Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

où k est réel, et qui soit telle, que $\omega = 0$ et $\frac{d\omega}{ds} = d\delta$ pour $s = 0$. Cela résulte de ce que, lorsque dans une équation de la forme

$$\frac{d^2 p}{ds^2} + Gp = 0$$

on fait diminuer G d'une manière continue, les racines de $p = 0$ vont en augmentant d'une manière continue $\left(p \text{ et } \frac{dp}{ds} \text{ gardant les mêmes valeurs pour } s = 0\right)$. Cela étant, on aura pour cette valeur particulière de ω,

$$\omega'' + \frac{\omega}{RR'} = \frac{\omega}{k^2};$$

mais, ω étant nul aux limites, on a en outre

$$\int \left(\omega'^2 - \frac{\omega^2}{RR'}\right) ds = -\int \omega \left(\omega'' + \frac{\omega}{RR'}\right) ds;$$

donc

$$\int \left(\omega'^2 - \frac{\omega^2}{RR'}\right) ds = -\int \frac{\omega^2}{k^2} ds.$$

Ainsi la variation seconde de l'intégrale $\int ds$ peut devenir négative, et l'arc AMB n'est ni maximum ni minimum entre le point A et le point B. La seconde partie du théorème de Jacobi est donc aussi établie.

» Nous avons dit plus haut qu'une fois le théorème de Jacobi démontré en toute rigueur, on pouvait donner plus de netteté aux énoncés des résultats contenus dans la Note du 18 juin. En effet, on pourra dire que si, dans une surface convexe, le produit RR' des rayons de courbure principaux est moindre que la constante a^2, le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface sera *toujours* moindre que πa. De là résulte que toute surface convexe dont les rayons de courbure principaux ne deviennent jamais infinis, est nécessairement fermée. »

GÉOMÉTRIE. — *Note sur une surface dont les rayons de courbure, en chaque point, sont égaux et de signes contraires; par* **M. E. Catalan.**

« **1.** Les surfaces qui jouissent de la propriété énoncée ont, comme l'on sait, pour équation aux dérivées partielles,

$$(1) \qquad (1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs = 0.$$

5..

On peut essayer de satisfaire à cette relation générale en prenant

$$z = X + Y, \tag{2}$$

X étant une fonction de x, et Y une fonction de y; cette valeur de z donne

$$p = X', \quad q = Y', \quad r = X'', \quad s = 0, \quad t = Y'';$$

puis, par l'équation (1),

$$(1 + X'^2) Y'' + (1 + Y'^2) X'' = 0,$$

ou

$$\frac{X''}{1 + Y'^2} + \frac{Y''}{1 + X'^2} = 0. \tag{3}$$

» **2**. L'équation (3) se décompose évidemment en

$$\frac{X''}{1 + X'^2} = a, \tag{4}$$

$$\frac{Y''}{1 + Y'^2} = -a, \tag{5}$$

a étant une constante arbitraire.

» **3**. Si l'on suppose $a = 0$, on trouve que la surface cherchée est un plan. En laissant de côté ce cas particulier, on déduit de l'équation (4)

$$\text{arc tang} X' = ax + b, \quad X' = \frac{\sin(ax + b)}{\cos(ax + b)},$$

$$X = -\frac{1}{a} l[c \cos(ax + b)]; \tag{6}$$

et, de l'équation (5),

$$Y = \frac{1}{a} l[c' \cos(ay + b')]. \tag{7}$$

» **4**. Au moyen de ces valeurs, la formule (2) devient

$$az = l[c' \cos(ay + b')] - l[c \cos(ax + b)].$$

Par un changement d'unités et une transformation de coordonnées, on réduit cette dernière équation à la forme plus simple

$$z = l \cos y - l \cos x;$$

ou, ce qui est équivalent, à celle-ci :

$$z = l\frac{\cos y}{\cos x}. \tag{8}$$

» 5. La surface représentée par l'équation (8) jouit de propriétés remarquables, que nous allons indiquer rapidement.

» 1°. La trace de la surface, sur le plan des xy, se compose d'une infinité de droites inclinées à 45° et à 135° sur l'axe des x, et qui décomposent le plan en une infinité de carrés égaux.

