



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.**

Liège [etc.], La Société.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/39398>

**2e sér.:t.6 (1877):** <http://www.biodiversitylibrary.org/item/87387>

Article/Chapter Title: Théorie analytique des lignes à double courbure

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Text, Text, Text, Page 4, Page 5, Page 6, Page 7, Page 8, Page 9, Page 10, Page 11, Page 12, Page 13, Page 14, Page 15, Page 16, Page 17, Page 18, Page 19, Page 20, Page 21, Page 22, Page 23, Page 24, Page 25, Page 26, Page 27, Page 28, Page 29, Page 30, Page 31, Page 32, Page 33, Page 34, Page 35, Page 36, Page 37, Page 38, Page 39, Page 40, Page 41, Page 42, Page 43, Page 44, Page 45, Page 46, Page 47, Page 48, Page 49, Page 50, Page 51, Page 52, Page 53, Page 54, Page 55, Page 56, Page 57, Page 58, Page 59, Page 60, Page 61, Page 62, Page 63, Page 64, Page 65, Page 66, Page 67, Page 68, Page 69, Page 70, Page 71, Page 72, Page 73, Page 74, Page 75, Page 76, Page 77, Page 78, Page 79, Text

Contributed by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,  
Ernst Mayr Library

Sponsored by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,  
Ernst Mayr Library

This page intentionally left blank.

**THÉORIE ANALYTIQUE**

**DES**

**LIGNES A DOUBLE COURBURE;**

**PAR**

**EUGÈNE CATALAN,**

**PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.**

THEORIE ANALYTIQUE

DE LA DOUBLE COURBURE

EUGENE CATALAN

PARIS, Gauthier-Villars, 1900

# THÉORIE ANALYTIQUE

DES

## LIGNES A DOUBLE COURBURE.

### I. Formules préliminaires.

1. THÉORÈME. Si neuf quantités  $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$  satisfont aux six équations

$$\left. \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned} \right\} (1) \quad \left. \begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0; \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

elles satisfont également :

1° Aux six équations

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned} \right\} (3) \quad \left. \begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0; \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

2° Aux neuf équations

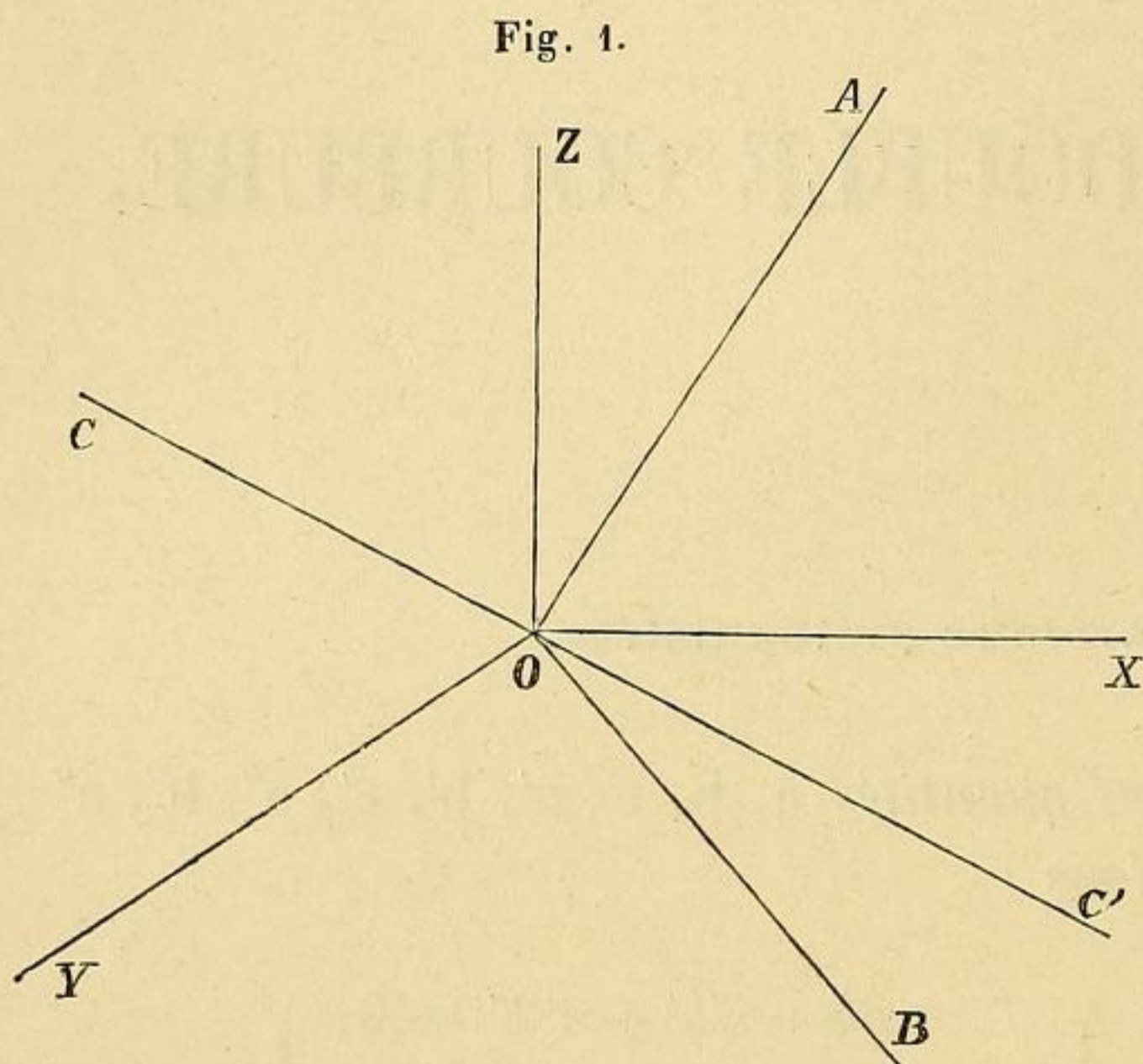
$$\left. \begin{aligned} b'c'' - c'b'' &= \pm a, & c'a'' - a'c'' &= \pm b, & a'b'' - b'a'' &= \pm c, \\ b''c - c'b &= \pm a', & c'a - a'c &= \pm b', & a''b - b''a &= \pm c', \\ bc' - cb' &= \pm a'', & ca' - ac' &= \pm b'', & ab' - ba' &= \pm c''; \end{aligned} \right\} (5)$$

## 5° A l'équation

$$a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb') = \pm 1 \quad (*) \quad (6)$$

2. REMARQUE. Si l'on prend *un système* de valeurs de  $a, a', a'', b, b', b''$  satisfaisant aux équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0;$$



ces six quantités déterminent complètement deux directions **OA, OB** (fig. 1), perpendiculaires entre elles : en effet,  $a, a', a''$  sont les *cosinus directifs* de **OA**; et  $b, b', b''$  les *cosinus directifs* de **OB** (\*\*). Cela posé, les équations

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0, \quad ca + c'a' + c''a'' = 0;$$

ou, ce qui est équivalent, les formules

$$c = \pm (a'b'' - b'a''), \quad c' = \pm (a''b - b''a), \quad c'' = \pm (ab' - ba')$$

déterminent une droite **COC'**, perpendiculaire aux lignes **OA**,

(\*) Voir, par exemple, les *Leçons de Géométrie analytique*, par LEFÉBURE DE FOURCY.

(\*\*) Supposons :  $a = \frac{1}{2}, a' = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$ . On trouve, pour  $a'', b', b''$ , divers systèmes de valeurs, parmi lesquels on peut choisir celui-ci :

$$a'' = +\frac{1}{4}\sqrt{11}, \quad b' = -\frac{1}{18}(1 + \sqrt{255}), \quad b'' = \frac{1}{18}(\sqrt{25} - \sqrt{11}).$$

Les directions **OA, OB** sont donc connues.

OB, et composée de deux *segments* OC, OC' : si les valeurs précédentes, prises avec les signes supérieurs, sont les cosinus directifs de OC, ces mêmes expressions, prises avec des signes contraires, sont les cosinus directifs de OC'. En outre, comme le premier membre de l'égalité (6) change de signe avec les quantités  $c, c', c''$ , il est égal à  $+1$  pour l'une des *directions* OC, OC', et égal à  $-1$  pour la direction opposée. Enfin, ce premier membre étant le déterminant  $\Delta$  des quantités

$$\begin{aligned} & a, a', a'', \\ & b, b', b'', \\ & c, c', c''; \end{aligned}$$

nous convenons, une fois pour toutes, de choisir la direction OC pour laquelle  $\Delta = +1$ . Cette direction est alors déterminée, sans ambiguïté, par les formules

$$c = a'b'' - b'a'', \quad c' = a''b - b''a, \quad c'' = ab' - ba',$$

comprises dans les relations

$$\left. \begin{aligned} b'c'' - c'b'' &= a, & c'a'' - a'c'' &= b, & a'b'' - b'a'' &= c, \\ b''c - c''b &= a', & c''a - a''c &= b', & a''b - b''a &= c', \\ bc' - cb' &= a'', & ca' - ac' &= b'', & ab' - ba' &= c''. \end{aligned} \right\} (7)$$

De plus,

$$\Delta = \sum a (b'c'' - c'b'') = \sum (bc' - cb') a'' = +1 (*) \quad . \quad (8)$$

(\*) On trouve ainsi, en partant des valeurs ci-dessus :

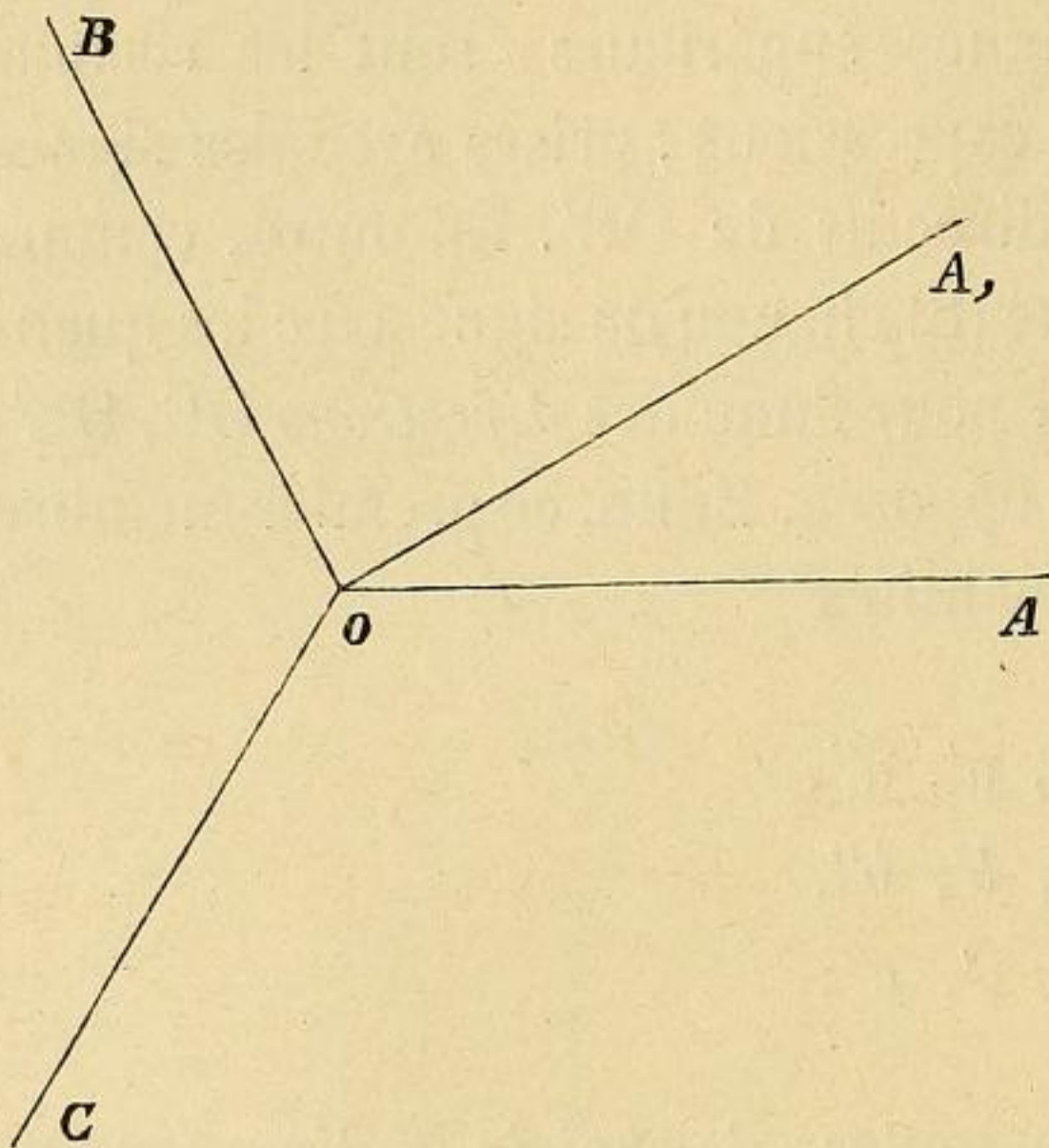
$$c = \frac{1}{6} \sqrt{25}, \quad c' = \frac{1}{56} (4\sqrt{11} - \sqrt{25}), \quad c'' = -\frac{1}{56} (4 + \sqrt{255});$$

puis

$$b'c'' - c'b'' = \frac{1}{2} = a, \quad b''c - c''b = \frac{1}{4} = a', \quad bc' - cb' = \frac{1}{4} \sqrt{11} = a'';$$

etc.

Fig. 2.



**3. THÉORÈME.** Soient deux droites  $OA, OA_1$  (fig. 2) faisant, avec trois axes rectangulaires, des angles ayant pour cosinus :  $a, b, c; a_1, b_1, c_1$ . Soient  $OB$  la commune perpendiculaire à ces droites, et  $OC$  la commune perpendiculaire à  $OA, OB$ . Si  $V$  est l'angle des droites données, les cosinus directifs de  $OB$  sont

$$\pm \frac{bc_1 - cb_1}{\sin V}, \quad \pm \frac{ca_1 - ac_1}{\sin V}, \quad \pm \frac{ab_1 - ba_1}{\sin V};$$

et les cosinus directifs de  $OC$  :

$$\pm \frac{a \cos V - a_1}{\sin V}, \quad \pm \frac{b \cos V - b_1}{\sin V}, \quad \pm \frac{c \cos V - c_1}{\sin V}.$$

En effet :

$$1^\circ \sin^2 V = (bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2;$$

$$2^\circ \sin^2 V = (a \cos V - a_1)^2 + (b \cos V - b_1)^2 + (c \cos V - c_1)^2;$$

$$3^\circ \sum (bc_1 - cb_1)a = 0; \quad 4^\circ \sum (bc_1 - cb_1)a_1 = 0; \quad 5^\circ \sum (a \cos V - a_1)a = 0.$$

**4.** Supposons que les quantités  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  soient fonctions d'une variable indépendante  $t$ , et que les droites  $OA, OA_1$  forment entre elles un angle  $\varepsilon$ , infiniment petit. Alors, si  $l, m, n$  sont les cosinus directifs de  $OB$ , et  $f, g, h$  les cosinus directifs de  $OC$  :

$$f = \pm \frac{da}{\varepsilon}, \quad g = \pm \frac{db}{\varepsilon}, \quad h = \pm \frac{dc}{\varepsilon},$$

$$l = \pm \frac{bdc - cdb}{\varepsilon}, \quad m = \pm \frac{cda - adc}{\varepsilon}, \quad n = \pm \frac{adb - bda}{\varepsilon}.$$



**5. REMARQUE.** La droite  $OC$  est contenue dans un plan parallèle aux lignes  $OA, OA_1$  : l'intervention de  $OB$  est donc inutile. En outre, le cosinus de l'angle  $BOA_1$  est infiniment petit, et égal à  $\varepsilon$ .

**6.** Dorénavant, nous représenterons par  $a', b', c', a'', b'', c'', \dots$  les dérivées successives de  $a, b, c$ . Au moyen de cette notation, les dernières formules deviennent

$$f = \pm a' \frac{dt}{\varepsilon}, \quad g = \pm b' \frac{dt}{\varepsilon}, \quad h = \pm c' \frac{dt}{\varepsilon},$$

$$l = \pm (bc' - cb') \frac{dt}{\varepsilon}, \quad m = \pm (ca' - ac') \frac{dt}{\varepsilon}, \quad n = \pm (ab' - ba') \frac{dt}{\varepsilon};$$

ou, sous une forme plus simple :

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \pm \frac{dt}{\varepsilon}, \quad \dots \quad (9)$$

$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \pm \frac{dt}{\varepsilon} \quad \dots \quad (10)$$

**7. REMARQUE.** La propriété exprimée par les proportions (9) peut être énoncée ainsi :

*Soient deux droites consécutives  $A, A_1$ , faisant entre elles un angle infiniment petit  $\varepsilon$ . Soit  $D$  une perpendiculaire à  $A$ , située dans un plan parallèle à  $A, A_1$ . Soient enfin  $a, b, c$  les cosinus directs de  $A$ , et  $f, g, h$  les cosinus directs de  $D$ . On a*

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \pm \frac{dt}{\varepsilon}, \quad \dots \quad (11)$$

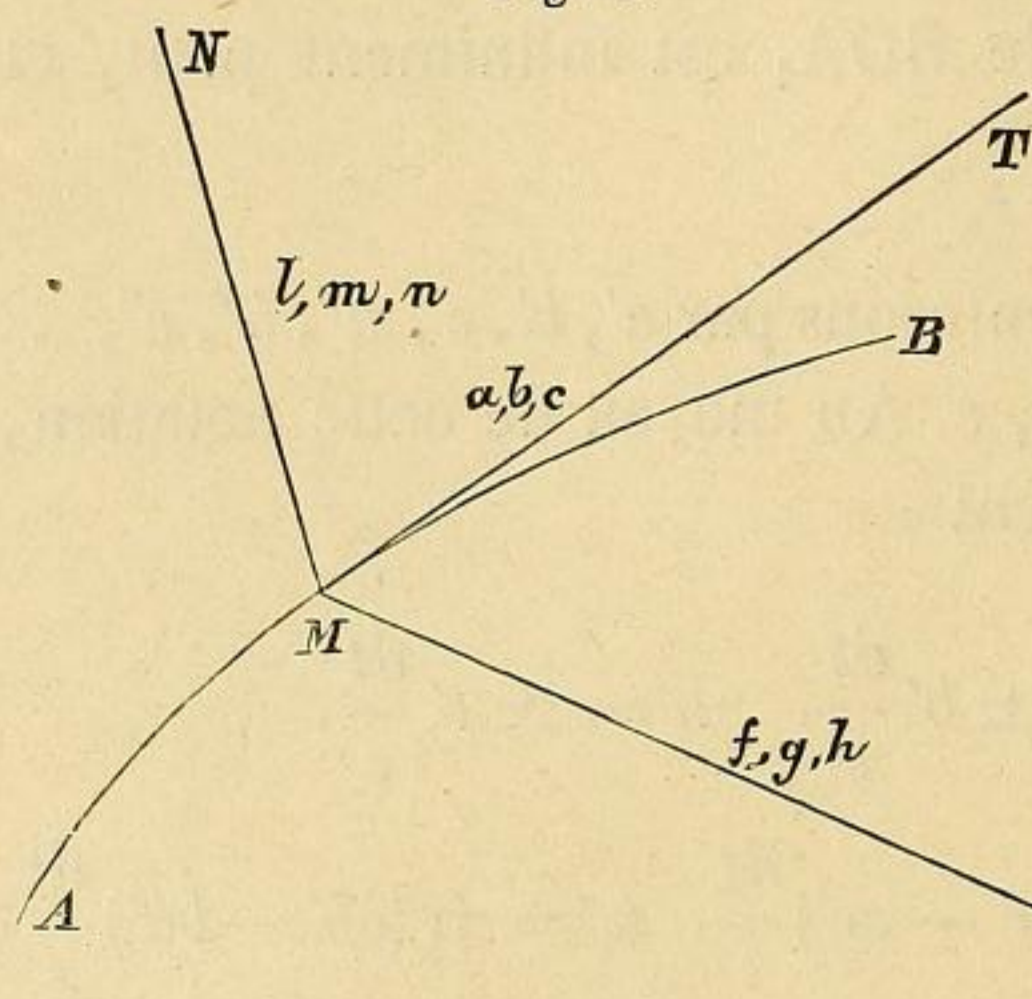
*$a', b', c'$  étant les dérivées de  $a, b, c$ , relativement à la variable indépendante  $t$  (\*).*

(\*) Si les cosinus directs de  $A$ , au lieu d'être  $a, b, c$ , sont simplement proportionnels à ces quantités, l'on a toujours

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'}.$$

## II. Tangente, normale principale, binormale, etc.

Fig. 3.



8. Soient, en un point quelconque M d'une courbe AMB (fig. 3) : MT la *tangente*; MC le *rayon de courbure*, ou la *normale principale*; MN la perpendiculaire à MT et MC, ou la *binormale* (\*).

On peut convenir que :  
 1° MT est la *direction de la vitesse* dont est animé le point décrivant M; 2° MC est dirigée du point M vers le centre C de courbure; 3° le *rayon de courbure*,  $\rho$ , est positif; 4° MN est le *segment de la binormale* pour lequel  $\Delta = +1$  (2).

En vertu de ces conventions et des notations ci-dessus, les égalités (7) deviennent

$$\left. \begin{aligned} a &= gn - hm, & f &= cm - bn, & l &= bh - cg, \\ b &= hl - fn, & g &= an - cl, & m &= cf - ah, \\ c &= fm - gl, & h &= bl - am, & n &= ag - bf. \end{aligned} \right\} . \quad (12)$$

9. Le *plan normal* NMC, le *plan osculateur* TMC et le *plan rectifiant* (\*\*) ont pour équations, respectivement :

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$f(X - x) + g(Y - y) + h(Z - z) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

10. Désignons par  $\varepsilon$  l'*angle de contingence*; par  $\eta$  l'*angle de torsion*; enfin par  $\omega$  l'*angle de deux normales principales consécutives*; de manière que

$$\varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \quad \eta^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2, \quad \omega^2 = df^2 + dg^2 + dh^2. \quad (16)$$

(\*) SAINT-VENANT (*Journal de l'École polytechnique*, 50<sup>e</sup> Cahier).

(\*\*) On verra, plus loin, la raison de cette dénomination, due à Lancret.

Soient encore :  $\rho$  le rayon de courbure;  $r$  le rayon de torsion;  $s$  l'arc  $AM$ ,  $A$  étant un point fixe. On a

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \quad \eta = \frac{ds}{r} \quad . . . . . (17)$$

De même, on peut faire

$$\omega = \frac{ds}{L}, \quad . . . . . (18)$$

$L$  étant une certaine longueur, affectée d'un signe convenable.

**11.** On tire, des équations (16), (17), (18) :

$$\frac{1}{\rho} = + \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}, \quad . . . . . (19)$$

$$\frac{1}{r} = \pm \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}, \quad . . . . . (20)$$

$$\frac{1}{L} = \pm \sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}; \quad . . . . . (21)$$

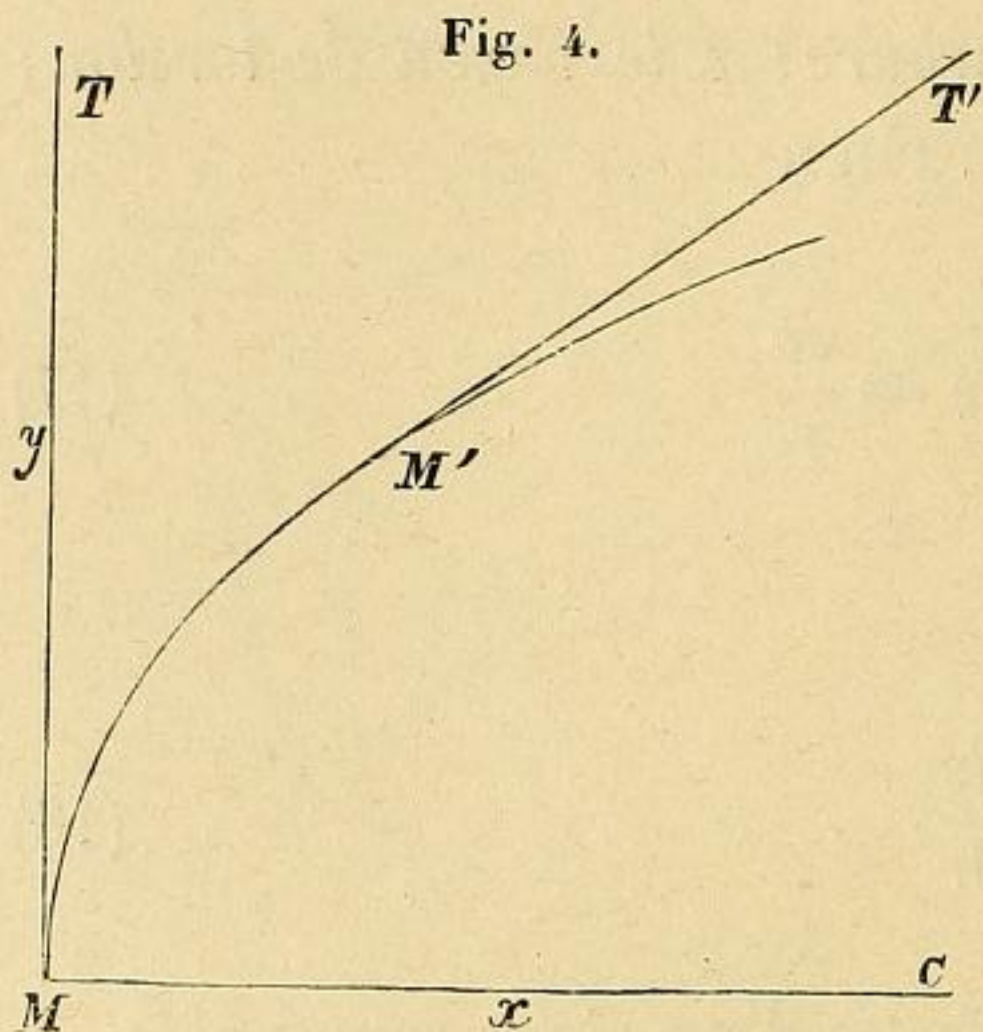
$s$  étant la variable indépendante.

