}{2}a$. En effet, si l'on élimine φ entre les équations (12), après avoir supposé $k = 0$, on obtient, par un calcul facile,

$$[4(\alpha^2+\beta^2)-a^2]^3+108a^2(\beta^2-\alpha^2)^2=0; \tag{13}$$

ou, en remplaçant les coordonnées rectangulaires par des coordonnées polaires,

$$(4u^2-a^2)^3+108a^2u^4\cos^2 2\omega=0. \tag{14}$$

Mais, d'un autre côté, l'équation (A) équivaut à

$$(u_1^2-a^2)^3+\frac{27}{4}a^2u_1^4\sin^2 2\omega_1=0; \tag{15}$$

et il est évident que les deux dernières relations rentrent l'une dans l'autre si l'on suppose

$$u_1=2u,\quad \omega_1=\omega+\frac{\pi}{4}.$$

» **9.** *Quand la droite* (D) *glisse sur les deux axes, en enveloppant la courbe* (A), *une parallèle quelconque* (D') *à* (D) *enveloppe une nouvelle courbe* (A') PARALLÈLE *à* (A) : je veux dire que les lignes (A), (A') ont les mêmes normales, et que la longueur de ces normales communes est égale à la distance comprise entre les droites (D), (D'). Cette proposition, presque évidente, permet de résumer ainsi les relations qui existent entre la courbe (A), ses développantes, et les *parallèles* à cette ligne :

» I. *De même que la courbe* (A), *et ses parallèles, sont les enveloppes d'une série de droites parallèles entre elles, et dont l'une, de longueur a, glisse sur les côtés d'un angle droit ; les développantes de ces courbes sont les enveloppes d'une seconde série de droites, parallèles entre elles, et dont l'une, de longueur* $\frac{1}{2}a$, *glisse sur les bissectrices de l'angle droit.*

» II. *A chaque courbe de la première série correspond, dans la seconde série, une courbe semblable : le rapport de similitude est* $\frac{1}{2}$.

» **10.** Lorsque k est différent de zéro, l'élimination de φ, entre les équations (12), conduit à

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} & a[4(\beta^2-\alpha^2)+ak][12(\alpha^2+\beta^2)-3a^2-k^2]^3 \\ & +[16k(a^2+\beta^2)+36a(\beta^2-\alpha^2)+k(5a^2-k^2)] \\ & \times[k(2a^2+\alpha^2+\beta^2)+9a(\beta^2-\alpha^2)]^2=0, \end{aligned}\right.$$

équation des développantes de la courbe (A), ou intégrale générale de l'équation (9). »

PHYSIOLOGIE. — *Observations sur la glycogénie; par* **M. H. Bonnet.**

(Renvoi à l'examen des Commissaires déjà nommés pour diverses communications relatives à la même question : MM. Milne Edwards, Pelouze.)

Des recherches qui font l'objet de cette Note, l'auteur tire les conclusions suivantes, que nous reproduisons textuellement :

« 1°. Il n'y a pas de sucre dans le sang de la veine porte d'un animal nourri avec la viande; il y en a dans le foie et dans les veines sus-hépatiques.

» 2°. La formation posthume de sucre dans le foie indiquée par M. Bernard est parfaitement exacte.

» 3°. Il n'y a pas de sucre dans le sang de la circulation générale d'animaux nourris avec de la viande.

» 4°. Chez les animaux nourris de féculents, on ne trouve pas de sucre dans la veine porte quand la digestion est terminée. Il y a là une coïncidence remarquable avec le résultat négatif qu'on obtient chez l'animal nourri avec de la viande.

» 5°. On a prétendu que le foie n'avait pas de propriété rigoureusement glycogénique; que dans le sang de la veine porte il existait un sucre non fermentescible, ou bien il s'y trouve une matière se rapprochant du sucre, mais qui ne deviendrait sucre qu'à son passage dans le foie. Mais alors, peut-on répondre, le foie serait donc capable de rendre ce sucre fermentescible, ou de changer en sucre la substance quelconque de la série glucique qui se trouve pour le moment à l'état de mythe dans la veine porte? »