» 2°. La surface admet un troisième système de droites. Celles-ci, perpendiculaires au plan des xy, divisent en deux parties égales les côtés des carrés déterminés par les premières droites.

» 3°. La section de la surface, par le plan des xz, se compose d'une infinité de branches, toutes égales entre elles, représentées par

$$z = -l\cos x.$$

Toutes ces branches, situées au-dessus de l'axe des x, le touchent aux points déterminés par la formule $x = 2k\pi$. Chaque branche a un axe de symétrie perpendiculaire au plan des xy ; elle a aussi deux asymptotes situées de part et d'autre de cet axe, à la distance $\frac{\pi}{2}$.

» 4°. La section par le plan des yz est égale à la section par le plan des xz ; mais au lieu d'être, comme cette dernière, au-dessus de ce plan, elle est située au-dessous.

» 5° Les sections parallèles au plan des xz sont toutes égales entre elles. Il en est de même pour les sections faites parallèlement au plan des yz.

» 6°. La surface se compose d'une infinité de nappes égales. Chacune d'elles est comprise tout entière entre quatre plans asymptotiques, formant un canal à section carrée, de longueur indéfinie. Les arêtes de ces canaux sont les génératrices parallèles à l'axe des z, dont il a été question ci-dessus. On peut se représenter les sections droites de ces canaux comme un échiquier indéfini, dans lequel les cases noires répondraient aux canaux renfermant des nappes de la surface, les cases blanches correspondant aux espaces vides.

» 7°. Si l'on considère une nappe en particulier, par exemple celle qui entoure l'axe des z, on reconnaît qu'elle a de l'analogie avec le paraboloïde hyperbolique. En effet, la nappe dont il s'agit peut être engendrée par sa seconde section principale, glissant parallèlement à elle-même et dont le sommet décrirait la première section principale, etc.

» 8°. Si l'on trace sur cette nappe un contour fermé quelconque, l'aire de la portion de surface ainsi limitée sera moindre que l'aire d'une autre portion de surface quelconque terminée au même contour.

» 9°. On peut, pour former ce contour, prendre les deux génératrices rectilignes passant par l'origine et une courbe quelconque tracée sur la surface, par exemple celle qui aurait pour équations

$$x = \alpha, \quad z = l\frac{\cos y}{\cos \alpha},$$

α étant moindre que $\frac{\pi}{2}$.

» 10°. On peut aussi, pour former le contour, prendre les deux droites dont il vient d'être question, les deux génératrices verticales qui les rencontrent, et enfin la courbe représentée par

$$z = h, \quad h = l\frac{\cos y}{\cos x}, \text{ etc. »}$$

M. de Chalus adresse une Lettre, relative à sa précédente Note sur une modification qu'il a imaginée pour les *armes de guerre*.

Dans cette Note, mentionnée au *Compte rendu* de la séance du 18 juin, et qui y est inscrite par suite d'une signature peu lisible sous le nom de *Chalier*, l'auteur avait indiqué sommairement une modification qui lui semble devoir assurer aux pièces d'artillerie une durée presque indéfinie, tout en augmentant leur portée, leur force destructive et la précision du tir. « Cette communication, dit M. de Chalus, avait pour objet seulement de prendre date; mais je m'occupe en ce moment de mettre au net un Mémoire dans lequel je donne sur cette invention, et sur deux autres également relatives à l'art de la guerre, tous les détails nécessaires, et c'est ce Mémoire que je désire voir soumis à l'examen de la Commission que l'Académie a bien voulu me désigner dans une de ses précédentes séances. »

(Renvoi à la Commission nommée, qui se compose de MM. Piobert et Morin, et de M. le Maréchal Vaillant.)

M. Jonain prie l'Académie de vouloir bien hâter le travail de la Commission à l'examen de laquelle a été soumis un Mémoire présenté par lui sous le titre de « la Botanique pour tous, ou Série graduée des familles de plantes. »

(Renvoi à la Commission précédemment nommée, qui se compose de MM. Brongniart, Montagne, Tulasne.)