**12.** Au moyen de la valeur de  $\varepsilon$  (17), les proportions (9) et (10) deviennent

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \pm \rho,$$

$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \pm \rho.$$

**13. REMARQUES. I.** On doit prendre les signes supérieurs ensemble, sans quoi, comme on le reconnaît facilement, ces proportions ne s'accorderaient pas avec les formules (12).



II. Considérons le cas particulier de  $a = 0, b = 1, c = 0$ . D'après la figure 4,  $a$  augmente; donc  $a'$  est positif. De plus,  $f$  est également positif. Par conséquent, les relations précédentes doivent être écrites ainsi :

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \rho, \quad (22)$$

$$\frac{l}{bc' - cb'} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - ba'} = \rho \quad (23)$$

III. De l'équation

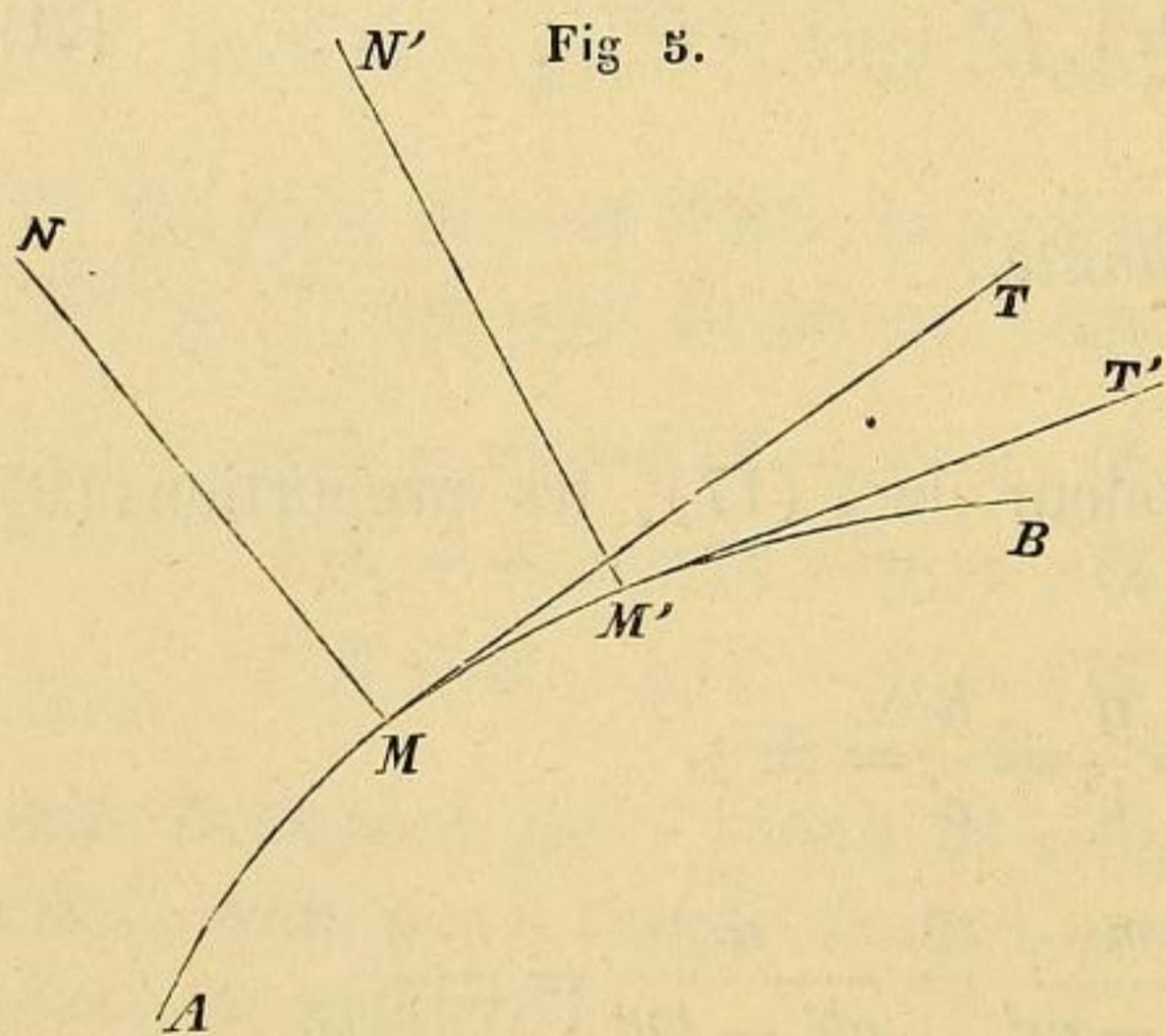
$$al + bm + cn = \sum al = 0,$$

on conclut

$$\sum al' + \sum la' = 0.$$

La seconde somme est nulle, en vertu des proportions (22); donc

$$al' + bm' + cn' = 0. \quad (24)$$



Cette relation prouve que la tangente MT (fig. 5) est perpendiculaire à deux binormales consécutives(\*); ou, ce qui est équivalent : la tangente MT est l'intersection de deux plans osculateurs consécutifs(\*\*).

IV. Conséquemment(4), les proportions (9) et (10)

(\*) Cette propriété, assez évidente, est pour ainsi dire conjuguée de celle-ci : la binormale MN est perpendiculaire à deux tangentes consécutives MT, M'T'; laquelle définit la binormale.

(\*\*) On vérifie cette proposition en prenant la dérivée de

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0; \quad (14)$$

sont applicables aux droites  $MN, M'N'$ , à leur *perpendiculaire*  $MT$ , et à la droite  $MC$ , *perpendiculaire* à  $MN, MT$ . Ainsi ( $\eta$  remplaçant  $\varepsilon$ ) :

$$\frac{f}{l'} = \frac{g}{m'} = \frac{h}{n'} = \pm r, \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$\frac{a}{mn' - nm'} = \frac{b}{nl' - ln'} = \frac{c}{lm' - ml'} = \pm r \quad \dots \dots (26)$$

**14. THÉORÈME.** *Si les tangentes d'une courbe  $C_1$  sont parallèles aux binormales d'une courbe  $C$  : 1° réciproquement, les tangentes de  $C$  sont parallèles aux binormales de  $C_1$ ; 2° les normales principales des deux courbes sont, respectivement, parallèles; 3° l'angle de torsion de chacune des courbes est égal à l'angle de contingence de l'autre.*

Ces diverses propriétés sont des conséquences immédiates de la Remarque III, et de la *symétrie* des équations (22), (25). En effet :

1° La binormale  $M_1N_1$ , au point  $M_1$  *conjugué* de  $M$ , est perpendiculaire à deux tangentes consécutives de  $C_1$ ; celles-ci sont parallèles, respectivement, à deux binormales consécutives de  $C$ ; donc (Remarque III),  $M_1N_1$  est parallèle à  $MT$ .

2° Les angles droits  $TMN, N_1M_1T_1$  ayant leurs côtés respectivement parallèles, les perpendiculaires  $MC, M_1C_1$  aux plans de ces angles, sont parallèles (\*).

3° L'angle de contingence de  $C_1$  a les côtés parallèles à deux binormales de  $C$ , consécutives; donc  $\varepsilon_1 = \eta$ . De même  $\varepsilon = \eta_1$ .

savoir

$$l'(X - x) + m'(Y - y) + n'(Z - z) = 0.$$

D'après la relation (24), le plan représenté par cette équation contient  $MT$ . De plus, à cause des égalités (25), ce plan coïncide avec le plan rectifiant, ou encore : tout plan, tangent à une surface développable, est osculateur relativement à l'arête de rebroussement.

(\*) Ceci résulte aussi, nous venons de le dire, des équations (22), (25). Pour passer de la courbe  $C$  à la courbe  $C_1$ , il suffit de changer  $a, b, c$  en  $l, m, n$ , et *vice versa*. Mais, d'après les équations citées, les *cosinus*  $f, g, h$  sont les mêmes fonctions, soit de  $a', b', c'$ , soit de  $l', m', n'$ ; donc, etc.

**15. REMARQUE.** Les dernières égalités peuvent être écrites ainsi :

$$\frac{ds_1}{\rho_1} = \frac{ds}{r}, \quad \frac{ds}{\rho} = \frac{ds_1}{r_1}.$$

Par conséquent,

$$\rho\rho_1 = rr_1.$$

Ainsi, les courbes  $C$ ,  $C_1$  jouissent encore de cette propriété : *en deux points correspondants, le rectangle des rayons de courbure est équivalent au rectangle des rayons de torsion* (\*).

### III. Formules de Frenet (\*\*).

**16.** Il résulte, des relations (22), (25) :

$$\frac{l'}{a'} = \frac{m'}{b'} = \frac{n'}{c'} = \pm \frac{\rho}{r}. \quad \dots \quad (27)$$

(\*) On verra plus loin que la courbe  $C_1$  est, si l'on veut, l'enveloppe des droites polaires de  $C$ . En attendant, nous croyons pouvoir faire remarquer l'importance des relations (22), (25), corollaires du théorème démontré dans le § I (3). Ces relations ne sont pas nouvelles; mais l'on n'y avait pas fait, croyons-nous, suffisamment attention.

Ajoutons que, pour les établir de la manière la plus directe et la plus simple, on peut procéder comme il suit :

1° D'après la définition de la binormale, les quantités  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , qui satisfont à l'équation  $\sum aa' = 0$ , satisfont aussi à la condition  $\sum la' = 0$ .

D'un autre côté, les cosinus  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sont déterminés (à un facteur près), par les égalités  $\sum af = 0$ ,  $\sum lf = 0$ , qui ne diffèrent pas des premières; donc

$$\frac{f}{a'} = \frac{g}{b'} = \frac{h}{c'} = \pm \rho.$$

2° La condition  $\sum la' = 0$  conduit, comme on l'a déjà vu, à celle-ci :  $\sum al' = 0$ . On a donc, simultanément

$$\sum al' = 0, \quad \sum ll' = 0; \quad \sum af = 0, \quad \sum lf = 0;$$

et, par conséquent,  $\frac{f}{l'} = \frac{g}{m'} = \frac{h}{n'} = \pm \frac{1}{r}$ .

(\*\*) Ces remarquables formules, conséquences des égalités (21), (24) sont souvent, mais à tort, attribuées à M. Serret.

Ainsi : 1° les dérivées  $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$  sont dans un rapport constant avec les dérivées  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ; 2° abstraction faite du signe, ce rapport commun est celui de la seconde courbure à la première.

**17.** Pour un motif qui sera indiqué plus loin, nous prendrons le dernier rapport (27) égal à  $-\frac{\rho}{r}$ . Au moyen de cette convention, les égalités (26), (25), (27) deviennent

$$\frac{a}{mn' - nm'} = \frac{b}{nl' - ln'} = \frac{c}{lm' - ml'} = -r, \dots \quad (28)$$

$$\frac{f}{l'} = \frac{g}{m'} = \frac{h}{n'} = -r, \dots \dots \dots \quad (29)$$

$$\frac{l'}{a'} = \frac{m'}{b'} = \frac{n'}{c'} = -\frac{\rho}{r} \dots \dots \dots \quad (30)$$

En outre (22), (29) :

$$f = a'\rho = -l'r, \quad g = b'\rho = -m'r, \quad h = c'\rho = -n'r. \quad (31)$$

**18.** Les dernières relations permettent de transformer utilement quelques-unes des égalités (12). Par exemple,

$$a = gn - hm = \rho(b'n - c'm) = -r(m'n - n'm).$$

Ainsi :

$$b'n - c'm = \frac{a}{\rho}, \quad c'l - a'n = \frac{b}{\rho}, \quad a'm - b'l = \frac{c}{\rho}; \dots \quad (52)$$

$$mn' - nm' = \frac{a}{r}, \quad nl' - ln' = \frac{b}{r}, \quad lm' - ml' = \frac{c}{r} \dots \quad (53)$$

De même :

$$bc' - cb' = \frac{l}{\rho}, \quad ca' - ac' = \frac{m}{\rho}, \quad ab' - ba' = \frac{n}{\rho}; \dots \quad (54)$$

$$bn' - cm' = -\frac{l}{r}, \quad cl' - an' = -\frac{m}{r}, \quad am' - bl' = -\frac{n}{r}. \quad (55)$$

**19.** Les valeurs de  $f$ ,  $g$ ,  $h$  (12) donnent encore lieu à des formules simples, trouvées aussi par M. Frenet. On a, en prenant la dérivée,

$$f' = (cm' - bn') + (mc' - nb).$$

D'après les relations (52), (55), le premier binôme égale  $-\frac{a}{\rho}$ , le second,  $\frac{l}{r}$ . Donc

$$f' = \frac{l}{r} - \frac{a}{\rho}, \quad g' = \frac{m}{r} - \frac{b}{\rho}, \quad h' = \frac{n}{r} - \frac{c}{\rho} \dots \dots \dots (56)$$

**20. Autres formules.** 1° A cause des valeurs de  $f, g, h$  (51), les dernières relations peuvent être écrites des deux manières suivantes :

$$\frac{l}{r} - \frac{a}{\rho} = a''\rho + a'\rho', \quad \frac{m}{r} - \frac{b}{\rho} = b''\rho + b'\rho', \quad \frac{n}{r} - \frac{c}{\rho} = c''\rho + c'\rho'; \quad (57)$$

$$\frac{a}{r} - \frac{l}{\rho} = l''r + l'r', \quad \frac{b}{\rho} - \frac{m}{r} = m''r + m'r', \quad \frac{c}{\rho} - \frac{n}{r} = n''r + n'r'. \quad (58)$$

2° Si l'on élimine  $\rho'$  entre les deux dernières des équations (57), on trouve

$$\rho(b'c'' - c'b'') = \frac{1}{r}(nb' - mc') + \frac{1}{\rho}(bc' - cb');$$

ou, par les formules (52), (54) :

$$b'c'' - c'b'' = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho} \right), \quad c'a'' - a'c'' = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{b}{r} + \frac{m}{\rho} \right), \quad a'b'' - b'a'' = \left( \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho} \right). \quad (59)$$

3° Les équations (58) donnent, semblablement :

$$m'n'' - n'm'' = \frac{1}{r^2} \left( \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho} \right), \quad n'l'' - l'n'' = \frac{1}{r^2} \left( \frac{b}{r} + \frac{m}{\rho} \right), \quad l'm'' - m'l'' = \frac{1}{r^2} \left( \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho} \right). \quad (40)$$

4° Différenciant la première des formules (54), on a

$$bc'' - cb'' = \frac{\rho l' - l \rho'}{\rho^2};$$

c'est-à-dire (29) :

$$bc'' - cb'' = - \frac{\rho f + l r \rho'}{r \rho^2}.$$

Ainsi

$$bc'' - cb'' = - \frac{\rho f + l r \rho'}{r \rho^2}, \quad ca'' - ac'' = - \frac{\rho g + m r \rho'}{r \rho^2}, \quad ab'' - ba'' = - \frac{\rho h + n r \rho'}{r \rho^2}. \quad (41)$$



5° En vertu des valeurs (31), les relations (39), (40) sont comprises dans celles-ci :

$$gh' - hg' = \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho}, \quad hf' - fh' = \frac{b}{r} + \frac{m}{\rho}, \quad fg' - gf' = \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho}. \quad (42)$$

IV. Théorème de Lancret.

21. Des formules (36) on conclut, à cause de l'égalité (21) :

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}; \quad \dots \dots \dots (45)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\omega^2 = \eta^2 + \varepsilon^2. \quad \dots \dots \dots (44)$$

Ainsi, les trois angles infiniment petits  $\omega, \eta, \varepsilon$  sont tels, que le carré de la mesure du premier est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres. Ce théorème est dû à Lancret (\*).

22. REMARQUES. I. Si les petits côtés d'un triangle rectangle sont  $AB = \rho, AC = r$ , la hauteur  $AH$ , perpendiculaire à l'hypoténuse (fig. 7), représente  $L$  (abstraction faite du signe). En effet,

$$\overline{AH}^2 \cdot \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2,$$

ou

$$\overline{AH}^2 (r^2 + \rho^2) = r^2 \rho^2;$$

etc.

II. Soit un angle trièdre, infiniment petit, dont les faces sont

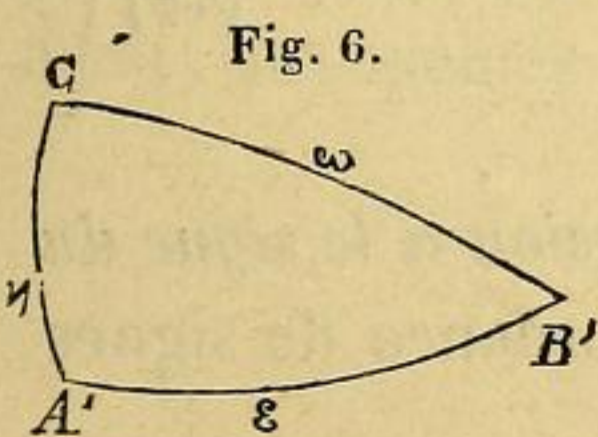


Fig. 6.

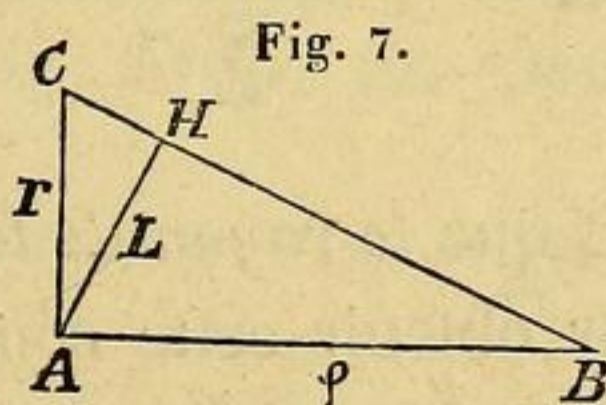


Fig. 7.

$\omega, \eta, \varepsilon$ . Soit  $A'B'C'$  (fig. 6) le triangle sphérique correspondant : ce triangle sphérique est semblable au triangle

rectiligne  $ABC$  (fig. 7).

(\*) Mémoires des savants étrangers, t. I, p. 450.

En premier lieu, l'égalité (44) prouve que l'angle  $A'$  est droit. De plus, on a simultanément :

$$\frac{\sin A}{\frac{1}{L}} = \frac{\sin B}{\frac{1}{r}} = \frac{\sin C}{\frac{1}{\rho}},$$

$$\frac{\sin A'}{\omega} = \frac{\sin B'}{\eta} = \frac{\sin C'}{\varepsilon};$$

done

$$\sin A' = 1 = \sin A, \quad \sin B' = \frac{L}{r} = \sin B, \quad \sin C' = \frac{L}{\rho} = \sin C.$$

#### V. Valeur de $r$ , $\rho$ , $L$ .

**23.** *Valeur du rayon de torsion.* D'après l'égalité  $\sum la' = 0$  (24), on a :

$$\sum l'a' = -\sum la''; \quad \dots \dots \dots (45)$$

ou, par les formules (23) :

$$\sum l'a' = -\rho \sum (bc' - cb') a'' = -\rho \Delta. \quad \dots \dots (46)$$

D'un autre côté (31),  $l'a' = -\frac{f^2}{r\rho}$ ; donc

$$\sum l'a' = -\frac{1}{r\rho}. \quad \dots \dots \dots (47)$$

Conséquemment,

$$\frac{1}{r} = \rho^2 \Delta = \frac{\sum (ab' - ba') c''}{\sum a'^2}. \quad \dots \dots (48) (*)$$

**24.** REMARQUE. On voit que le rayon de torsion a le signe du déterminant  $\Delta$ . C'est pour obtenir cette concordance de signes que nous avons supposé (16)  $\frac{l'}{a'} = -\frac{\rho}{r}$ .

(\*) Cette démonstration est plus simple que celle dont j'ai fait usage dans le *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*.

**25.** *Conditions pour qu'une courbe soit plane.* Elle est, tout simplement,

$$\Delta = \sum (ab' - ba') c' = 0. \quad \dots \quad (49)$$

En effet, si, en chaque point de la ligne donnée, l'angle de torsion est nul, la ligne est plane; et réciproquement.

**26.** *Expression nouvelle du rayon de courbure.* Si l'on part de la relation  $\sum al' = 0$  (23), on trouve, par un calcul semblable au précédent :

$$\sum a'l' = - \sum al'' = - r \sum (mn' - nm') l' = - \frac{1}{\rho r};$$

puis, à cause de la formule (20) :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum (lm' - ml') n''}{\sum l'^2} \quad \dots \quad (50)$$

Cette expression, comparée à la valeur de  $\frac{1}{r}$  (48), achève de justifier nos remarques sur la *réciprocité* entre la tangente et la binormale.

**27.** REMARQUE. Si l'on écrit ainsi les formules (48), (50) :

$$\sum (ab' - ba') c' = \frac{1}{r \rho^2}, \quad \sum (lm' - ml') n'' = \frac{1}{\rho r^2},$$

et que l'on ait égard à l'équation (47), on trouve cette *identité* :

$$\sum (ab' - ba') c' \times \sum (lm' - ml') n'' = - [\sum a'l']^5. \quad \dots \quad (51)$$

**28.** *Autres expressions de  $\frac{1}{\rho}$ ,  $\frac{1}{r}$ .* Elles résultent, immédiatement, des égalités (32) à (36). En effet, il est visible que

$$\frac{1}{\rho} = \sum a(b'n - c'm) = \sum (ab' - ba') n, \quad \dots \quad (52)$$

$$\frac{1}{r} = \sum (mn' - nm') a, \quad \dots \quad (53)$$

$$\frac{1}{\rho} = - \sum af', \quad \frac{1}{r} = \sum lf'. \quad \dots \quad (54)$$

**29. REMARQUE.** Les relations (39), (40) donnent celles-ci :

$$\frac{1}{\rho^3} = \sum (b'c'' - c'b'')l, \quad \frac{1}{r^3} = \sum (m'n'' - n'm'')a; \quad . \quad . \quad (55)$$

d'où l'on conclut, par la comparaison avec (52), (53), ces nouvelles *identités* :

$$\left. \begin{aligned} \sum (a'b'' - b'a'')n &= \left[ \sum (ab' - ba')n \right]^5, \\ \sum (m'n'' - n'm'')a &= \left[ \sum (mn' - nm')a \right]^5. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (56)$$

**30. Valeurs de  $\frac{1}{L^2}$ .** Des relations (39), (40), on conclut, en ayant égard au Théorème de Lancret :

$$\sum (a'b'' - ba'')^2 = \frac{1}{\rho^4 L^2}, \quad \sum (l'm'' - m'l'')^2 = \frac{1}{r^4 L^2}.$$

Conséquemment,

$$\frac{\sum (a'b'' - ba'')^2}{(a'^2 + b'^2 + c'^2)^2} = \frac{\sum (l'm'' - m'l'')^2}{(l'^2 + m'^2 + n'^2)^2} = \frac{1}{L^2} \quad . \quad . \quad (57)$$

**31. REMARQUE.** D'après cette double égalité, la longueur  $L$  est une même fonction, soit des quantités qui se rapportent à la tangente, soit de celles qui se rapportent à la binormale. Cette proposition, à peu près évidente par la considération des courbes conjuguées  $C, C_1$  (14) (\*), est une confirmation nouvelle des Remarques précédentes (13, 14, 26).

#### VI. Quelques sommations (\*\*).

**32.** A cause de  $\sum a'^2 = \frac{1}{\rho^2}$ ,  $\sum aa' = 0$ , il est d'abord visible que

$$\sum aa'' = -\frac{1}{\rho^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

$$\sum a'a'' = -\frac{1}{3} \sum aa''' = -\frac{\rho'}{\rho^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

(\*) Elle exprime que les angles  $\omega, \omega_1$  sont égaux.

(\*\*) La plupart sont tirées, soit du Mémoire de M. Saint-Venant, soit des *Recherches sur les surfaces gauches* (MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE).

De même,

$$\sum ll'' = -\frac{1}{r^2}, \dots \dots \dots (60)$$

$$\sum l'l'' = -\frac{1}{5} \sum ll''' = -\frac{r'}{r^5} \dots \dots \dots (61)$$

**33.** On vient de voir que

$$\sum (a'b'' - b'a'')^2 = \frac{1}{\rho^4 L^2}, \quad \sum (l'm'' - m'l'')^2 = \frac{1}{r^4 L^2} \quad (62)$$

**34.** Les équations (37), (38), combinées avec (59), (61), donnent aisément :

$$\sum a''^2 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{L^2} + \frac{\rho'^2}{\rho^2} \right)^{(*)}, \quad \sum l''^2 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{L^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \dots \dots (63)$$

**35.** D'après les formules (41) :

$$\sum (ab'' - ba'')^2 = \frac{1}{r^2 \rho^4} (\rho^2 + r^2 \rho'^2) \dots \dots \dots (64)$$

De même,

$$\sum (lm'' - ml'')^2 = \frac{1}{\rho^2 r^4} (r^2 + \rho^2 r'^2) \dots \dots \dots (65)$$

**36.** Si l'on écrit ainsi la première des égalités (39) :

$$\rho^2 (b'c'' - c'b'') = \frac{a}{r} + (bc' - cb'),$$

on conclut

$$\rho^2 \sum (b'c'' - c'b'') a''' = \frac{1}{r} \sum aa''' + \sum (bc' - cb') a'''.$$

Mais (23, 32) :

$$\sum (bc' - cb') a'' = \frac{1}{r \rho^2}, \quad \sum aa''' = 5 \frac{\rho'}{\rho^5};$$

(\*) Cette relation, attribuée à M. Hermite, par M. de Saint-Germain, se trouve déjà dans le *Mémoire sur les courbes non planes*.

donc, en négligeant des sommes nulles,

$$\sum (bc' - cb') a''' = \left(\frac{1}{r\rho^2}\right)' = -\left(\frac{r'}{r^2\rho^2} + 2\frac{\rho'}{r\rho^3}\right); \dots (66)$$

puis

$$\sum (b'c'' - c'b'') a''' = \frac{1}{\rho^5} \left(\frac{\rho}{r}\right)' \dots (67)$$

Un simple changement de lettres donne ensuite :

$$\sum (mn' - nm') l'' = \left(\frac{1}{r^2\rho}\right)' = -\left(\frac{\rho'}{r^2\rho^2} + 2\frac{r'}{r^3\rho}\right), \dots (68)$$

$$\sum (m'n'' - n'm'') l''' = \frac{1}{r^5} \left(\frac{r}{\rho}\right)' \dots (69)$$

**37.** Pour évaluer  $\sum (gh' - hg') f''$ , rappelons-nous que **(20, 17)** :

$$gh' - hg' = \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho}, \quad f'' = a'\rho'' + 2a''\rho' + a'''\rho;$$

d'où résulte, si l'on néglige des quantités nulles,

$$\sum (gh' - hg') f'' = 2\frac{\rho'}{r} \sum aa'' + \frac{\rho}{r} \sum aa''' + 2\frac{\rho'}{\rho} \sum la'' + \sum la'''$$

Or **(32, 12)** :

$$\sum aa'' = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \sum aa''' = 3\frac{\rho'}{\rho^3}, \quad l = \rho(bc' - cb');$$

done,

$$\sum (gh' - hg') f'' = \frac{\rho'}{r\rho^2} + 2\rho' \sum (bc' - cb') a'' + \rho \sum (bc' - cb') a''';$$

et, par les formules (48), (66) :

$$\sum (gh' - hg') f'' = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho}{r}\right)' \dots (70)$$

**38. REMARQUES. I.** Si, au lieu de la valeur précédente de  $f''$ , on emploie celle-ci :

$$f'' = -l'r'' - 2l''r' - l'''r,$$

on trouve, en opérant comme dans le dernier calcul,

$$\sum (gh' - hg') f'' = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)'$$

Conséquemment, l'équation

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\rho}{r}\right)' + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{\rho}\right)' = 0$$

doit être identique. C'est ce qui a lieu.

II. L'élimination de  $\left(\frac{\rho}{r}\right)'$ , entre les équations (67), (70), donne

$$\frac{\sum (b'c'' - c'b'') a'''}{\sum (gh' - hg') f''} = \frac{1}{\rho^3};$$

puis (55) :

$$\sum (hg' - gh') f'' = \frac{\sum (b'c'' - c'b'') a'''}{\sum (b'c'' - c'b'') l} \quad \dots \quad (71)$$

On trouve de même, eu égard à la première Remarque,

$$\sum (hg' - gh') f'' = -\frac{\sum (m'n'' - n'm'') l'''}{\sum (m'n'' - n'm'') a} \quad \dots \quad (72)$$

**39. De**

$$a'b'' - b'a'' = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{c}{r} + \frac{n}{\rho}\right), \quad \dots \quad (39)$$

on déduit

$$a'b''' - b'a''' = -2\frac{\rho'}{\rho^3} \left(\frac{c}{r} + \frac{n}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{rc' - cr'}{r^2} + \frac{\rho n' - n\rho'}{\rho^2}\right).$$

Mais  $\frac{c'}{r} + \frac{n'}{\rho} = 0$  (50); donc

$$a'b''' - b'a''' = -\frac{c}{r\rho^2} \left( \frac{2\rho'}{\rho} + \frac{r'}{r} \right) - 3 \frac{n\rho'}{\rho^4};$$

puis

$$\sum (a'b''' - b'a''')^2 = \frac{1}{r^2\rho^4} \left( \frac{2\rho'}{\rho} + \frac{r'}{r} \right)^2 + 9 \frac{\rho'^2}{\rho^8},$$

ou

$$\sum (a'b''' - b'a''')^2 = \left[ \left( \frac{1}{\rho^5} \right)' \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{r\rho^2} \right)' \right]^2. \quad (75)$$

Les formules (40) donnent, semblablement,

$$\sum (l'm''' - m'l''')^2 = \left[ \left( \frac{1}{r^3} \right)' \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{r^2\rho} \right)' \right]^2. \quad (74)$$

**40.** On peut conclure, de chacune de ces relations, une identité assez remarquable.

Reprenons les formules

$$\frac{1}{\rho^3} = (a'^2 + b'^2 + c'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{r\rho^2} = \sum (bc' - cb') a''.$$

Il en résulte :

$$\left( \frac{1}{\rho^3} \right)' = 3 (a'^2 + b'^2 + c'^2)^{\frac{1}{2}} (a'a'' + b'b'' + c'c''),$$

$$\left( \frac{1}{r\rho^2} \right)' = \sum (bc' - cb') a'''.$$

L'égalité (73) se transforme donc ainsi :

$$\sum (a'b''' - b'a''')^2 = 9 \sum a'^2 \left[ \sum a'a'' \right]^2 + \left[ \sum (bc' - cb') a''' \right]^2. \quad (75) (*)$$

(\*) 1° Si l'on substitue  $3\sum a'a''$  à  $-\sum aa'''$  (59), et qu'en même temps, pour l'homogénéité, on multiplie le premier membre par  $\sum a^2$ , on trouve l'identité

$$\sum a^2 \sum (a'b''' - b'a''')^2 = \sum a'^2 \left[ \sum aa''' \right]^2 + \left[ \sum (bc' - cb') a''' \right]^2, \quad (A)$$



On obtient, de même,

$$\sum (l'm''' - m'l''')^2 = 9 \sum l'^2 [\sum l'l'']^2 + [\sum (m'n'' - n'm'') l''']^2. \quad (76)$$

41. Pour terminer ce Chapitre, nous chercherons encore  $\sum a'''^2$ .

On a trouvé

$$\sum (a'b''' - b'a''')^2 = \left[ \left( \frac{1}{\rho^5} \right)' \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{r\rho^2} \right)' \right]^2. \quad (75)$$

Mais, *identiquement*,

$$\sum (a'b''' - b'a''')^2 = \sum a'^2 \sum a'''^2 - [\sum a'a''']^2.$$

Ainsi déjà

$$\sum a'^2 \sum a'''^2 = [\sum a'a''']^2 + \left[ \left( \frac{1}{\rho^5} \right)' \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{r\rho^2} \right)' \right]^2.$$

dans laquelle les neuf quantités  $a, b, c, a', b', c', a''', b''', c'''$  sont assujetties à la seule condition :  $aa' + bb' + cc' = 0$ .

Soient, par exemple :

$$a=2, b=3, c=4; a'=4, b'=4, c'=-5; a'''=1, b'''=2, c'''=3.$$

On doit avoir

$$(2^2 + 3^2 + 4^2) (4^2 + 22^2 + 17^2) = (4^2 + 4^2 + 5^2) 20^2 + 9^2,$$

ou

$$29.789 = 57.400 + 81 = 22.881;$$

ce qui est exact.

2° Comme

$$\sum (a'b''' - b'a''')^2 = \sum a'^2 \cdot \sum a'''^2 - [\sum a'a''']^2,$$

on peut écrire, au lieu de (A) :

$$\sum a^2 \sum a'^2 \sum a'''^2 = \sum a^2 [\sum a'a''']^2 + \sum a'^2 [\sum aa''']^2 + [\sum (bc' - cb') a''']^2. \quad (B)$$

3° De la relation  $aa' + bb' + cc' = 0$ , on conclut :

$$\begin{aligned} \sum a^2 [\sum a'a''']^2 + \sum a'^2 [\sum aa''']^2 &= \left[ a \sum a'a''' + a' \sum aa''' \right]^2 \\ &+ \left[ b \sum a'a''' + b' \sum aa''' \right]^2 \\ &+ \left[ c \sum a'a''' + c' \sum aa''' \right]^2; \end{aligned}$$

D'un autre côté, la formule

$$\sum a'a'' = -\frac{\rho'}{\rho^5} \dots \dots \dots (59)$$

donne

$$\sum a'a''' = -\sum a''^2 - \frac{\rho\rho'' - 3\rho'^2}{\rho^4},$$

ou (34)

$$\sum a'a''' = -\frac{\rho''}{\rho^5} - \frac{1}{\rho^2 L^2} + 2\frac{\rho'^2}{\rho^4} \dots \dots \dots (77)$$

A cause de  $\sum a'^2 = \frac{1}{\rho^2}$ , l'équation ci-dessus devient donc

$$\sum a'''^2 = \frac{1}{\rho^6} \left[ \rho\rho'' + \frac{\rho^2}{L^2} - 2\rho'^2 \right]^2 + \rho^2 \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\rho^5} \right)' \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{r\rho^2} \right)' \right]^2 \right\};$$

puis

$$\left. \begin{aligned} \sum a^2 \sum a'^2 \sum a'''^2 &= \left[ a \sum a'a''' + a' \sum aa''' \right]^2 \\ &+ \left[ b \sum a'a''' + b' \sum aa''' \right]^2 \\ &+ \left[ c \sum a'a''' + c' \sum aa''' \right]^2 \\ &+ \left[ \sum (bc' - cb') a''' \right]^2; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (C)$$

4° Pour satisfaire à la condition donnée, il suffit de prendre

$$a' = b\gamma - c\beta, \quad b' = c\alpha - a\gamma, \quad c' = a\beta - bx.$$

Au moyen de ces valeurs, l'égalité (C) devient, par un changement de notation,

$$\left. \begin{aligned} \sum a^2 \sum (b\gamma - c\beta)^2 \sum f^2 &= \left[ a \sum f(b\gamma - c\beta) + (b\gamma - c\beta) \sum af \right]^2 \\ &+ \left[ b \sum f(b\gamma - c\beta) + (c\alpha - a\gamma) \sum af \right]^2 \\ &+ \left[ c \sum f(b\gamma - c\beta) + (a\beta - bx) \sum af \right]^2 \\ &+ \left[ \sum af \sum ax - \sum xf \sum a^2 \right]^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (D)$$

5° Les identités (A), (B), (C), (D) peuvent être utiles dans l'Analyse indéterminée. Ainsi, les deux dernières permettent de décomposer, en quatre carrés, le produit de trois facteurs égaux, chacun, à la somme de trois carrés.

Par exemple, en conservant les valeurs ci-dessus :

$$(2^2 + 3^2 + 4^2)(4^2 + 4^2 + 5^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) = 74^2 + 71^2 + 112^2 + 9^2.$$

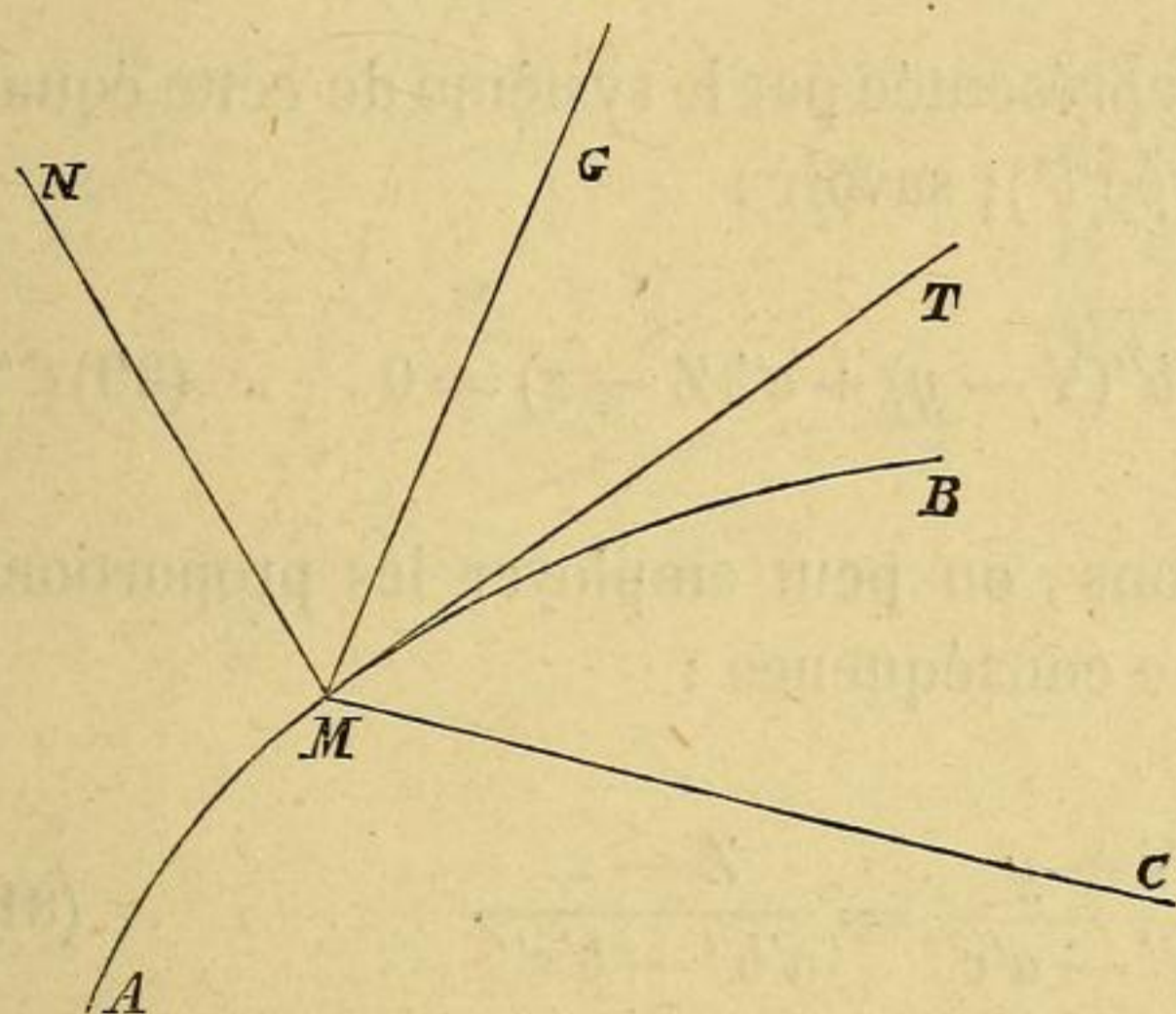
ou, plus simplement,

$$\sum a'''^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{1}{L^2} - \rho \left( \frac{1}{\rho} \right)'' \right]^2 + \rho^2 \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\rho^3} \right)' \right]^2 + \left[ \left( \frac{1}{r\rho^2} \right)' \right]^2 \right\}. \quad (78)$$

### VII. Plan rectifiant, surface rectifiante, etc.

**42. DÉFINITIONS.** Quand le point mobile M (fig. 8) décrit la

Fig. 8.



courbe AMB, le plan NMT enveloppe une développable S, sur laquelle AMB est située tout entière. D'après une propriété connue (\*), cette courbe AMB est une *ligne géodésique* de S, c'est-à-dire que, dans le développement de S, la transformée de AMB est rectiligne. A raison de cette propriété, le

plan NMT porte, depuis Lancret, le nom de *plan rectifiant* (9) : la *droite rectifiante* est la génératrice de la *surface rectifiante* S, ou l'intersection de deux plans rectifiants consécutifs.

**43. REMARQUES. I.** Supposons que la surface S soit développée sur le plan NMT. La transformée de AMB est une droite ayant, avec MT, un élément commun (\*\*): cette transformée est donc la tangente MT.

(\*) THÉORÈME. Toute ligne géodésique a son plan osculateur normal à la surface; et réciproquement.

Dans le cas des surfaces développables, ce théorème résulte, immédiatement, de la relation  $\frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}$ , que j'ai donnée il y a trente-deux ans (*Comptes-rendus*, tome XVII). Pour l'étendre à une surface quelconque  $\Sigma$ , il suffit de remplacer celle-ci par la développable circonscrite suivant la ligne considérée (*Mélanges mathématiques*, p. 55).

(\*\*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, pp. 5 et suiv.

II. *La rectifiante MG est, d'après la dernière définition, perpendiculaire à deux rayons de courbure consécutifs. On verra que le lieu de ces rayons est une surface gauche. Donc la rectifiante est parallèle à la plus courte distance de deux rayons consécutifs.*

**44. ÉQUATIONS DE LA RECTIFIANTE.** D'après les relations (22), l'équation (15) du plan rectifiant est

$$a'(X - x) + b'(Y - y) + c'(Z - z) = 0. \quad (79)$$

La rectifiante MG est représentée par le système de cette équation et de l'équation dérivée (\*); savoir :

$$a''(X - x) + b''(Y - y) + c''(Z - z) = 0. \quad (80) (**)$$

Au lieu de ces équations, on peut employer les proportions suivantes, qui en sont une conséquence :

$$\frac{X - x}{b'c'' - c'b''} = \frac{Y - y}{c'a'' - a'c''} = \frac{Z - z}{a'b'' - b'a''}. \quad (81)$$

**45. DIRECTION DE LA RECTIFIANTE.** Si  $p, q, r$  sont les cosinus directifs de cette ligne :

$$\frac{p}{b'c'' - c'b''} = \frac{q}{c'a'' - a'c''} = \frac{r}{a'b'' - b'a''} = \pm \frac{1}{\sqrt{(b'c'' - c'b'')^2}};$$

ou, par les formules (59), (62) :

$$\frac{p}{L} = \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho}, \quad \frac{q}{L} = \frac{b}{r} + \frac{m}{\rho}, \quad \frac{r}{L} = \frac{c}{r} + \frac{n}{\rho}; \quad (82)$$

(\*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège, p. 502.*

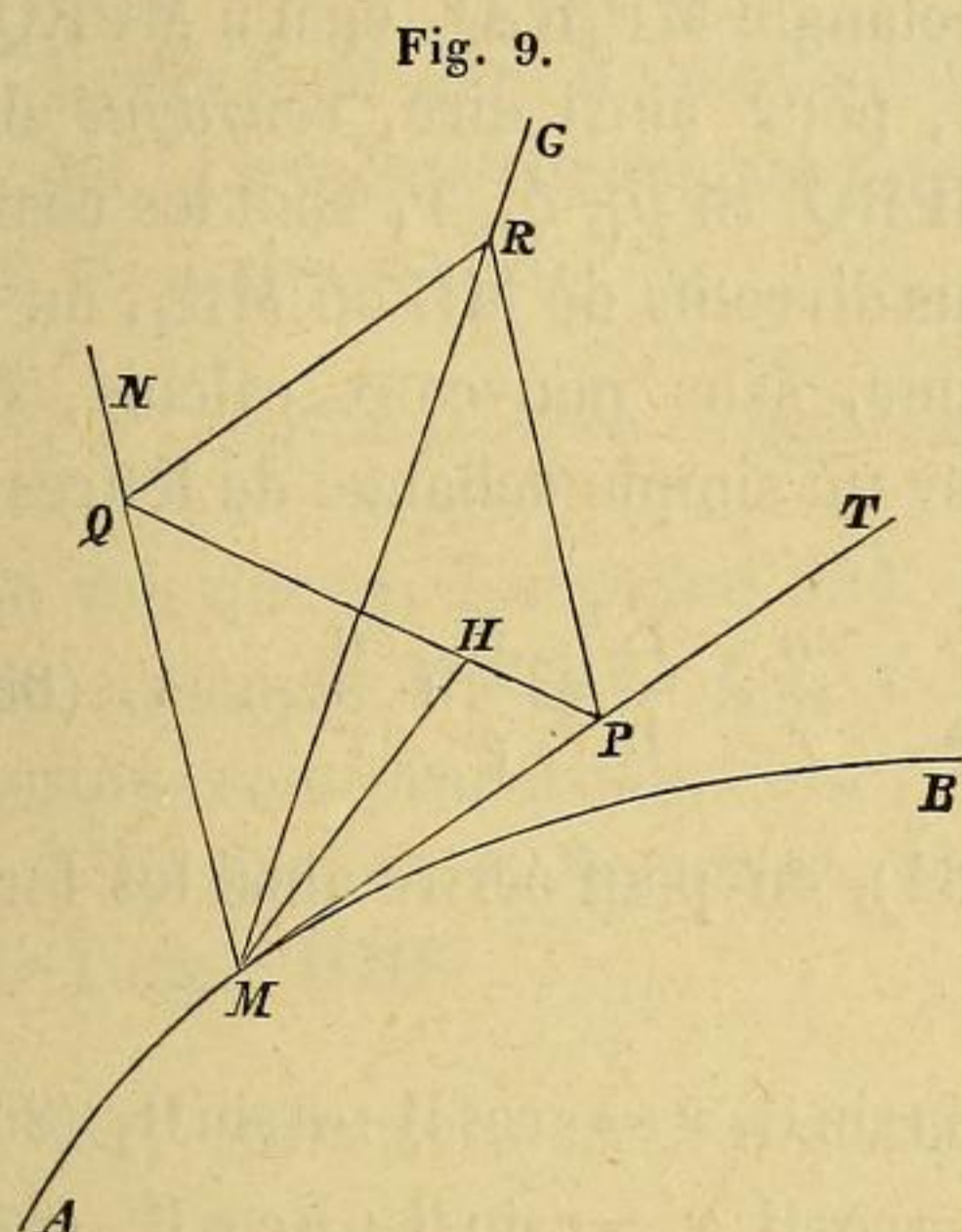
(\*\*) On ne doit pas oublier que

$$a' \frac{dx}{ds} + b' \frac{dy}{ds} + c' \frac{dz}{ds} = a'a + b'b + c'c = 0.$$

ou encore

$$\frac{r\rho}{L}p = \rho a + rl, \quad \frac{r\rho}{L}q = \rho b + rm, \quad \frac{r\rho}{L}r = \rho c + rn. \quad (83)$$

D'après ces formules, si l'on prend, sur la tangente  $MT$  et sur la binormale  $MN$  (fig. 9),



la binormale  $MN$  (fig. 9),  $MP = \rho$ ,  $MQ = r$  (\*), et que l'on achève le rectangle  $MPRQ$ , on aura  $MR = \frac{r\rho}{L}$ . De plus,  $MR$  est la direction de la rectifiante  $MG$ . Enfin,  $H$  étant l'angle de  $MG$  avec  $MT$  :

$$\left. \begin{aligned} \cos H &= \frac{L}{r}, \\ \sin H &= \frac{L}{\rho}, \\ \operatorname{tg} H &= \frac{r}{\rho}. \end{aligned} \right\} (**). (84)$$

**46. REMARQUES. I.** Si l'on convient de prendre  $L$  positivement, l'angle  $H$  est *aigu* ou *obtus*, selon que  $r$  est *positif* ou *négatif*.

(\*) Quand le rayon  $r$  est négatif, la distance  $MQ$  doit être portée sur le prolongement de  $MN$ .

(\*\*) La dernière formule et les propriétés de la surface rectifiante donnent lieu à la remarque suivante :

Soit, sur une surface  $S$ ,  $AMB$  une ligne géodésique, ayant  $MT$  pour tangente. Soit  $MG$  une génératrice de la développable  $\Sigma$ , circonscrite à  $S$  suivant  $AMB$ ; ou, ce qui est équivalent, une rectifiante de  $AMB$ . Soient enfin  $\rho$ ,  $r$  les rayons de courbure et de torsion de  $AMB$ , au point  $M$ . On a

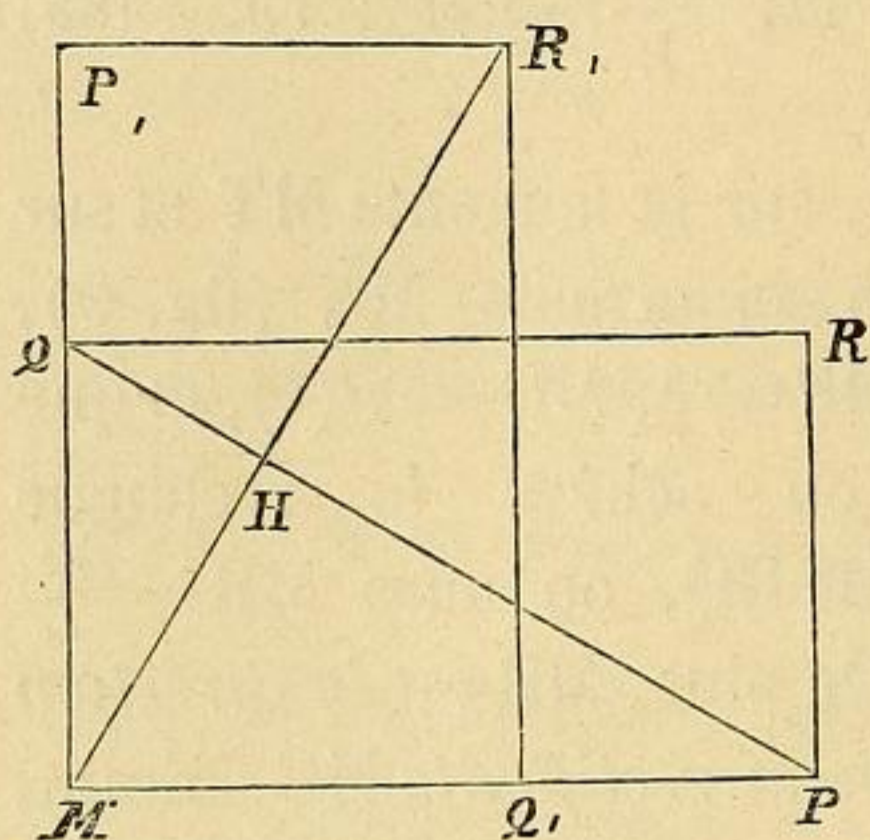
$$\operatorname{tg} \operatorname{TMG} = \frac{r}{\rho}.$$

Si d'ailleurs, au moyen des données du problème, on évalue  $\operatorname{tg} \operatorname{TMG}$ , on aura, sous une nouvelle forme, l'équation des lignes géodésiques.

Ajoutons que, d'après la théorie de Charles Dupin,  $MT$  et  $MG$  sont deux *tangentes conjuguées*.

II. La droite  $MH$ , perpendiculaire à la diagonale  $PQ$ , représente

Fig. 10.



$L$  (22, I). En outre, les angles  $QMH$ ,  $RMP$  sont égaux entre eux.

III. La hauteur  $MH$  (fig. 10) est située sur la diagonale  $MR_1$  du rectangle  $MP_1R_1Q_1$ , égal à  $MPRQ$ , et, pour ainsi dire, *conjugué* de  $MPRQ$ . Si  $p_1, q_1, r_1$  sont les cosinus directifs de  $MH$  ou  $MR_1$ , on a donc, sans nouveaux calculs, et par un simple échange de lettres :

$$\frac{p_1}{L} = \frac{a}{\rho} + \frac{l}{r}, \quad \frac{q_1}{L} = \frac{b}{\rho} + \frac{m}{r}, \quad \frac{r_1}{L} = \frac{c}{\rho} + \frac{n}{r}. \quad (85)$$

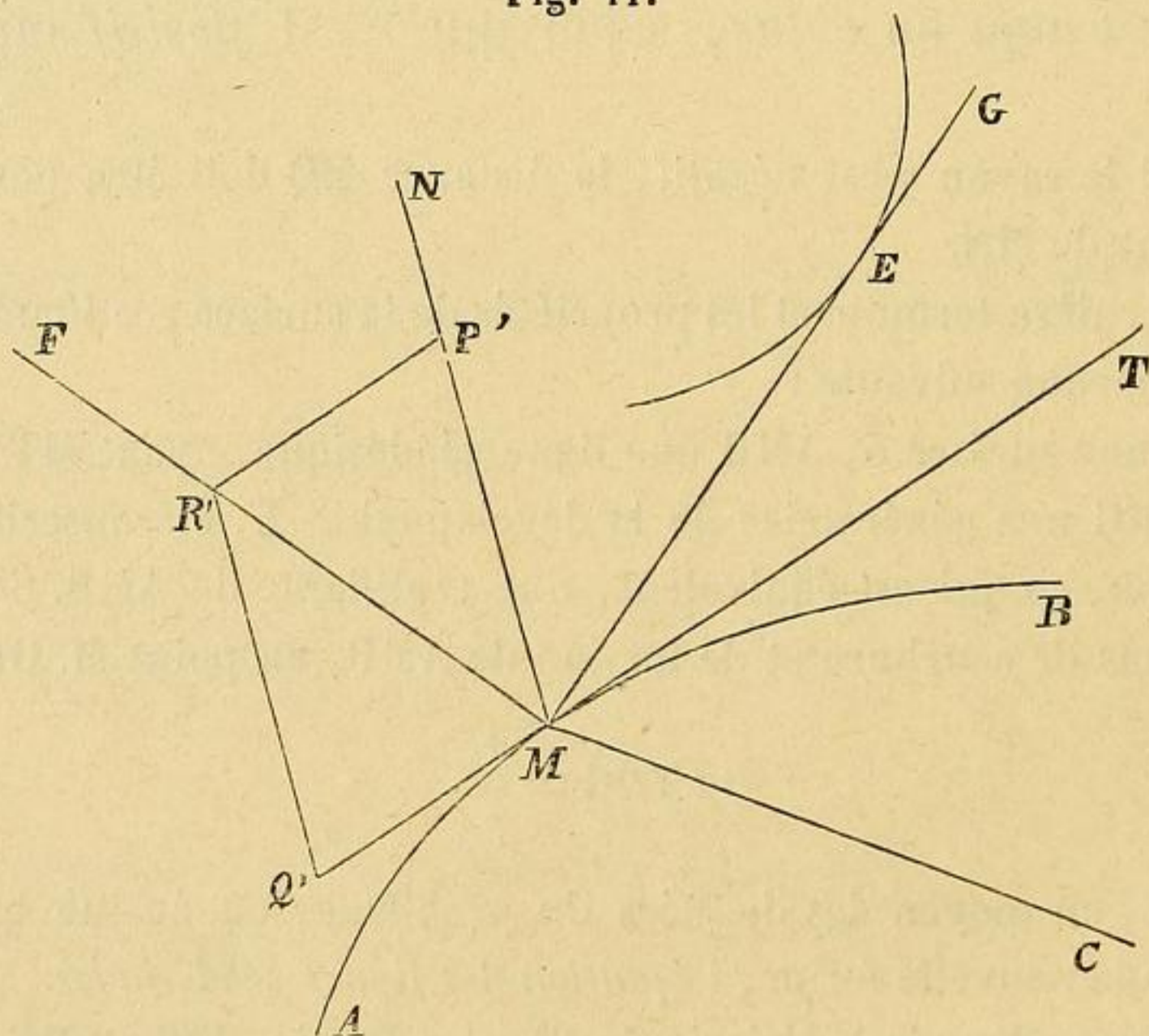
IV. Au moyen des valeurs (84), on peut écrire ainsi les formules (82) et (85) :

$$p = a \cos H + l \sin H, \quad q = b \cos H + m \sin H, \quad r = c \cos H + n \sin H, \quad (86)$$

$$p_1 = a \sin H + l \cos H, \quad q_1 = b \sin H + m \cos H, \quad r_1 = c \sin H + n \cos H. \quad (87)$$

V. Si, dans le plan rectifiant, on élève  $MF$  perpendiculaire à

Fig. 11.



$MG$  (fig. 11), cette droite  $MF$ , tangente à une trajectoire orthogo-

nale des génératrices de la surface rectifiante, fait, avec les trois axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$ . En effet, ces dérivées satisfont aux conditions

$$\sum ff' = 0, \quad \sum pf' = 0 \text{ (*)}.$$

Les cosinus dont il s'agit ont donc pour valeur  $Lf'$ ,  $Lg'$ ,  $Lh'$ .

VI. La même conclusion ressort des formules (36). En effet, en les écrivant ainsi :

$$\rho r f' = \rho l - ra, \quad \rho r g' = \rho m - rb, \quad \rho r h' = \rho n - rc;$$

on voit que, si l'on prend  $MQ' = r$ ,  $MP' = \rho$ , la diagonale  $MR'$  du rectangle  $MP'Q'R'$  fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$ ; etc.

VII. D'après la Remarque II, la binormale  $MN$  est bissectrice de l'angle  $HMF$ .

#### 47. ENVELOPPE DE LA RECTIFIANTE. Reprenons les équations

$$a' (X - x) + b' (Y - y) + c' (Z - z) = 0, \quad . \quad . \quad (79)$$

$$a'' (X - x) + b'' (Y - y) + c'' (Z - z) = 0; \quad . \quad . \quad (80)$$

et joignons-y la dérivée de la seconde; savoir (58) :

$$a''' (X - x) + b''' (Y - y) + c''' (Z - z) = -\frac{1}{\rho^2}. \quad . \quad (88)$$

Le système de ces trois équations représente le point d'intersection de deux rectifiantes consécutives (\*\*), ou le point commun à la rectifiante  $MG$  et à l'enveloppe de celle-ci, ou enfin le point  $E$  de l'arête de rebroussement de la rectifiante, correspondant au point  $M$  de la courbe donnée.

(\*) Celle-ci résulte de ce que  $MG$  est perpendiculaire à deux rayons de courbure consécutifs (42, II).

(\*\*) Si j'emploie cette expression, consacrée par l'usage, c'est afin d'abrégé. En réalité, deux génératrices d'une surface développable, aussi voisines qu'on le veut, ne se coupent généralement pas (*Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie).

Des équations (79), (80), on tire, comme ci-dessus,

$$\frac{X - x}{b'c'' - c'b''} = \frac{Y - y}{c'a'' - a'c''} = \frac{Z - z}{a'b'' - b'a''} \quad \dots \quad (81)$$

Soit  $\delta$  la distance ME : d'après les dernières proportions et l'une des formules (62), chacun des trois rapports égale  $\rho^2 L \delta$ .

En vertu de l'équation (88), la valeur commune de ces rapports est aussi

$$\frac{1}{\rho^2 \sum (b'c'' - c'b'') a'''} = - \frac{\rho^3}{\left(\frac{\rho}{r}\right)'} \quad \dots \quad (67)$$

Conséquemment,

$$\delta = - \frac{\rho}{L \left(\frac{\rho}{r}\right)'}; \quad \dots \quad (89)$$

et, si l'on fait  $\frac{\rho}{r} = \cos H = k$  :

$$\delta = - \frac{\rho}{Lk'} = - \frac{\sqrt{1+k^2}}{k'} \quad \dots \quad (90)$$

**48. REMARQUES.** I. Si l'angle H, supposé *aigu*, augmente en même temps que  $s$ , la dérivée  $k'$  est négative; donc la distance  $\delta$ , comptée dans le sens de MG, est *positive*.

II. De  $H = \arccos \frac{\rho}{r}$ , on tire  $H' = - \frac{L^2}{\rho^2} \left(\frac{\rho}{r}\right)'$ ; puis

$$H' \delta = \frac{L}{\rho}, \quad H' = \frac{\sin H}{\delta} \quad \dots \quad (91)$$

**49. THÉORÈME DE M. BERTRAND :** *Quand le rapport des deux courbures est constant, la courbe est une hélice, tracée sur un certain cylindre (\*)*.

En effet,  $k = \text{const.}$  donne  $\delta = \pm \infty$  : la surface rectifiante est cylindrique. En outre, à cause de  $\text{tg } H = \frac{1}{k}$ , la tangente MT fait, avec les génératrices, un angle constant : la courbe AMB est donc une hélice.

(\*) *Journal de Liouville*, tome XIII, p. 425.

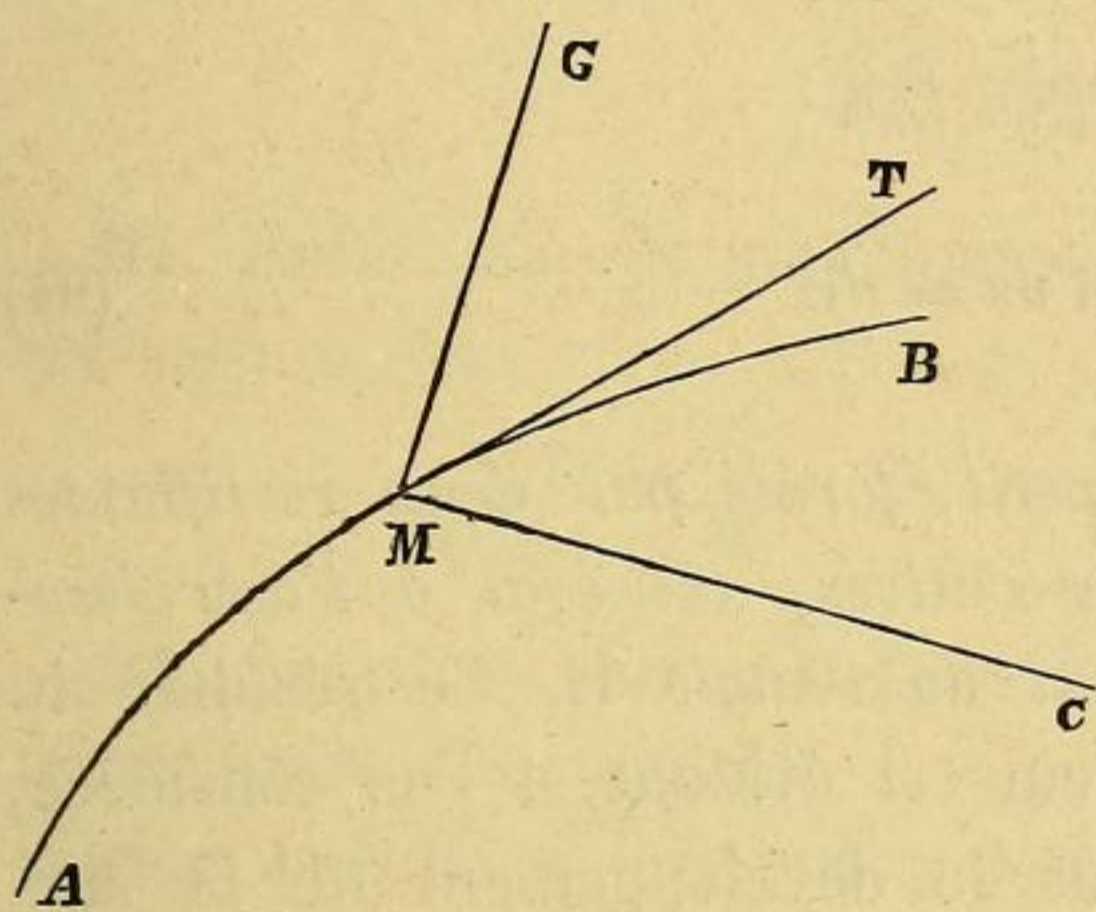


**50. THÉORÈME DE M. PUISEUX :** *Si les deux courbures sont constantes, la courbe est une hélice, tracée sur un cylindre de révolution (\*)*.

D'après le théorème précédent, la courbe est une hélice. De plus,  $\omega = \text{const.}$ ; c'est-à-dire que, dans le cylindre rectifiant, l'angle de contingence est constant (\*\*): ce cylindre est donc de révolution.

**51. SURFACES A PENTE CONSTANTE.** Reprenons le cas où la courbe AMB (fig. 12) est une hélice, tracée sur un cylindre quelconque.

Fig. 12.



*Le lieu de la tangente MT, ou l'enveloppe du plan osculateur PMC, est alors un hélicoïde développable. Supposons le plan horizontal perpendiculaire aux génératrices MG du cylindre. Dans le plan TMC, tangent à l'hélicoïde, TM est une ligne de plus grande pente; car elle est perpendiculaire*

*à la ligne de niveau, MC. Il en est de même pour la droite MT, considérée comme génératrice de l'hélicoïde : donc tout hélicoïde développable est une surface à pente constante (\*\*\*)*.

**52. ANGLE DE DEUX RECTIFIANTES CONSÉCUTIVES.** Nous avons trouvé

$$p = a \cos H + l \sin H, \quad q = b \cos H + m \sin H, \quad r = c \cos H + n \sin H. \quad (92)$$

Soit  $V$  l'angle infiniment petit cherché :  $V^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2$ ,  
ou

$$\left(\frac{V}{ds}\right)^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2.$$

(\*) *Journal de Liouville*, tome VII, p. 65.

(\*\*) Pour abrégier, j'appelle *angle de contingence d'un cylindre*, l'angle de contingence de la section droite.

(\*\*\*) La réciproque est vraie (*Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces*, IV).

Or,

$$p' = (a' \cos H + l' \sin H) + (l \cos H - a \sin H) H';$$

ou, parce que le premier binôme est nul (30), (84) :

$$p' = (l \cos H - a \sin H) H'.$$

La quantité entre parenthèses égale  $L \left( \frac{l}{r} - \frac{a}{\rho} \right) = Lf'$  ; donc

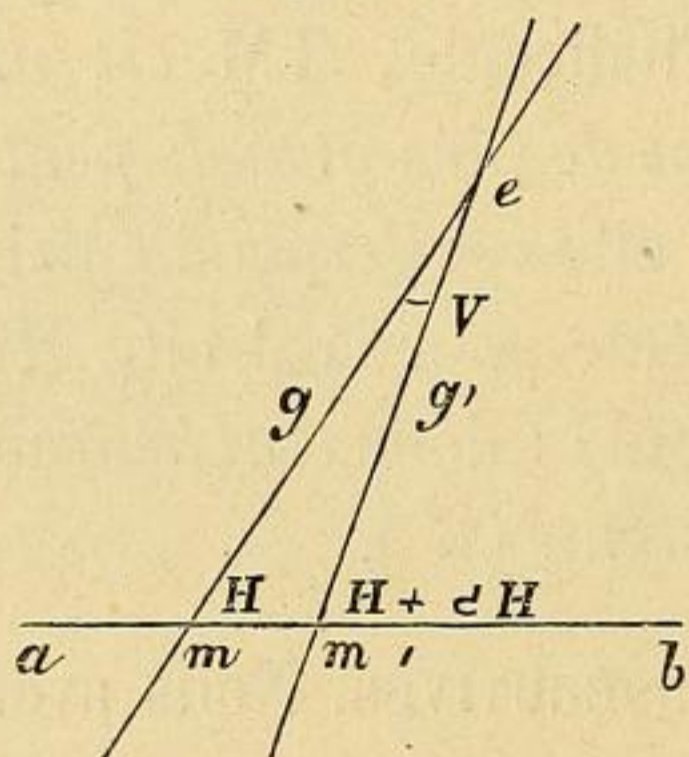
$$p' = LH'f', \quad q' = LH'g', \quad r' = LH'h'; \quad \dots \quad (93)$$

puis, à cause de  $L = + \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}}$  :

$$V = H'ds = dH \quad \dots \quad (94)$$

Ainsi, l'angle infiniment petit, formé par deux rectifiantes consécutives, est égal à l'accroissement de l'angle  $H$ . Ce résultat du calcul est évident si l'on considère,

Fig. 15.



dans le développement de la surface rectifiante, la transformée rectiligne de  $AMB$  (fig. 15), et les transformées de deux génératrices consécutives. En outre, on voit que  $\delta = me = \frac{\sin H}{H'} = - \frac{\sqrt{1+k^2}}{k'}$ , quantité positive si l'angle  $H$ , supposé aigu, croît avec  $s$  (46, I).

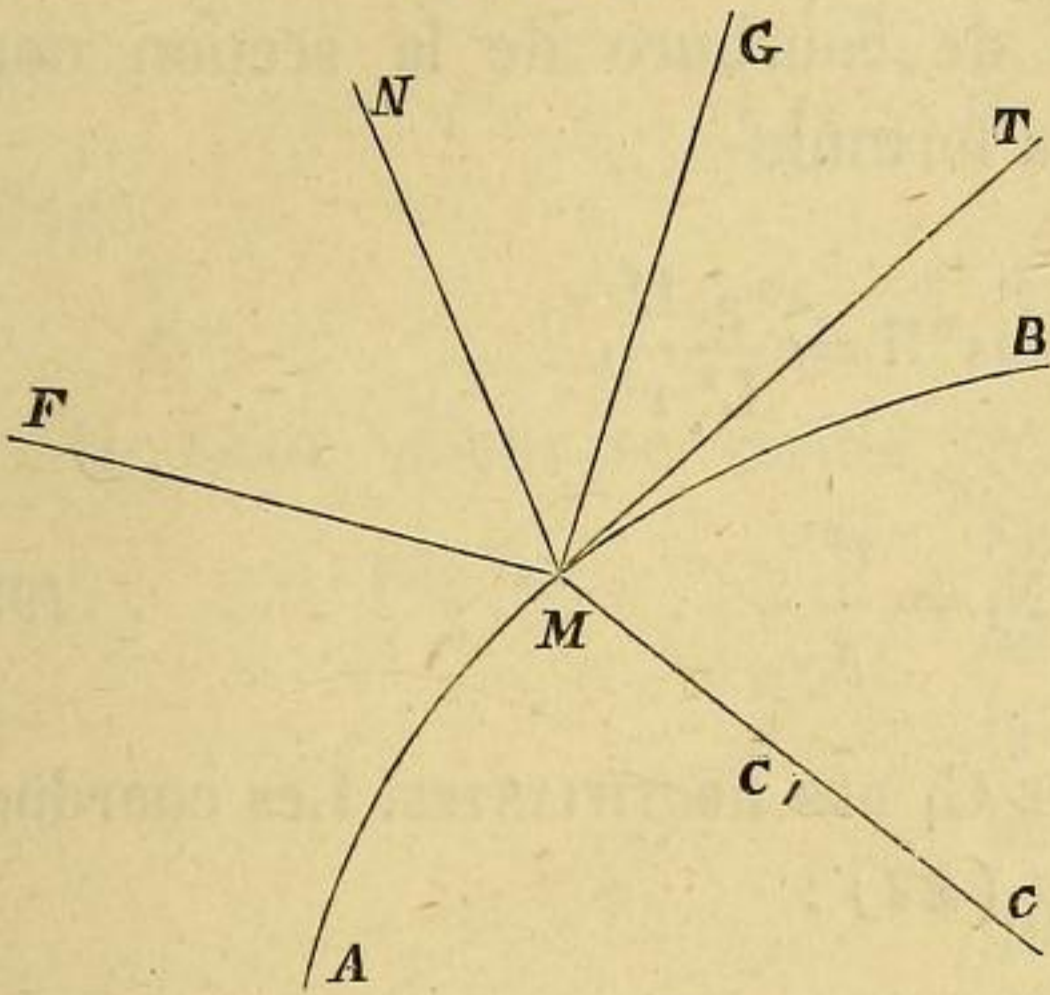
**53. REMARQUES. I.** Les formules (93) étant écrites ainsi :

$$\frac{p'}{f'} = \frac{q'}{g'} = \frac{r'}{h'} = LH', \quad \dots \quad (95)$$

on voit qu'elles ont quelque analogie avec celles de M. Frenet.  
**II.** Au moyen du théorème énoncé à la fin du Chapitre I (1),

on peut vérifier ces proportions. En effet, le rayon MC (fig. 14)

Fig. 14.



est perpendiculaire à deux génératrices consécutives ; donc les cosinus directs de la droite MF, perpendiculaire à MG, MC, sont proportionnels à  $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$ . De même, la génératrice MG est perpendiculaire à deux rayons consécutifs (43, II) ; donc les mêmes cosinus sont proportionnels à  $f'$ ,  $g'$ ,  $h'$ .

III. Enfin, d'après une remarque faite précédemment (46, V), ces cosinus sont

$$Lf' = \frac{p'}{H'}, \quad Lg' = \frac{q'}{H'}, \quad Lh' = \frac{r'}{H'} \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

54. SECTIONS PRINCIPALES DE LA SURFACE RECTIFIANTE. Dans toute surface développable, les lignes de courbure sont les génératrices et leurs trajectoires orthogonales. D'ailleurs, les sections normales principales d'une surface quelconque sont tangentes aux lignes de courbure. Dans le cas actuel, les plans des sections principales sont donc GMC, FMC (fig. 14).

Pour calculer le rayon de courbure de la section FMC, il suffit d'observer que, d'après le théorème d'Euler, exprimé par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi,$$

on a ( $R_2$  étant infini) :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi = \frac{1}{R_1} \cos^2 \text{FMT} = \frac{1}{R_1} \sin^2 H,$$

ou

$$R_1 = \rho \sin^2 H = \frac{L^2}{\rho} = H' \delta L \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Ainsi, le centre de courbure de la section principale FMC est

un point  $C_1$  que l'on obtient en prenant sur  $MC$ , à partir de  $M$ , une distance  $MC_1$ , troisième proportionnelle à  $MC$  et  $L$  (\*).

**55. REMARQUE.** Le rayon de courbure de la section normale  $NMC$  serait donné par la formule

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{R_1} \cos^2 H = \frac{\rho}{L^2} \frac{L^2}{r^2},$$

ou

$$N_1 = \frac{r^2}{\rho} \dots \dots \dots (98)$$

**56. ÉLÉMENT DE L'ENVELOPPE  $C_1$  DES RECTIFIANTES.** Les coordonnées du point  $E$  (fig. 11) sont (47) :

$$X = x + p\delta, \quad Y = y + q\delta, \quad Z = z + r\delta;$$

ou, en vertu des formules (82) et (90) :

$$X = x - \frac{1}{k'}(ak + l), \quad Y = y - \frac{1}{k'}(bk + m), \quad Z = z - \frac{1}{k'}(ck + n).$$

La dérivée de  $X$  est

$$X' = a - \frac{1}{k'}(ak' + ka' + l') + \frac{k''}{k'^2}(ak + l).$$

Et comme la somme des quatre premiers termes est nulle (30) :

$$X' = \frac{k''}{k'^2}(ak + l) = \rho \frac{k''}{k'^2} \left( \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho} \right) = \frac{\rho}{L} \frac{k''}{k'^2} p = \frac{1}{\sin H} \cdot \frac{k''}{k'^2} p.$$

Ainsi

$$X' = \frac{1}{\sin H} \frac{k''}{k'^2} p, \quad Y' = \frac{1}{\sin H} \frac{k''}{k'^2} q, \quad Z' = \frac{1}{\sin H} \frac{k''}{k'^2} r. \quad (99)$$

Ces valeurs prouvent que l'élément cherché est donné par la formule

$$ds_1 = \sqrt{1 + k^2} \frac{k''}{k'^2} ds. \dots \dots \dots (100)$$

(\*) Dans le Mémoire de M. Saint-Venant, cette proposition est démontrée au moyen de considérations infinitésimales qui ne me paraissent pas suffisamment convaincantes.

57. REMARQUES. I.  $\delta'$  désignant la dérivée de  $\delta$ , on a, par la formule (90) :

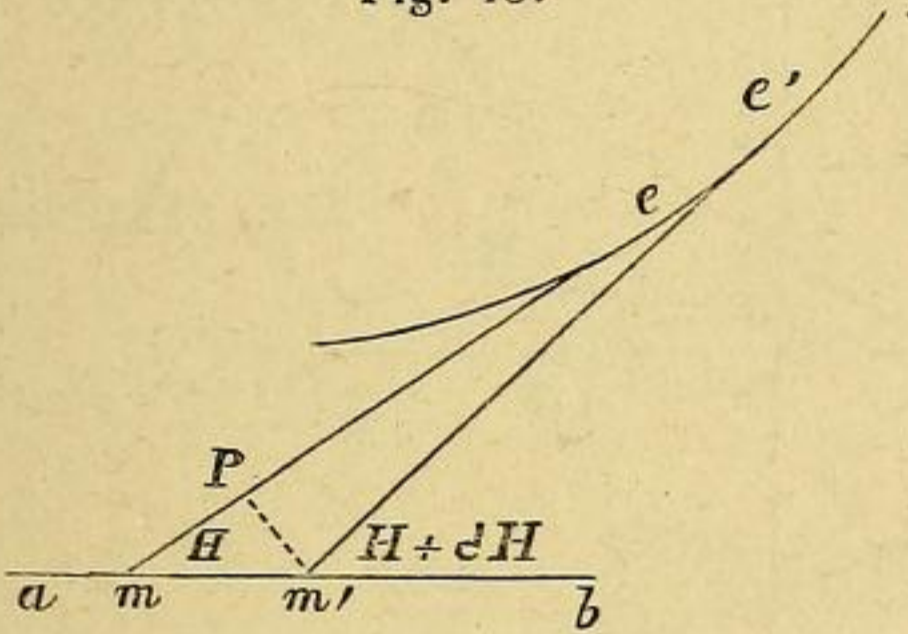
$$\delta' = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{k''}{k'^2} \sqrt{1+k^2};$$

done

$$s'_1 = \delta' + \cos H. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

II. Cette valeur se vérifie très-aisément par la Géométrie.

Fig. 15.



Soient, comme ci-dessus (52),  $ab, me, m'e'$  les transformées de la courbe  $AB$  et de deux rectifiantes consécutives; de manière que  $me = \delta, m'e' = \delta + d\delta, ee' = ds_1$  (fig. 15).

Abaisant  $m'P$  perpendiculaire sur  $me$ , l'on a

$$\delta + ds_1 = mP + Pe' = ds \cos H + Pe'.$$

L'angle  $Pe'm'$  est infiniment petit; donc la différence entre  $m'e'$  et sa projection  $Pe'$  est du deuxième ordre; en sorte que l'égalité se réduit à

$$ds_1 = ds \cos H + d\delta,$$

ou

$$s'_1 = \cos H + \delta'.$$

58. RAYON DE COURBURE DE L'ENVELOPPE  $C_1$ . Ce rayon est donné par la formule

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{\epsilon_1} = \frac{\cos H + \delta'}{H'}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

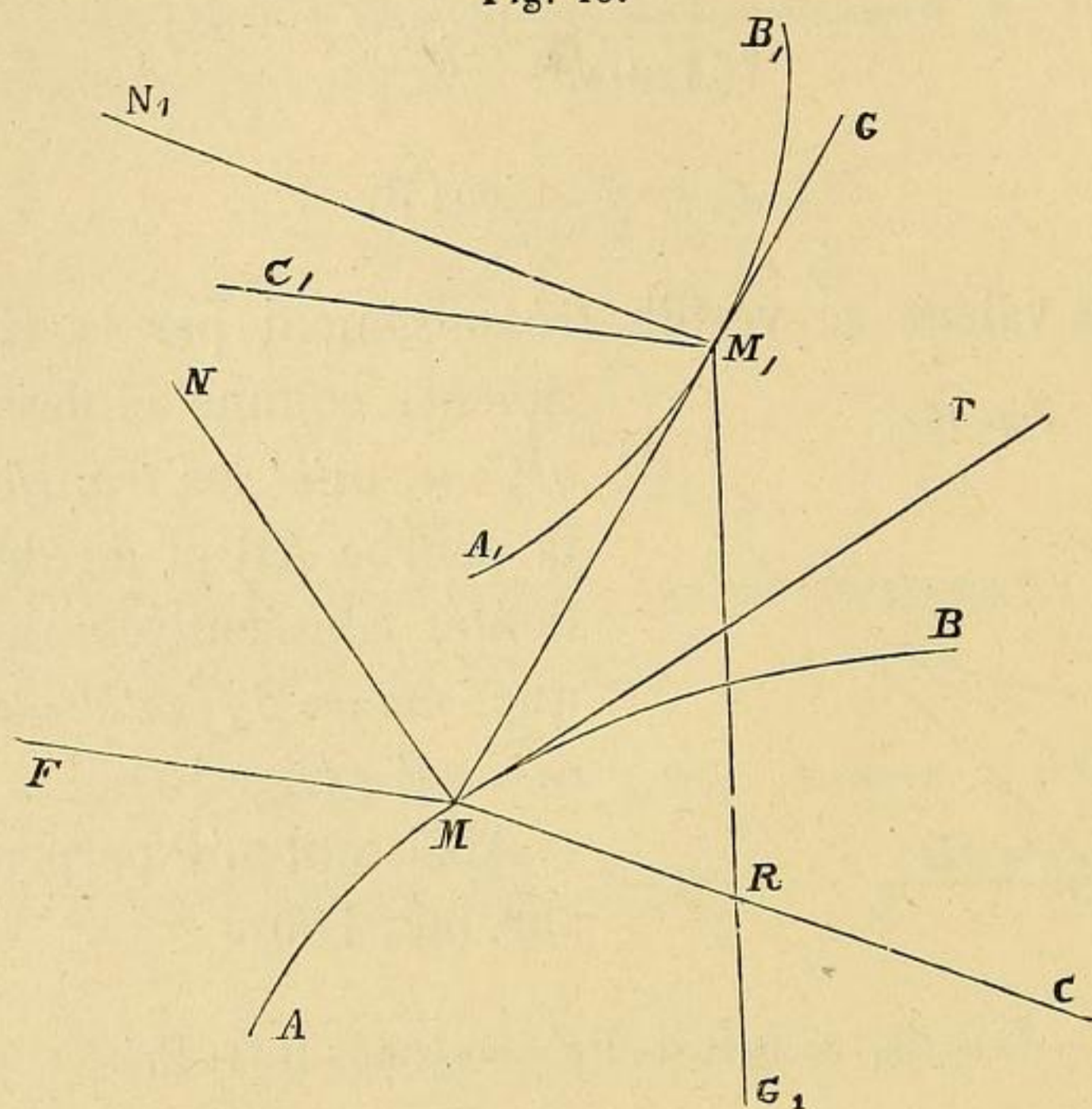
à cause des valeurs (101) et (94).

59. RAYON DE TORSION. Le plan rectifiant de la courbe donnée,  $C$ , est osculateur à l'enveloppe  $C_1$ . Par conséquent, l'angle  $\eta_1$ , relatif à la courbe  $C_1$ , ne diffère pas de  $\omega = \frac{ds}{L}$ . On a donc, en désignant par  $r_1$  le rayon de torsion cherché,

$$r_1 = \frac{ds_1}{\eta_1} = Ls'_1 = L(\cos H + \delta'). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

**60. REMARQUE.** Conservons les notations employées dans la figure 14. Soient, en outre (fig. 16),  $M_1C_1$  la normale princi-

Fig. 16.



pale à l'enveloppe  $C_1$  de la rectifiante  $MG_1$ , et  $M_1N_1$  la binormale à cette courbe  $C_1$ . Le plan osculateur est  $GMF$ ; donc  $M_1C_1$  est parallèle à  $MF$ ,  $M_1N_1$  est parallèle à  $MC$ . Par suite, le plan rectifiant de  $C_1$  est  $GMC$ , et la rectifiante de  $C_1$  est une droite  $M_1G_1$  qui rencontre, en un certain point  $R$ , le rayon  $MC$ .

**61. DIRECTION DE LA NOUVELLE RECTIFIANTE.** Soit  $H_1$  l'angle de  $M_1G_1$  avec la tangente  $M_1M$ . On a

$$\operatorname{tg} H_1 = \frac{MR}{M_1M} = \frac{MR}{\delta}.$$

D'un autre côté, les formules (84), (102), (103) et (91) donnent

$$\operatorname{tg} H_1 = \frac{r_1}{\rho_1} = LH' = \frac{L^2}{\rho\delta}.$$

Ainsi

$$MR = \frac{L^2}{\rho} = \Delta. \quad \dots \quad (104)$$

Cette expression est précisément celle que nous avons trouvée

pour le rayon  $R_1$  de la *section principale FMC* (97) : le point  $R$  est donc le centre de courbure de cette section (\*).

(\*) Le plan GMC, perpendiculaire à MF, a pour équation (53, II) :

$$f'(X - x) + g'(Y - y) + h'(Z - z) = 0.$$

De là résulte que les cosinus directifs de  $M_1G_1$  sont proportionnels aux binômes

$$g'h'' - h'g'', \quad h'f'' - f'h'', \quad f'g'' - g'f''.$$

Or (19) :

$$g' = \frac{m}{r} - \frac{b}{\rho}, \quad h' = \frac{n}{r} - \frac{c}{\rho};$$

donc (17) :

$$g'' = \left( \frac{m'}{r} - \frac{b'}{\rho} \right) - \left( \frac{m}{r^2} r' - \frac{b}{\rho^2} \rho' \right) = -\frac{g}{L^2} + \left( \frac{b}{\rho^2} \rho' - \frac{m}{r^2} r' \right),$$

$$h'' = -\frac{h}{L^2} + \left( \frac{c}{\rho^2} \rho' - \frac{n}{r^2} r' \right);$$

puis

$$\begin{aligned} g'h'' - h'g'' &= \left( \frac{m}{r} - \frac{b}{\rho} \right) \left( \frac{c}{\rho^2} \rho' - \frac{n}{r^2} r' \right) - \left( \frac{n}{r} - \frac{c}{\rho} \right) \left( \frac{b}{\rho^2} \rho' - \frac{m}{r^2} r' \right) \\ &+ \frac{g}{L^2} \left( \frac{n}{r} - \frac{c}{\rho} \right) - \frac{h}{L^2} \left( \frac{m}{r} - \frac{b}{\rho} \right) \\ &= (mc - nb) \left( \frac{\rho'}{r\rho^2} - \frac{r'}{\rho r^2} \right) + \frac{gn - hm}{L^2 r} + \frac{bh - cg}{L^2 \rho}; \end{aligned}$$

ou, par les formules (11), (82), (89), (104) :

$$\begin{aligned} g'h'' - h'g'' &= \frac{f}{r^2 \rho^2} (r\rho' - \rho r') + \frac{1}{L^2} \left( \frac{a}{r} + \frac{l}{\rho} \right) \\ &= -\frac{f}{\rho L \delta} + \frac{p}{L^3} = \frac{p\rho\delta - L^2 f}{L^3 \rho \delta} = \frac{p\delta - f\Delta}{L^3 \delta}. \end{aligned}$$

Les équations de la droite  $M_1G_1$  sont donc

$$\frac{X - x - p\delta}{f\Delta - p\delta} = \frac{Y - y - q\delta}{g\Delta - q\delta} = \frac{Z - z - r\delta}{h\Delta - r\delta}.$$

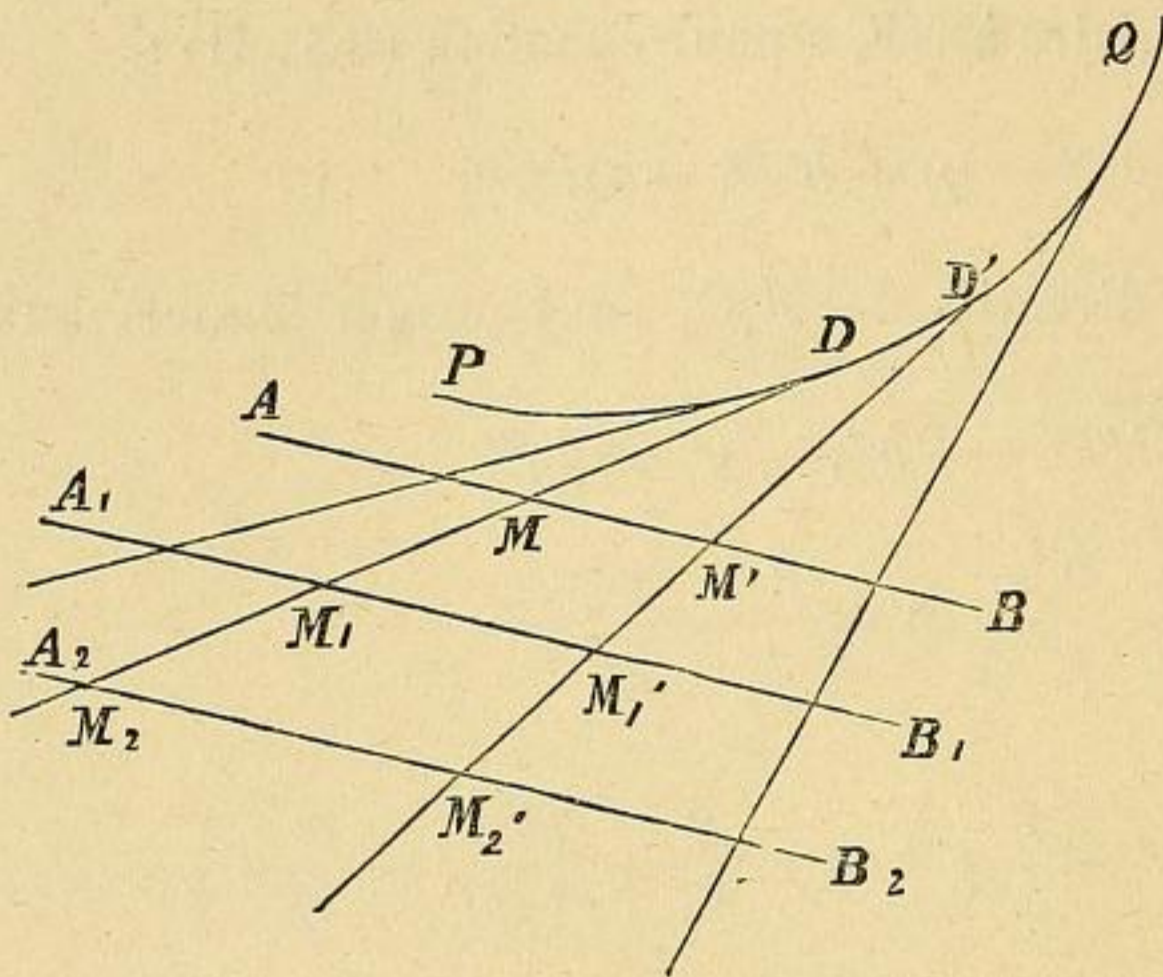
Elles sont vérifiées par

$$X = x + f\Delta, \quad Y = y + g\Delta, \quad Z = z + h\Delta;$$

ainsi la nouvelle rectifiante (ou plutôt *rectifiante secondaire*) passe par le point  $R$ ; comme on l'a vu ci-dessus.

**62. DÉVELOPPEMENT DE LA SURFACE RECTIFIANTE.** Ce développe-

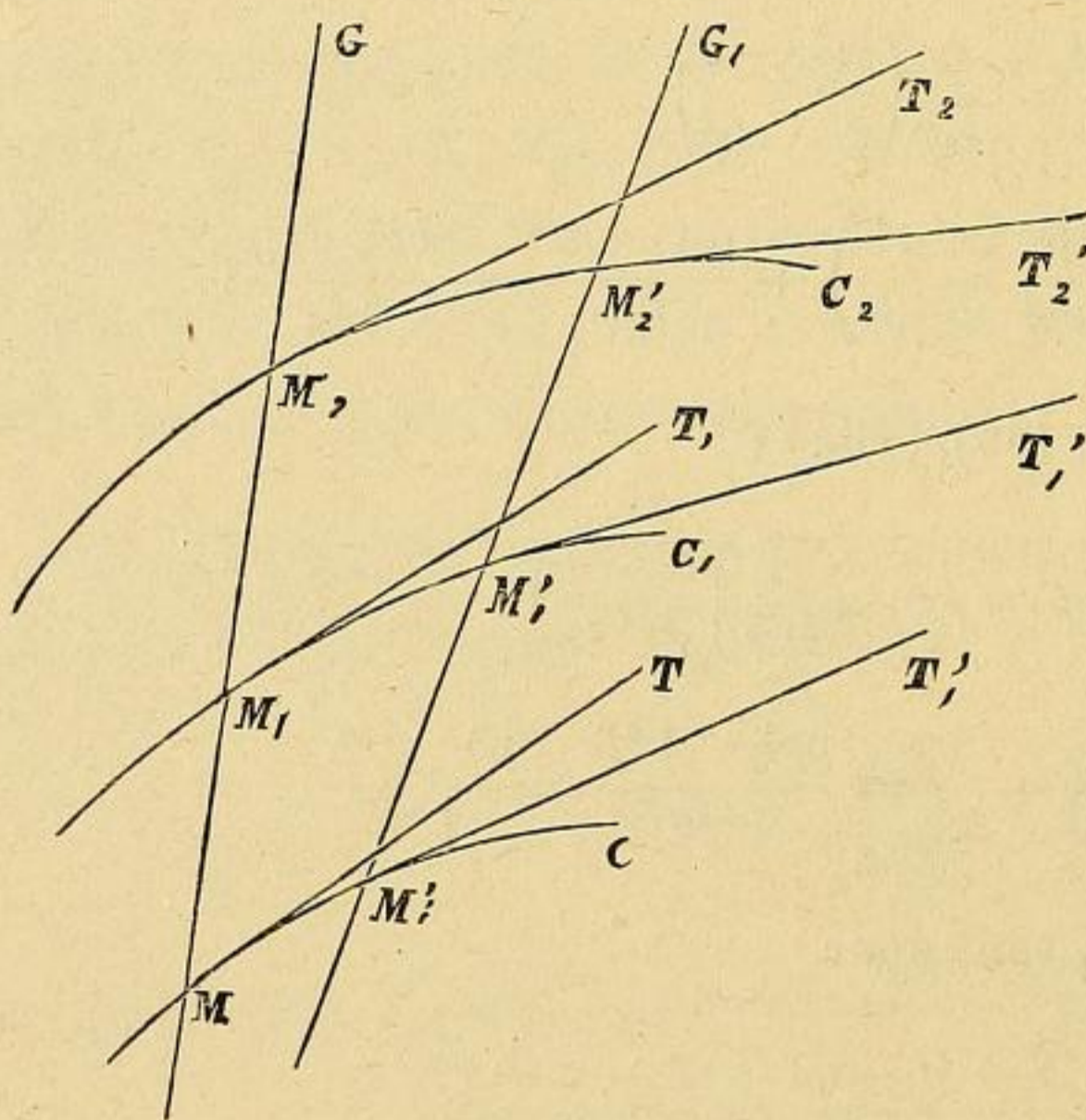
Fig. 17.



ment étant supposé effectué dans le plan de la figure 17; soient : PQ la transformée de l'arête de rebroussement,  $C_1$ ; AB, la transformée de la courbe donnée, C; MD, M'D', ... les transformées des rectifiants. Traçons les droites  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , parallèles à AB; puis enroulons le plan sur la surface rectifiante.

Les distances DM,  $DM_1, \dots$  ne changent pas, non plus que les angles en M,  $M_1, \dots$  Par conséquent (fig. 18), les courbes C,

Fig. 18.



$C_1, C_2, \dots$  tracées sur la surface rectifiante déterminée par la courbe C, jouissent des propriétés suivantes :

1° Les tangentes MT,  $M_1T_1, M_2T_2, \dots$  aux points correspondants, sont parallèles et situées dans le plan rectifiant commun;

2° Aux points correspondants, les angles de contingence sont égaux entre eux, ainsi que les angles de torsion;

3° En ces mêmes points, les binormales sont parallèles entre elles, ainsi que les normales principales (\*).

(\*) On voit que les courbes C,  $C_1, C_2, \dots$ , à transformées rectilignes parallèles, ont quelque analogie avec les lignes appelées courbes parallèles. On



**63.** RAYONS DES COURBES  $C, C_1, C_2, \dots$  1° Les éléments de ces lignes sont (fig. 17) :

$$MM' = ds, \quad M_1M'_1 = ds_1, \quad M_2M'_2 = ds_2 \dots$$

En faisant  $MD = \delta, M_1D = \delta_1, M_2D = \delta_2, \dots$  on a, par la similitude des triangles :

$$\frac{ds}{\delta} = \frac{ds_1}{\delta_1} = \frac{ds_2}{\delta_2} = \dots$$

D'un autre côté (**62**, 20) :

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho} = \frac{ds_1}{\rho_1} = \frac{ds_2}{\rho_2} = \dots, \quad \eta = \frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{r_1} = \frac{ds_2}{r_2} = \dots;$$

done

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{\rho_1}{\delta_1} = \frac{\rho_2}{\delta_2} = \dots, \quad \frac{r}{\delta} = \frac{r_1}{\delta_1} = \frac{r_2}{\delta_2} = \dots$$

Ainsi, aux points correspondants  $M, M_1, M_2, \dots$  les rayons de courbure sont comme les distances  $MD, M_1D, M_2D, \dots$ ; et la même proportionnalité subsiste pour les rayons de torsion.

2° Les proportions précédentes entraînent celles-ci :

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\delta_1}{L_1} = \frac{\delta_2}{L_2} = \dots$$

3° Faisons, comme ci-dessus (**60**),  $\Delta = \frac{L_2}{\rho}$ ; et soient, par analogie :

$$\Delta_1 = \frac{L_1^2}{\rho_1}, \quad \Delta_2 = \frac{L_2^2}{\rho_2}, \dots;$$

nous aurons

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \left(\frac{L}{L_1}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho} = \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^2 \frac{\delta_1}{\delta};$$

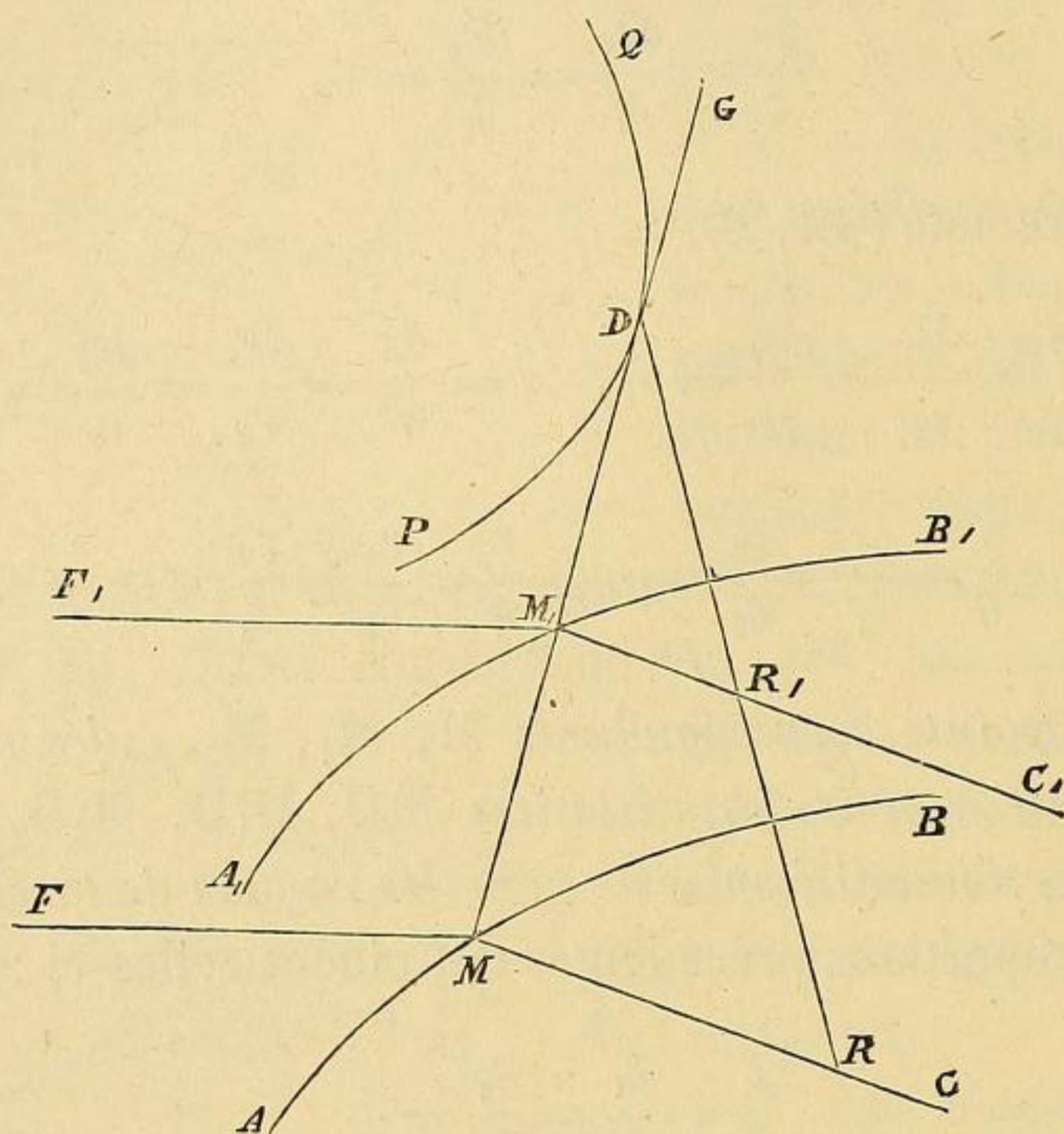
sait que celles-ci peuvent être considérées comme des *trajectoires orthogonales d'un plan mobile*. Pour rendre l'analogie plus grande, imaginons (fig. 18) le plan  $P$  mené par  $GM$ , perpendiculairement au plan rectifiant  $GMT$  (c'est le plan  $GMC$ , considéré ci-dessus). Alors les courbes  $C, C_1, C_2, \dots$  coupent le plan mobile  $P$  sous un même angle, qui dépend seulement de la position de  $P$ .

ou

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta_1}{\delta_1} = \frac{\Delta_2}{\delta_2} = \dots$$

Par conséquent (fig. 19), le lieu des centres de courbure des

Fig. 19.



sections principales  $FMC$ ,  $F_1M_1C_1$ , ... de la surface rectifiante, est la rectifiante secondaire  $DR_1R$  (\*).

**VIII Surface polaire. — Sphère osculatrice. — Lieu des centres de courbure.**

**64. SURFACE POLAIRE.** Cette surface est le *lieu des axes* (\*\*) des cercles osculateurs à la courbe donnée, ou l'enveloppe des plans

(\*) Cette propriété est une conséquence de celles qui ont été établies dans les nos 60 et 62.

(\*\*) Nommés aussi *droites polaires*.

*normaux*. Une génératrice quelconque (c'est-à-dire l'axe du cercle osculateur) est donc représentée par

$$a (X - x) + b (Y - y) + c (Z - z) = 0, \quad . \quad . \quad (12)$$

$$a' (X - x) + b' (Y - y) + c' (Z - z) = 1. \quad . \quad . \quad (105)$$

Si, avec ces équations, on prend encore la dérivée de la seconde, savoir :

$$a'' (X - x) + b'' (Y - y) + c'' (Z - z) = 0, \quad . \quad . \quad (80)$$

le système de ces trois équations appartient à l'*arête de rebroussement de la surface polaire*.

**65. SPHÈRE OSCULATRICE.** Si l'on fait passer une sphère par le point  $M$  et par trois autres points  $M'$ ,  $M''$ ,  $M'''$  de la courbe donnée; puis que l'on fasse tendre ceux-ci vers  $M$ , la sphère variable devient, à la limite, la *sphère osculatrice*  $S$ , déterminée par les équations

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2 (*). \quad . \quad . \quad (106)$$

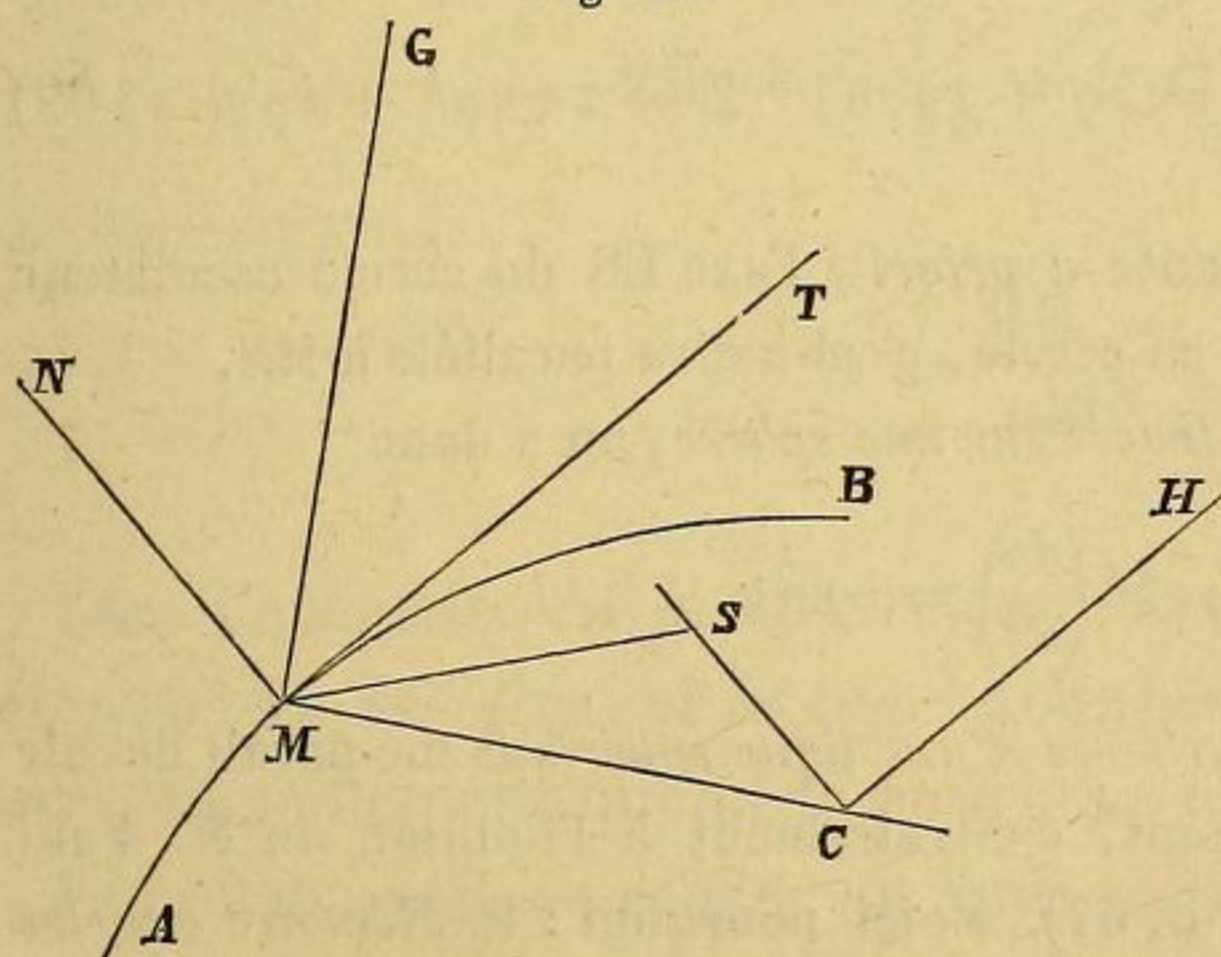
et ses trois premières dérivées :

$$a (X - x) + b (Y - y) + c (Z - z) = 0,$$

$$a' (X - x) + b' (Y - y) + c' (Z - z) = 1,$$

$$a'' (X - x) + b'' (Y - y) + c'' (Z - z) = 0.$$

Fig. 20.



Ces équations dérivées sont celles qui déterminent le point  $S$  (fig. 20) où la droite polaire  $CS$  touche son enveloppe (64); donc la *centre de la sphère osculatrice coïncide avec le point  $S$  de l'arête de rebroussement de la surface polaire*.

(\*) Dans cette équation,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  représentent les coordonnées du centre.

**66. REMARQUE. I.** L'équation (12) représente le plan normal NMC, et l'équation (105), un plan SCH parallèle au plan rectifiant NMT; donc la droite polaire CS est parallèle à la binormale MN (\*).

II. Le plan P, représenté par l'équation (80), coïncide avec GMS; car il contient la rectifiante MG (64).

**67. CENTRE ET RAYON DE LA SPHÈRE OSCULATRICE.** Des équations (12), (80), on tire :

$$\frac{X - x}{bc'' - cb''} = \frac{Y - y}{ca'' - ac''} = \frac{Z - z}{ab'' - ba''} \dots \dots (107)$$

D'après l'équation (105) et l'expression de R<sup>2</sup>, chacun des trois rapports égale

$$\frac{1}{\sum (bc'' - cb'') a'} = \frac{R}{\sqrt{\sum (bc'' - cb'')^2}}$$

Le premier dénominateur est  $-\Delta$  (23); le second a pour valeur  $\pm \Delta \sqrt{\rho^2 + r^2 \rho'^2}$  (35); donc

$$R = \sqrt{\rho^2 + r^2 \rho'^2} (**). \dots \dots (108)$$

Quant aux équations (107), qui représentent le rayon MS, elles deviennent (41) :

$$X - x = \rho f + r \rho' l, \quad Y - y = \rho g + r \rho' m, \quad Z - z = \rho h + r \rho' n. (109)$$

(\*) Cette propriété est évidente *a priori* : l'axe CS du cercle osculateur est perpendiculaire au plan de ce cercle, c'est-à-dire parallèle à MN.

(\*\*) Si la courbe donnée est tracée sur une sphère, on a donc

$$\rho^2 + r^2 \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 = \text{const.}$$

Cette relation entre les deux courbures d'une ligne sphérique me paraît devoir être attribuée à M. Saint-Venant, contrairement à l'opinion de M. Paul Serret (*Théorie nouvelle, etc.*, p. 57). Voici pourquoi : le *Mémoire sur les courbes non planes* a été publié en 1845; et les premières recherches de M. Alfred Serret, sur le même sujet, datent de 1848.

Si l'on se rappelle que  $f, g, h$  sont les cosinus directifs du rayon de courbure  $MC$ , et que  $l, m, n$  sont ceux de la droite  $CS$ , parallèle à  $MN$ , on conclut, de ces formules,  $CS = r\rho'$ , valeur qui s'accorde avec celle de  $R$ .

**68. ÉLÉMENT DE L'ARÊTE DE REBROUSSEMENT.** De la première des formules (109), on tire :

$$X' = a + \rho f' + f\rho' + (r\rho')l' + (r\rho')'l.$$

Mais (36), (29) :

$$a + \rho f' = \frac{\rho}{r}l, \quad f = -rl';$$

donc

$$X' = \left[ \frac{\rho}{r} + (r\rho')' \right] l, \quad Y' = \left[ \frac{\rho}{r} + (r\rho')' \right] m, \quad Z' = \left[ \frac{\rho}{r} + (r\rho')' \right] n; \quad (110)$$

puis,  $S$  étant l'arc de la courbe dont il s'agit,

$$S' = \frac{\rho}{r} + (r\rho')' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

**69. REMARQUE.** La formule (108) donne :

$$RR' = r\rho' \left[ \frac{\rho}{r} + (r\rho')' \right];$$

par conséquent,

$$S' = \frac{RR'}{r\rho'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

**70. THÉORÈME.** *Si la sphère osculatrice a un rayon constant, cette sphère est fixe, et la courbe donnée y est située tout entière (excepté seulement quand la courbure est constante).*

En effet, si  $R = \text{const.}$ , et que  $\rho'$  ne soit pas nulle, la dernière relation donne  $S' = 0$ ; puis  $X' = 0, Y' = 0, Z' = 0$ ; équations d'un point fixe.

**71. LIEU DES CENTRES DE COURBURE.** Les coordonnées du centre de courbure,  $C$ , sont données par les formules

$$x_2 = x + \rho f, \quad y_2 = y + \rho g, \quad z_2 = z + \rho h. \quad (113)$$

On en conclut, à cause de  $a + \rho f' = \frac{\rho}{r} l$ , etc. :

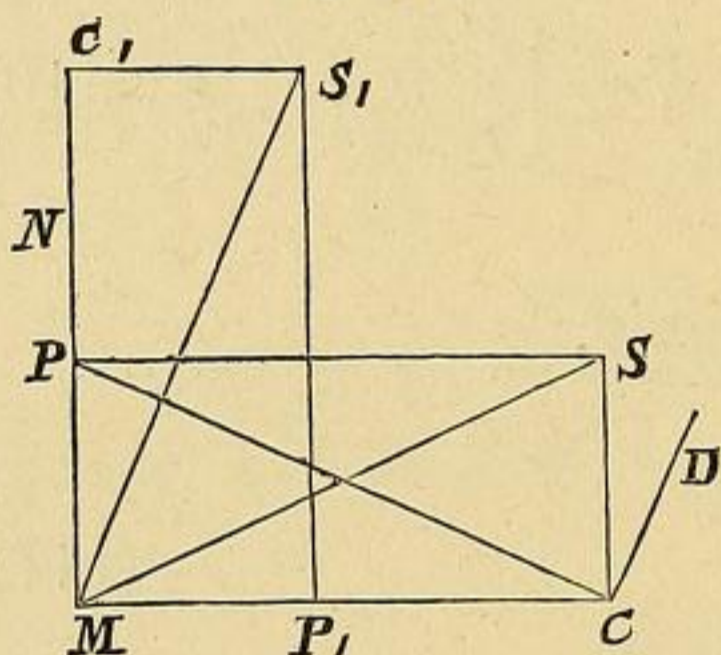
$$x'_2 = \frac{\rho}{r} l + \rho' f, \quad y'_2 = \frac{\rho}{r} m + \rho' g, \quad z'_2 = \frac{\rho}{r} n + \rho' h; \quad (114)$$

puis

$$s'_2 = \sqrt{\frac{\rho^2}{r^2} + \rho'^2} = \frac{R}{r} \dots \dots \dots (115)$$

Les cosinus directifs de *la tangente CD* (fig. 21) au lieu des centres de courbure sont donc

Fig. 21.



$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{R} (\rho l + r \rho' f), \\ q_2 &= \frac{1}{R} (\rho m + r \rho' g), \\ r_2 &= \frac{1}{R} (\rho n + r \rho' h). \end{aligned} \right\} \dots \dots (116)$$

**72. CONSTRUCTION DE LA TANGENTE.** D'après ces valeurs, si l'on construit le rectangle  $MC_1S_1P_1$  (fig. 21), *conjugué* de  $MCSP$  (46, III), *la tangente CD est parallèle à la diagonale MS<sub>1</sub>*. Ainsi :

1° *La tangente au lieu du centre de courbure est dans le plan normal ;*

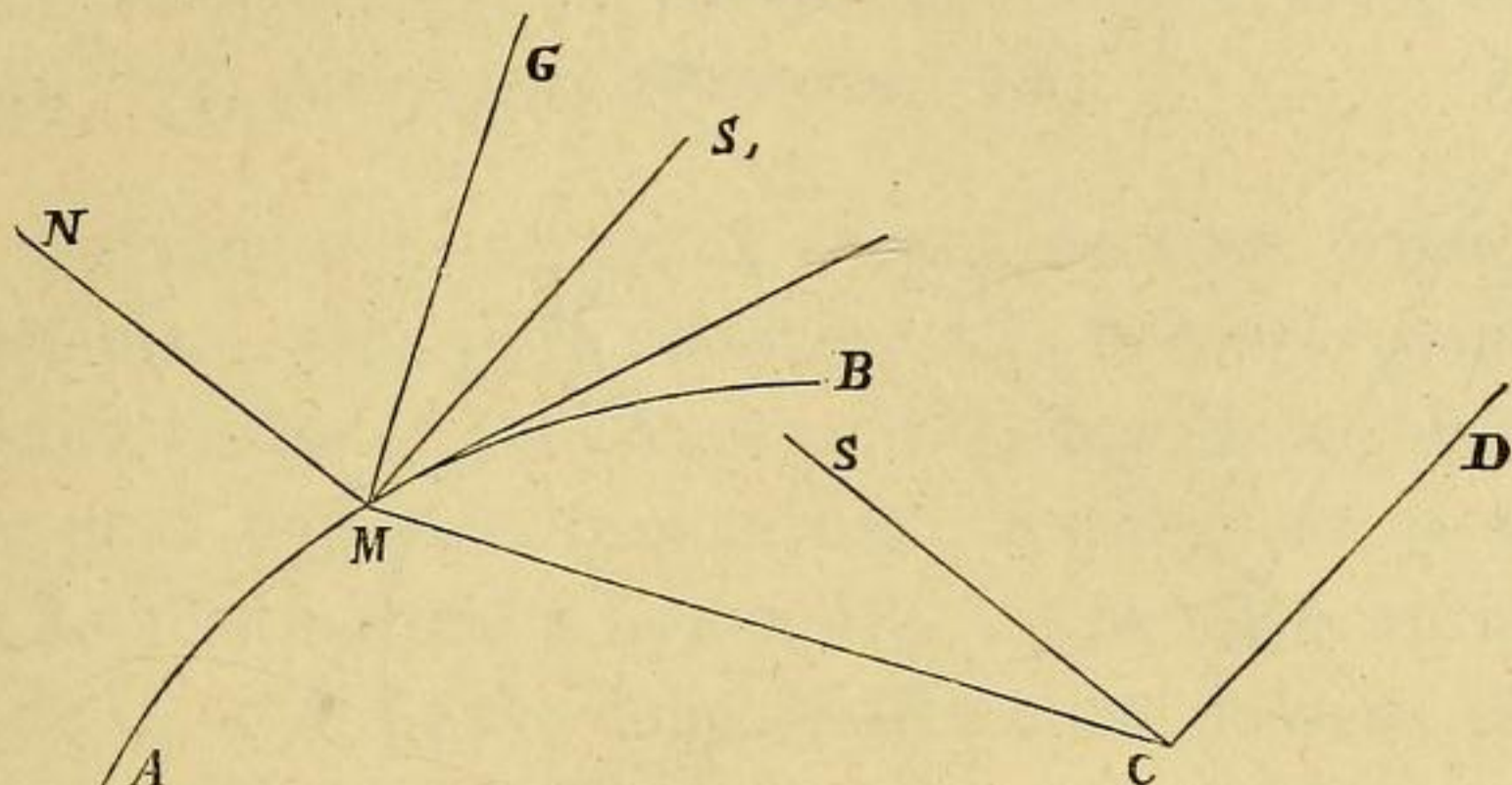
2° *L'angle formé par cette droite et la binormale est égal à celui que font entre eux le rayon de courbure MC et le rayon MS de la sphère osculatrice (\*).*

(\*) Cette conclusion, évidente à l'aspect de la figure, résulte aussi des formules :

$$\begin{aligned} \cos DCS &= \frac{1}{R} \sum l (\rho l + r \rho' f) = \frac{\rho}{R}, \\ \cos CMS &= \frac{1}{R} \sum f (\rho f + r \rho' l) = \frac{\rho}{R}. \end{aligned}$$

**73. REMARQUE.** Soit (fig. 22)  $MS_1$  la parallèle à la tangente  $CD$ ,

Fig. 22.



parallèle située dans le plan normal  $NMC$ . On vient de trouver

$$\cos CMS = \cos SCD = \cos NMS_1 = \frac{\rho}{R}.$$

D'un autre côté,  $MG$  étant la rectifiante,

$$\cos NMG = \sin H = \frac{L}{\rho} \quad (45).$$

Donc, à cause de l'angle trièdre  $MNGS_1$ , *rectangle* suivant  $MN$  :

$$\cos GMS_1 = \frac{L}{R};$$

valeur très-simple (\*).

**74. PROPRIÉTÉS CORRÉLATIVES.** Les relations entre la courbe donnée,  $C$ , et la *courbe polaire*, sont exprimées par le théorème démontré ci-dessus (14) :

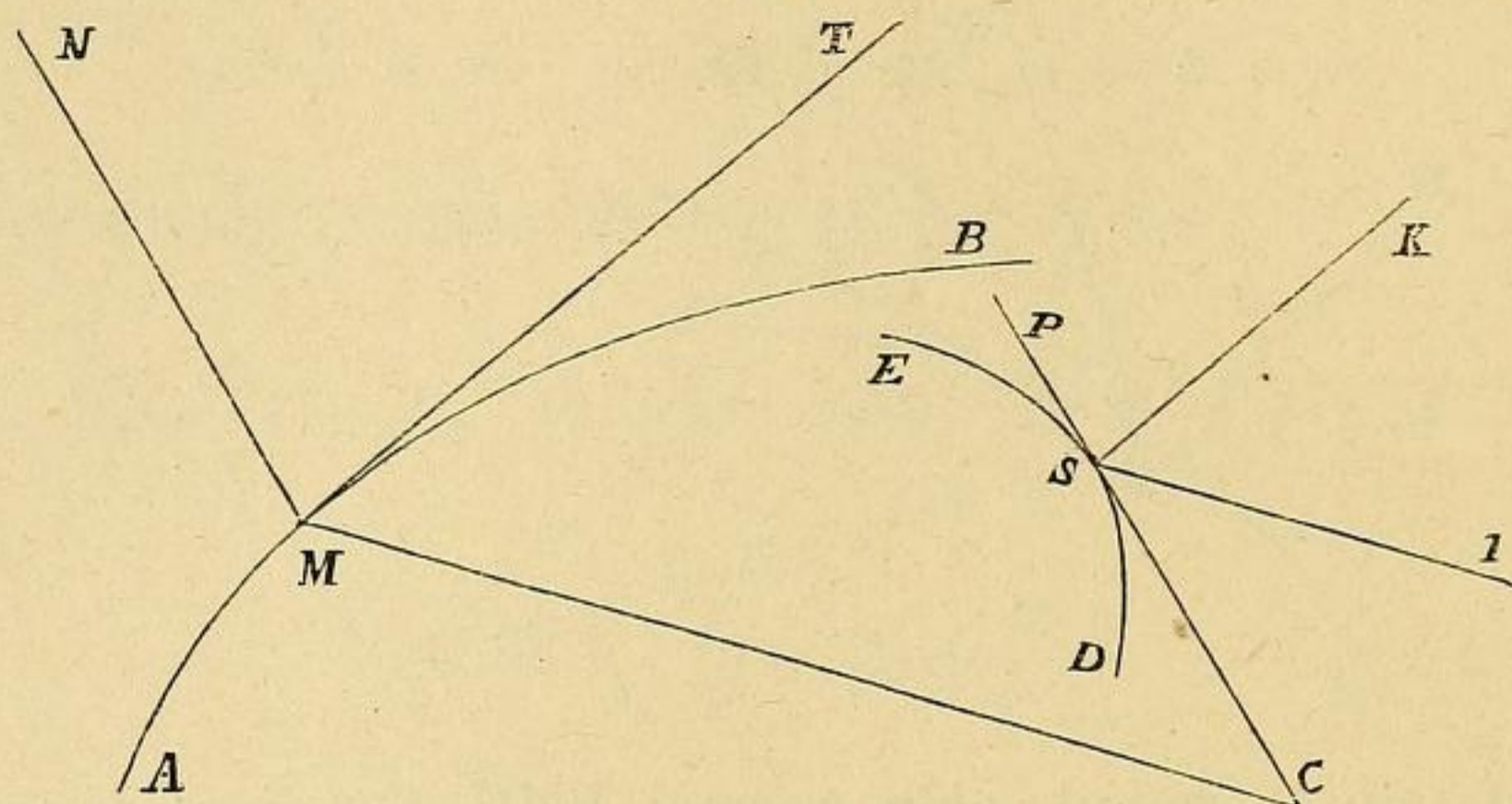
*Si les tangentes d'une courbe  $C_1$  sont parallèles aux binormales d'une courbe  $C$  : 1° réciproquement, les tangentes de  $C$  sont parallèles aux binormales de  $C_1$ ; 2° les normales principales des deux courbes sont, respectivement, parallèles; 3° l'angle de torsion de chacune des courbes est égal à l'angle de contingence de l'autre.*

En effet, la tangente  $CSP$ , à la courbe polaire  $DSE$ , est paral-

(\*) Ces divers résultats, sauf la construction précédente, sont tirés du Mémoire de M. Saint-Venant.

lèle à la binormale MN (fig. 25); donc DSE est la courbe *hypothétique*  $C_1$ .

Fig. 25.



Ainsi :

1° L'angle de contingence de la courbe polaire est égal à l'angle de torsion de la courbe donnée (\*);

2° L'angle de torsion de la courbe polaire est égal à l'angle de contingence de la courbe donnée (\*);

(\*) FOURIER, cité par LANCRET (*Mémoires des Savants étrangers*, tome I, pp. 419 et suivantes). Ainsi que l'ont fait remarquer MM. Transon et Saint-Venant, Lancret a sans doute mal rendu la pensée de Fourier. On lit, en effet, à la page 419 du Mémoire de Lancret : « la première flexion de la » développante est égale à la seconde flexion de la développée, ... , la première flexion de la développée est égale à la seconde flexion de la développante. » Dans cet énoncé, les expressions : première flexion, seconde flexion, développante, développée remplacent, respectivement : courbure, torsion, courbe donnée, courbe polaire. Ainsi, d'après Lancret :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_1}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{r}$$

ou

$$\rho = r_1, \quad \rho_1 = r;$$

tandis que, véritablement (19) :

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds_1}{r_1}, \quad \frac{ds_1}{\rho_1} = \frac{ds}{r}.$$

L'erreur dans laquelle est tombé Lancret (erreur qui consiste dans l'égalité  $ds_1 = ds$ ), provient, évidemment, de la définition, inadmissible,



3° Les normales principales des deux courbes sont parallèles (\*).

4° Le rectangle,  $\rho\rho_1$ , des rayons de courbure, est équivalent au rectangle,  $rr_1$ , des rayons de torsion (15).

**75. SURFACE POLAIRE DE LA COURBE POLAIRE.** Soient, comme précédemment,  $C$  la courbe donnée, et  $C_1$  la courbe polaire de  $C$ , c'est-à-dire l'arête de rebroussement de la surface polaire. Soient  $M, M_1$  deux points correspondants, respectivement situés sur  $C, C_1$ . Le plan normal à  $C_1$ , en  $M_1$ , est parallèle au plan osculateur de  $C$ , en  $M$  (14); donc l'intersection de deux plans normaux à  $C_1$  est parallèle à l'intersection de deux plans osculateurs à  $C$ . Autrement dit :

*La droite polaire de  $C_1$ , et la tangente à  $C$ , en deux points correspondants, sont parallèles.*

**76. AUTRES ÉNONCÉS.** Soit  $\Sigma$  la développable engendrée par la tangente à  $C$ . Soient  $\Sigma_1$  la surface polaire de  $C$ ,  $\Sigma_2$  la surface polaire de  $C_1$ , et enfin  $C_2$  l'arête de rebroussement de  $\Sigma_2$ . La dernière proposition peut encore être énoncée de ces deux manières :

1° Les tangentes aux courbes  $C, C_2$  sont respectivement parallèles ;

2° Les génératrices des surfaces  $\Sigma, \Sigma_2$  sont respectivement parallèles.

**77. REMARQUES. I.** Si la ligne  $C$  est à courbure constante (et seulement dans ce cas), le plan normal à  $C_1$  coïncide avec le plan osculateur de  $C$ ; donc la droite polaire de  $C_1$  coïncide avec la tangente à  $C$ ; c'est-à-dire que :

*La courbe polaire  $C_1$ , d'une ligne  $C$  à courbure constante, est*

imprimée à la page 418 : « Ces deux flexions sont... mesurées, la première par l'angle que forment entre eux deux plans normaux consécutifs.... » Il est clair qu'une quantité variable, dont la limite est zéro, ne peut servir de mesure à une quantité constante, finie.

(\*) M. LEMONNIER (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. IV, p. 612).

le lieu des centres de courbure de  $C$ ; et la courbe polaire de  $C_1$  est  $C$ .

II. Dans le même cas, le point  $M$ , de  $C$ , est à la fois sur la droite polaire de  $C_1$  et dans le plan osculateur de  $C_1$ ; donc  $M$  est le centre de courbure de  $C_1$ . Ainsi :

*Le lieu des centres de courbure d'une ligne  $C$ , à courbure constante, est une ligne  $C_1$ , à courbure constante; et le lieu des centres de courbure de  $C_1$  est la ligne donnée  $C$  (\*).*

III. Les centres  $C$ ,  $C_1$  coïncidant avec  $M_1$ ,  $M$ , on a, en valeur absolue,  $\rho_1 = \rho$ ; et, par conséquent (74, 40) :  $r_1 = \frac{\rho^2}{r}$ .

**78. CENTRE DE COURBURE DE LA COURBE POLAIRE.** Les coordonnées de ce point sont données par les formules

$$\begin{aligned} X - x &= (\rho + \rho_1) f + r\rho' l, \\ Y - y &= (\rho + \rho_1) g + r\rho' m, \\ Z - z &= (\rho + \rho_1) h + r\rho' n, \end{aligned}$$

si les droites  $MC$ ,  $M_1C_1$  sont dirigées dans le même sens (\*\*); et par les formules

$$\begin{aligned} X - x &= (\rho - \rho_1) f + r\rho' l, \\ Y - y &= (\rho - \rho_1) g + r\rho' m, \\ Z - z &= (\rho - \rho_1) h + r\rho' n, \end{aligned}$$

si ces droites sont dirigées en sens contraires. Lorsque  $\rho' = 0$ , les premières équations deviennent

$$X - x = 2\rho f, \quad Y - y = 2\rho g, \quad Z - z = 2\rho h.$$

Ce résultat est inadmissible, attendu que les points  $C_1$ ,  $M$  doivent coïncider (77). Par conséquent, le premier système est également inadmissible : les rayons  $MC$ ,  $M_1C_1$  sont dirigés en sens

(\*) Dans sa remarquable *Théorie des courbes à double courbure*, M. Paul Serret attribue ce théorème à M. Bouquet.

(\*\*)  $\rho_1$  est supposé positif.

contraires; et l'on a, en remplaçant  $\rho_1$  par  $rs'_1 = \rho + r(r\rho)'$  (19, 68) :

$$\left. \begin{aligned} X - x &= r [\rho' l - (r\rho)' f], \\ Y - y &= r [\rho' m - (r\rho)' g], \\ Z - z &= r [\rho' n - (r\rho)' h] \quad (*) \end{aligned} \right\} \dots (117)$$

**IX. Lieu des binormales. — Lieu des rayons de courbure, etc.**

**79. LIEU DES BINORMALES.** On a vu (13) que deux binormales consécutives MN, M'N', sont perpendiculaires à la tangente MT. La première droite est perpendiculaire au plan osculateur en M; et la seconde, perpendiculaire au plan osculateur en M'. Conséquemment, *le lieu des binormales est, en général, une surface gauche.*

De plus, la tangente MT pouvant être regardée comme la perpendiculaire à MN, M'N', *la ligne de striction, du lieu des binormales, est la courbe donnée (\*\*).*

**80. LIEU DES RAYONS DE COURBURE (OU DES NORMALES PRINCIPALES).** Ce lieu est aussi une surface gauche.

En effet, si les rayons MC, M'C' étaient dans un même plan; ou, ce qui revient au même, *si le rayon M'C' était situé dans le plan osculateur TMC, l'angle de torsion serait nul; ce qui ne peut avoir lieu que pour des points singuliers.*

**81. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX RAYONS CONSÉCUTIFS.** Soit KK' (fig. 24) cette plus courte distance, parallèle à la rectifiante MH (43, II). Si nous menons M'H perpendiculaire à MG, nous aurons, dans le *rectangle MHKK'* :

$$KK' = MH = ds \cos H;$$

(\*) A cause de  $s'_1 = \frac{RR'}{r\rho'}$ , on a aussi

$$\rho_1 = \frac{RR'}{\rho'}$$

(\*\*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive; Recherches sur les surfaces gauches, etc.*

ou (45) :

$$KK' = \frac{L}{r} ds. \dots \dots \dots (118)$$

**82. INDICE DU LIEU.** J'ai appelé *indice* d'une surface gauche quelconque, la limite du rapport entre la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et l'angle de ces droites (\*). Dans l'exemple actuel, l'angle dont il s'agit est  $\omega = \frac{ds}{L}$  (17); donc

$$i = \frac{L^2}{r} \dots \dots \dots (119)$$

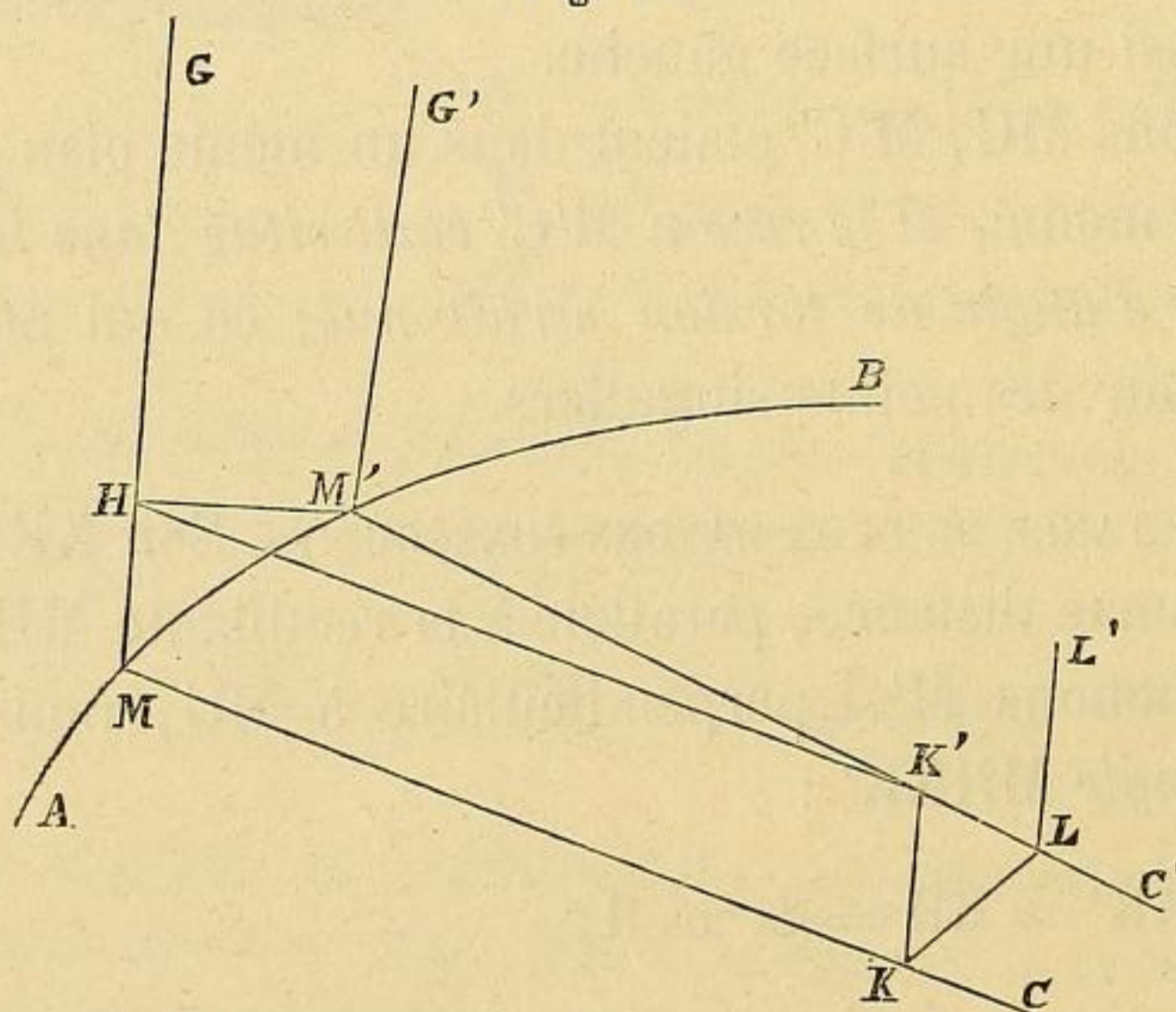
**83. REMARQUE.** Soit, comme précédemment (54, 61),

$$R_1 = \frac{L^2}{\rho} = \Delta$$

le rayon de la section principale FMC. Il résulte, de la comparaison de ces formules,

$$R_1^2 + i^2 = L^2.$$

Fig. 24.



**84. POSITION DE LA PLUS COURTE DISTANCE.** On peut la déterminer en cherchant les équations des plans GMC, G'M'C' (fig. 24), G'M' étant une parallèle à MG; mais il est beaucoup plus simple d'évaluer la distance MK (\*\*).

(\*) *Recherches sur les surfaces gauches*, p. 8. — La dénomination d'indice n'est-elle pas préférable à celle de paramètre de distribution des plans tangents ?

(\*\*) Le lieu du point K est la ligne de striction de la surface gauche engendrée par MC. Conséquemment, la distance MK est celle qui est donnée

Le triangle  $M'HK'$ , rectangle en  $H$ , donne

$$HK' = MK = \frac{HM'}{\operatorname{tg} K'} = \frac{ds \sin H}{\omega}.$$

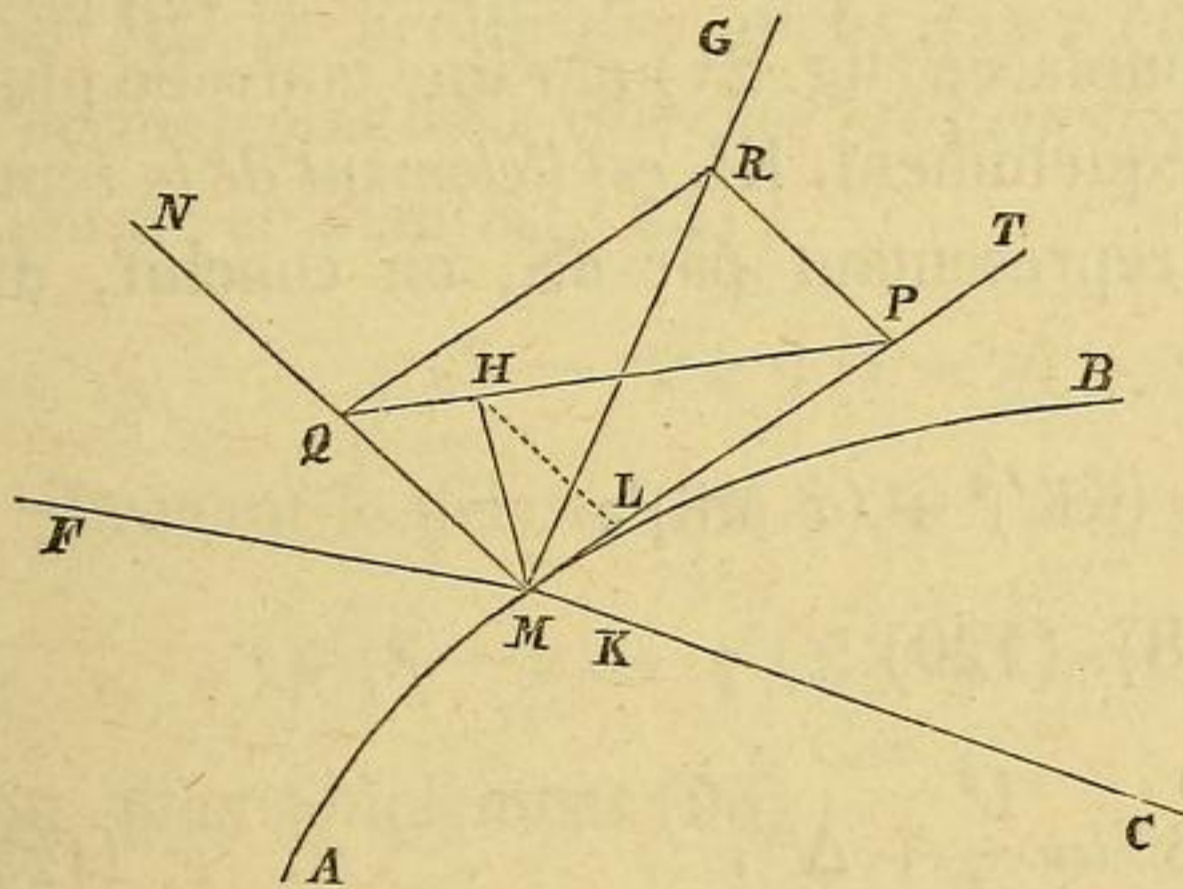
Et comme  $\sin H = \frac{L}{\rho}$  (45) :

$$MK = \frac{L^2}{\rho} = R_1 = \Delta. \dots \dots (120)$$

Ainsi, le point  $K$  coïncide, tout à la fois, avec le centre de courbure de la section principale  $FMC$ , et avec le point où la rectifiante secondaire (61) rencontre la normale principale.

85. REMARQUES. I. Si l'on se reporte à la figure 9 (45), on

Fig 25.



voit que  $MK$  est une troisième proportionnelle à  $MP$  et  $MH$ . Soit  $HL$  (fig. 25) perpendiculaire à  $MP$  ; alors cette troisième proportionnelle est représentée par  $ML$ . Conséquemment,  $MK = ML$ .

II. Si l'on prend  $MC = MP = \rho$ , on a

$$\frac{MK}{CK} = \frac{ML}{PL} = \frac{QH}{PH} = \frac{r^2}{\rho^2}.$$

III. Le point  $K$  et le plan  $GMK$ , considérés relativement à la surface gauche engendrée par  $MC$ , sont appelés *point central* et *plan central*. Le plan  $FMC$ , mené par la génératrice  $MC$ , perpendiculairement à  $MG$ , est désigné sous le nom de *plan asymptotique*.

par la formule  $v = -\frac{B}{C}$ . (*Recherches...*, p. 13.) En effet, l'application de cette formule conduit à  $v = \frac{r^2 \rho}{r^2 + \rho^2}$ , valeur identique à celle que nous allons trouver.

**86.** ÉQUATIONS DE LA PLUS COURTE DISTANCE. Les coordonnées du point  $K$  sont, d'après la formule (120) :

$$X = x + \frac{L^2}{\rho} f, \quad Y = y + \frac{L^2}{\rho} g, \quad Z = z + \frac{L^2}{\rho} h; \quad (121)$$

done,  $p, q, r$  désignant toujours les cosinus directs de la rectifiante, les équations cherchées sont :

$$\frac{X - x - \frac{L^2}{\rho} f}{p} = \frac{Y - y - \frac{L^2}{\rho} g}{q} = \frac{Z - z - \frac{L^2}{\rho} h}{r}. \quad (122)$$

**87.** LIGNE DE STRICTION. Le lieu du point  $K$  est, on l'a déjà vu, la *ligne de striction* (\*) de la surface engendrée par la normale principale  $MC$ . Quand on passe du point  $M$  au point  $M'$ , la plus courte distance  $KK'$  est remplacée (fig. 24) par une nouvelle plus courte distance  $LL'$ . Conséquemment,  $KL$  est l'élément de la *ligne de striction* (\*\*). En le représentant par  $dS$ , on conclut, du triangle rectangle  $KK'L$  :

$$dS^2 = (KK')^2 + (d \cdot MK)^2;$$

ou, par les formules (118), (120) :

$$S'^2 = \frac{L^2}{r^2} + \Delta'^2. \quad (123)$$

**88.** TANGENTE A LA LIGNE DE STRICTION. L'élément  $KL$  (fig. 24), situé dans le plan  $G'M'C'$ , peut être supposé dans le plan  $GMC$ , puisque ces deux plans forment entre eux l'angle infiniment petit  $K' = \omega$ . Cela posé, si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle que fait  $KL$  avec la rectifiante, on a

$$\sin \alpha = \frac{K'L}{KL} = \frac{\Delta'}{S'}, \quad \cos \alpha = \frac{KK'}{KL} = \frac{L}{rS'};$$

(\*) Pour la théorie générale de cette ligne, le lecteur peut consulter nos *Recherches sur les surfaces gauches*, paragraphes V et VI.

(\*\*) Et non  $KK'$ , comme le croyait Lacroix (*Traité de calcul différentiel...*, tome III, p. 668).

puis

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{L} \Delta' . . . . . (124) (*)$$

**89. ACCOMPAGNATRICE DU LIEU DES BINORMALES.** La développable accompagnatrice d'une surface gauche S, est l'enveloppe  $\Sigma$  des plans P, asymptotiques à S (\*\*).

Cette définition étant rappelée, supposons que S soit le lieu des binormales MN, M'N', ... à la courbe AB. La binormale M'N', perpendiculaire à la tangente MT, est, par cela même, parallèle au plan normal NMC. Autrement dit, le plan normal est asymptotique à S; donc (64) l'accompagnatrice du lieu des binormales est la surface polaire.

**90. ACCOMPAGNATRICE DU LIEU S<sub>1</sub> DES NORMALES PRINCIPALES.** Le plan asymptotique de ce lieu est le plan FMC (85, II) mené par MC, perpendiculairement à la rectifiante MG (fig. 25). Ainsi, l'accompagnatrice cherchée est l'enveloppe du plan FMC. L'équation de ce plan est (45) :

$$p(X - x) + q(Y - y) + r(Z - z) = 0. . . (125)$$

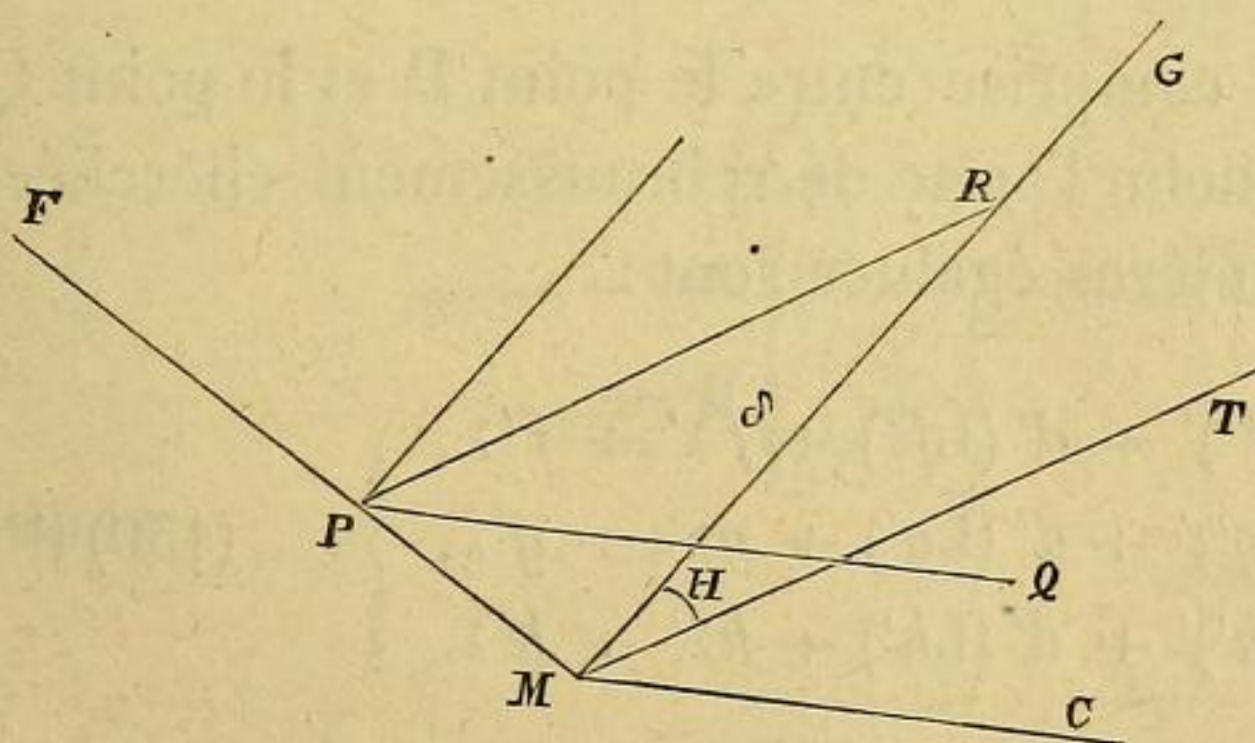
Prenant la dérivée, on a

$$p'(X - x) + q'(Y - y) + r'(Z - z) = \cos H;$$

ou, plus simplement (95) :

$$f'(X - x) + g'(Y - y) + h'(Z - z) = \frac{\cos H}{LH'}. . . (126)$$

Fig. 26.



[L'ensemble des équations (125), (126) représente la génératrice PQ de S<sub>2</sub> (fig. 26), parallèle à MC, et rencontrant MF en un point P. Si d désigne

(\*) Les valeurs (125), (124) résultent aussi des formules (121), mais par un calcul un peu long.

(\*\*) Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces, § II.

la distance  $MP$ , on a

$$X - x = dLf', \quad Y - y = dLg', \quad Z - z = dLh'; \quad . \quad (127)$$

puis, par l'équation (126):

$$d = \frac{\cos H}{H'} = \delta \cot H; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

d'après la formule (91). Cette valeur de  $d$  prouve que,  $R$  étant le point de la courbe rectifiante (fig. 27), le milieu  $I$  de l'hypoténuse  $RP$  est situé sur la binormale  $MN$  (\*).

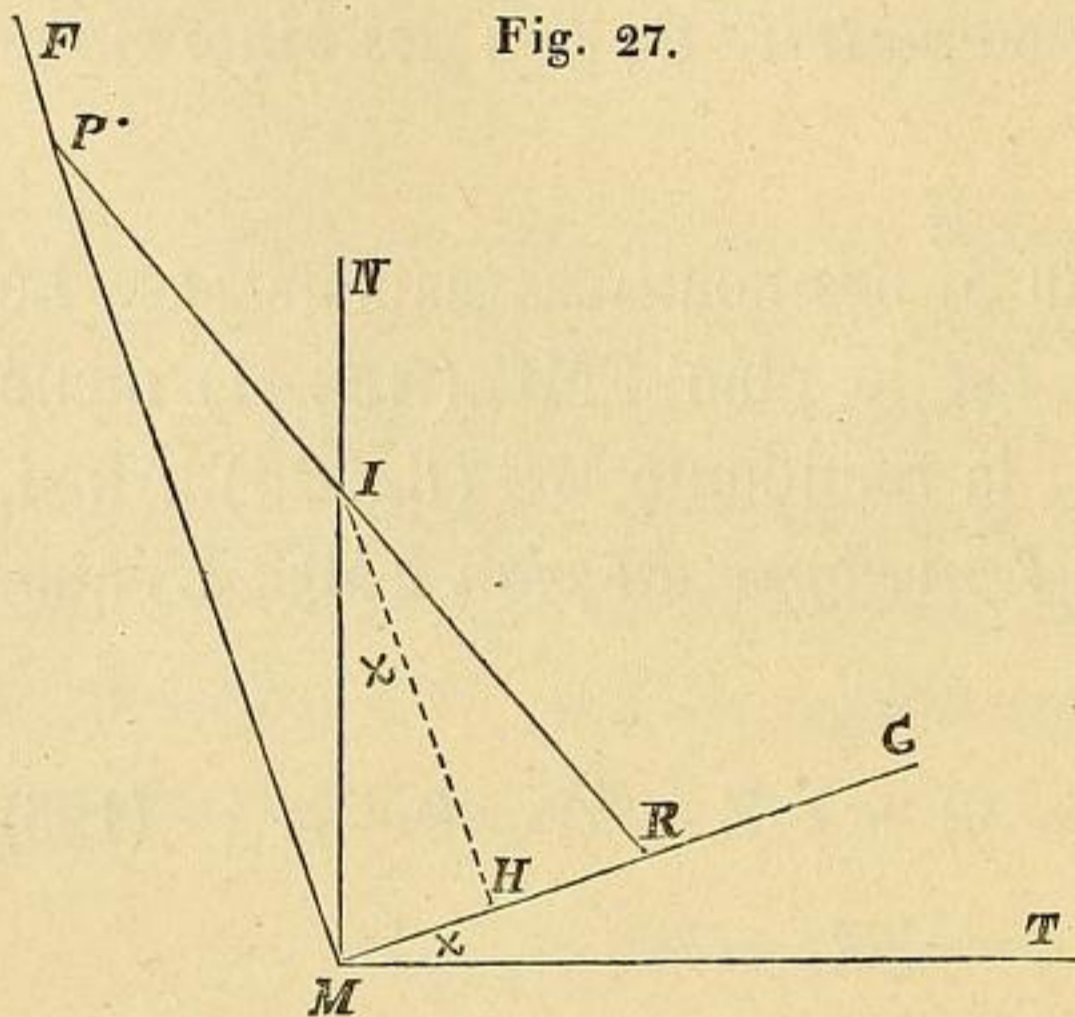


Fig. 27.

**91. ARÊTE DE REBROUSSEMENT.** Les coordonnées du point  $P$  étant connues, la génératrice  $PQ$  (fig. 26) peut être représentée par

$$\frac{X - x - dLf'}{f} = \frac{Y - y - dLg'}{g} = \frac{Z - z - dLh'}{h},$$

ou par

$$X - x = dLf' + f\lambda, \quad Y - y = dLg' + g\lambda, \quad Z - z = dLh' + h\lambda; \quad (129)$$

$\lambda$  désignant la distance comprise entre le point  $P$  et le point  $Q$  où la génératrice  $PQ$  touche l'arête de rebroussement cherchée. Les dérivées de ces dernières égalités sont :

$$\left. \begin{aligned} - a &= d(Lf')' + d'(Lf') + f\lambda' + f'\lambda, \\ - b &= d(Lg')' + d'(Lg') + g\lambda' + g'\lambda, \\ - c &= d(Lh')' + d'(Lh') + h\lambda' + h'\lambda. \end{aligned} \right\} . \quad . \quad (130) (**)$$

(\*) La distance  $MI = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\sin H} = \frac{1}{2H'}$ .

(\*\*) L'élimination de  $\lambda, \lambda'$  conduit à une identité; ce qui doit être.



On en conclut :

$$-\sum a(Lf') = d' + L\lambda \sum f'^2,$$

ou

$$-\cos TMF = d' + \frac{\lambda}{L};$$

ou enfin

$$\lambda = L(-d' + \sin H). \quad \dots \quad (131)$$

**92. RÉDUCTIONS.** Les distances  $d, \lambda$  peuvent être exprimées en fonction des rayons  $\rho, r$  et de leurs dérivées.

$$1^\circ \quad d = \frac{\cos H}{H'} = -\frac{L}{r} \frac{\rho^2}{L^2} \frac{1}{\left(\frac{\rho}{r}\right)'}, \quad (45, 48);$$

ou, plus simplement,

$$d = \frac{r}{L} \frac{\rho^2}{r\rho' - \rho r'} = \frac{1}{\cos H \left(\frac{r}{\rho}\right)'}. \quad \dots \quad (132)$$

$$2^\circ \quad d' = \frac{\cos H \left(\frac{r}{\rho}\right)'' - H' \sin H \left(\frac{r}{\rho}\right)'}{\cos^2 H \left[\left(\frac{r}{\rho}\right)'\right]^2}$$

$$= \frac{\cos H \left(\frac{r}{\rho}\right)'' - \cos^2 H \sin H \left[\left(\frac{r}{\rho}\right)'\right]^2}{\cos^2 H \left[\left(\frac{r}{\rho}\right)'\right]^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{r}{\rho}\right)''}{\cos H \left[\left(\frac{r}{\rho}\right)'\right]^2} + \sin H;$$

done

$$\lambda = \frac{L}{\cos H} \frac{\left(\frac{r}{\rho}\right)''}{\left[\left(\frac{r}{\rho}\right)'\right]^2},$$

ou enfin

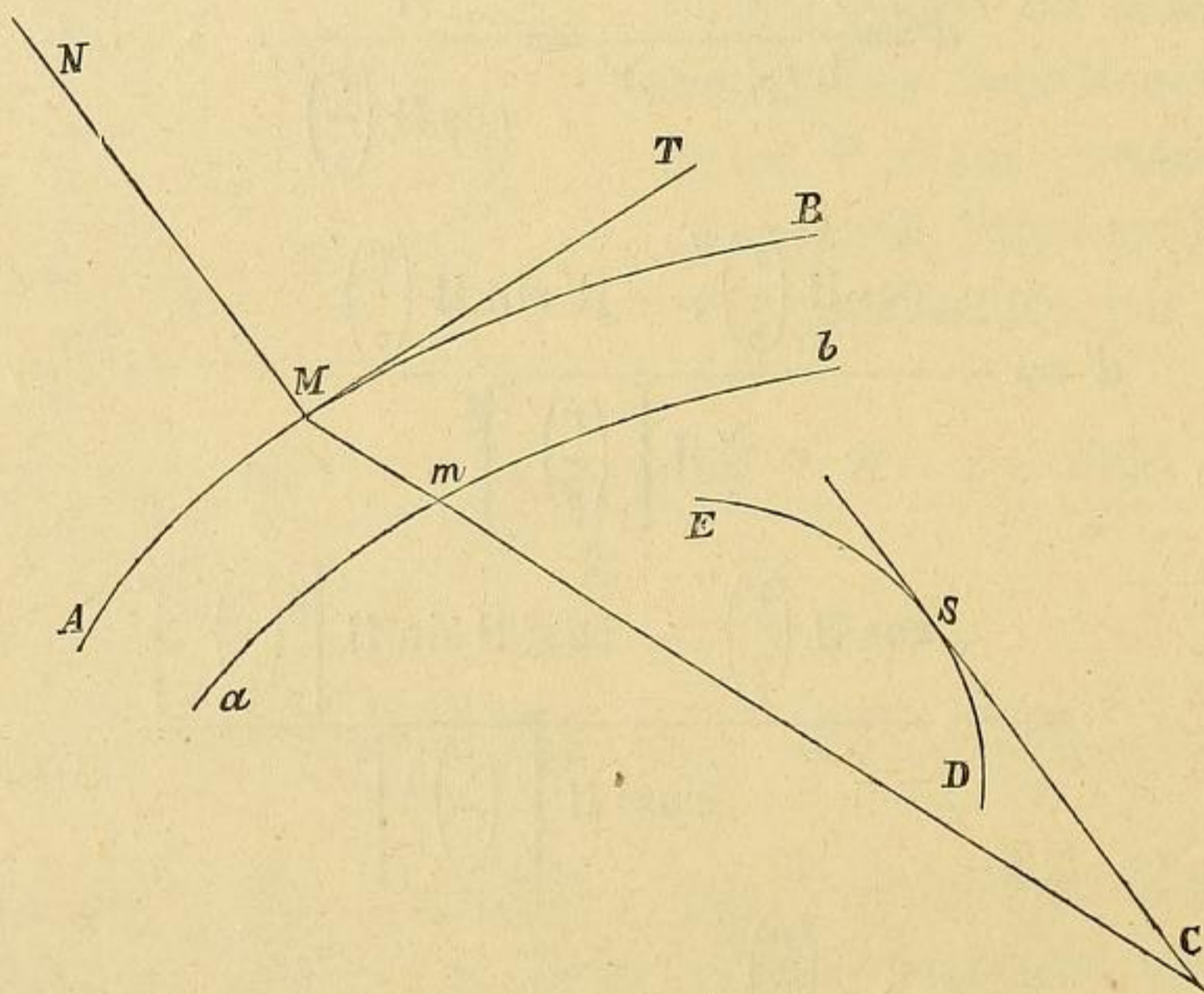
$$\lambda = -r \left[ \frac{1}{\left( \frac{r}{\rho} \right)'} \right]' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (155)$$

**93.** Nous bornons ici ce qui est relatif aux propriétés du lieu des normales principales. On en trouvera d'autres dans le Mémoire cité plusieurs fois (\*).

### X. Développement de la surface polaire.

**94.** TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UN PLAN MOBILE. Concevons que le plan normal NMC (fig. 28), tangent à la surface polaire S

Fig. 28.



dont il est l'enveloppe, *roule* sur celle-ci, en entraînant le point M. Pendant le mouvement, M décrit une ligne dont un élément

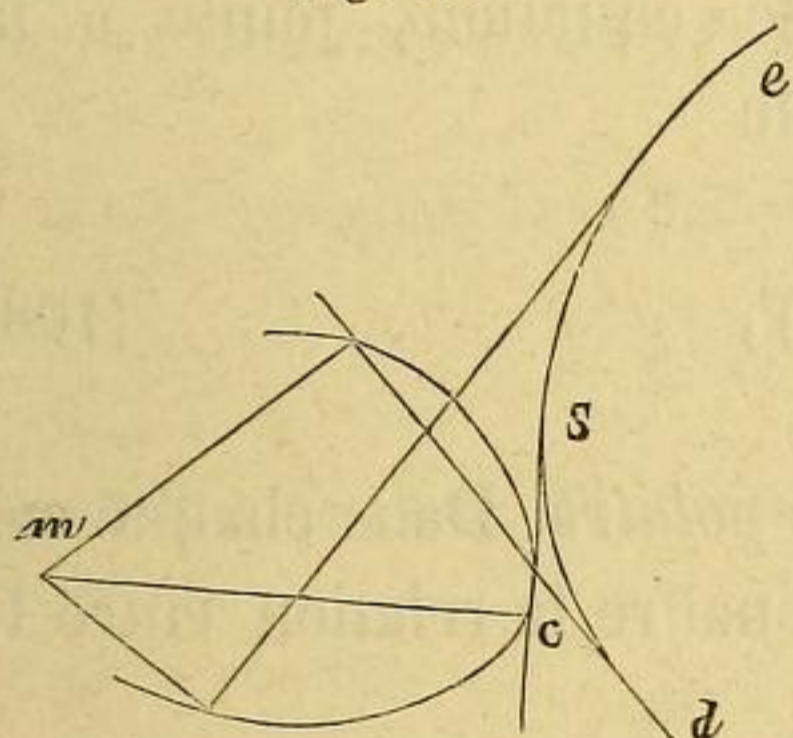
(\*) Pages 75 et suiv. La page 75 contient une singulière faute d'inattention : *les rayons des sections principales sont dirigés suivant les bissectrices, etc.* On doit lire : *les plans des sections principales contiennent les bissectrices.* Il est évident que les *rayons* sont dirigés suivant la binormale MN ou suivant son prolongement.

quelconque est perpendiculaire au plan : *cette trajectoire orthogonale est donc la courbe donnée, AMB (\*)*.

**95. COURBES PARALLÈLES.** Tout autre point  $m$ , situé dans le plan mobile, décrit une nouvelle trajectoire orthogonale  $amb$  : les lignes  $AMB$ ,  $amb$ , qui ont même plan normal, en deux points correspondants, sont dites *courbes parallèles*. Il résulte, de la génération de ces lignes, que *la distance entre deux points correspondants est constante*. En outre, comme la position du point  $S$  ne dépend que de la loi suivant laquelle se meut le plan  $P$  :  
 1° *Les sphères osculatrices à plusieurs courbes parallèles, en des points correspondants, ont même centre* ;  
 2° *une série de courbes parallèles ont toujours même courbe polaire*.

**96. DÉVELOPPEMENT DE LA SURFACE POLAIRE.** Soit, dans ce développement,  $esd$  (fig. 29) la transformée de la courbe polaire  $ESD$

Fig. 29.



(fig. 28), arête de rebroussement de cette surface. Une droite polaire quelconque,  $SC$ , a pour transformée une tangente  $sc$  à  $esd$ . Quant au point  $M$ , il a pour transformée le point  $m$  que l'on obtient en prenant  $sc = SC = r\rho'$ , puis  $cm = CM = \rho$ , perpendiculaire à  $sc$ . *Pour une même courbe primitive  $AMB$ , le point  $m$  est invariable (94)*.

**97. TRANSFORMÉE DU LIEU DES CENTRES DE COURBURE.** Le point  $c$ , transformé de  $C$ , est la projection de  $m$  sur la tangente  $sc$ . Et puisque le point  $m$  est fixe, *le lieu de  $c$  est la podaire de  $esd$ , relativement au pôle  $m$  (\*\*)*.

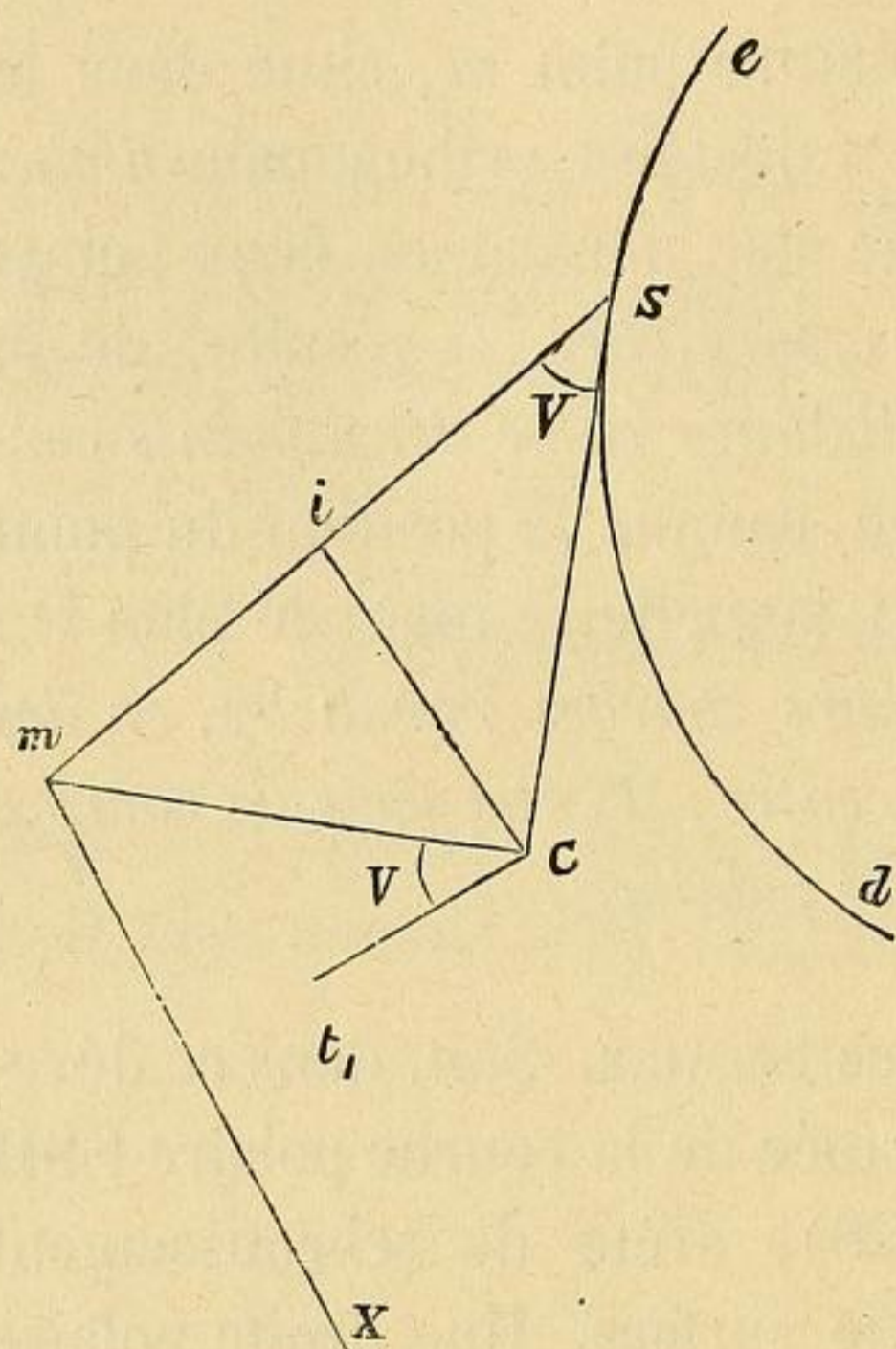
**98. ÉQUATIONS DES DEUX TRANSFORMÉES.** Rapportons ces lignes

(\*) (*Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. — VI. — Surfaces d'enroulement.*)

(\*\*) LANCRET, *Correspondance sur l'École polytechnique*, tome I, p. 51.

au point  $m$ , pris comme pôle, et à une droite fixe  $mX$  (fig. 30).

Fig. 30.



Soient  $smX = \varphi$ ,  $cmX = \varphi_1$  les amplitudes des points  $s, c$  : les rayons vecteurs correspondants sont  $ms = R = \sqrt{\rho^2 + (r\rho')^2}$ ,  $mc = \rho$ .

1° La relation  $\text{tg } V = \frac{u d\omega}{du}$ , appliquée à la première courbe, donne  $\frac{\rho}{r\rho'} = \frac{R d\varphi}{dR}$  ; d'où résulte

$$d\varphi = \frac{\rho R'}{R r \rho'} ds, \quad (134)$$

puis

$$\varphi = \int \frac{\rho R'}{R r \rho'} ds + \text{const.} \quad (135)$$

Cette équation, jointe à la formule

$$R = \sqrt{\rho^2 + (r\rho')^2}, \quad (108)$$

représente la transformée de la courbe polaire. Dans chaque cas particulier, l'élimination de  $s$  fera connaître la relation entre  $R$  et  $\varphi$ .

2° Par la définition de la podaire, l'accroissement de l'amplitude  $\varphi_1$  est égal à l'angle de contingence de la première transformée. D'un autre côté, cet angle de contingence, égal à celui de la courbe polaire, est égal, par conséquent (74), à l'angle de torsion de la courbe primitive. Donc

$$d\varphi_1 = \frac{ds}{r}, \quad (136)$$

ou

$$\varphi_1 = \int \frac{ds}{r} + \text{const.} \quad (137)$$

Avec cette formule, on doit prendre

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \quad (*) . . . . . (18)$$

**99. TRANSFORMÉE SPHÉRIQUE.** Si, par le centre d'une sphère dont le rayon est pris pour unité, on mène des parallèles aux binormales d'une courbe primitive  $C$ , le lieu des points où ces droites rencontrent la sphère est une courbe  $T$ , que l'on peut appeler *transformée sphérique* de  $C$  (\*\*). Cela posé, prenons, pour centre de la sphère, le point  $m$  (96); soit  $abc$  la transformée, par développement, du lieu des centres de courbure de  $C$  (97); et soit  $a'b'$  l'arc de grand cercle, compris entre les rayons vecteurs menés aux points  $a, b$ , correspondant aux points  $A, B$  de la courbe primitive  $C$ . Il résulte, de l'équation (137), la propriété suivante :

*Un arc de la transformée sphérique  $T$ , et l'arc de grand cercle correspondant, ont même longueur (\*\*\*) .*

(\*) L'inspection de la figure montre que

$$\varphi - \varphi_1 = \text{arc} \cos \frac{\rho}{R}.$$

On doit donc avoir, d'après les valeurs (134), (136) :

$$\frac{\rho R'}{R r \rho'} - \frac{1}{r} = - \frac{\left(\frac{\rho}{R}\right)'}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}}.$$

En effet, le second membre est égal à  $-\frac{1}{R r \rho'} (R \rho' - \rho R')$ .

(\*\*) Par analogie avec la *transformée sphérique d'une surface*.

(\*\*\*) Si la transformée  $acb$  est une courbe fermée, convexe, extérieure au pôle  $m$ , l'arc de grand cercle  $a'b'$  devient, si l'on veut, la circonférence entière. Donc, dans ce cas, *la transformée sphérique  $T$  est équivalente à une circonférence de grand cercle*. En d'autres termes, la même hypothèse étant admise :

$$\int \frac{ds}{r} = 2\pi,$$

pourvu que l'intégrale soit étendue à tous les points de la courbe donnée. La

### XI. Développées et développantes.

**100. DÉFINITIONS. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.** *AMB* étant la trajectoire d'un point *M*, on prend, sur la tangente *MT*, et *en sens contraire du mouvement*,  $MP = \text{arc } MA = s$  : le lieu *APD* du point *P* est la *développante* de *AMB*. Inversement, la courbe *AMB* est une *développée* de *APD* (\*).

D'après la définition, les coordonnées du point *P* sont données par les formules

$$X = x - as, \quad Y = y - bs, \quad Z = z - cs.$$

Il en résulte :

$$dX = -sda, \quad dY = -sdb, \quad dZ = -sdc; \quad \dots \quad (158)$$

puis

$$dS = s\varepsilon; \quad \dots \quad (159)$$

et encore

$$\frac{\frac{dX}{dS}}{\frac{da}{\varepsilon}} = \frac{\frac{dY}{dS}}{\frac{db}{\varepsilon}} = \frac{\frac{dZ}{dS}}{\frac{dc}{\varepsilon}} = -1. \quad \dots \quad (140)$$

Dans ces proportions, les antécédents sont les cosinus directifs de la tangente à la développante; les conséquents sont les cosinus directifs de la normale principale à la développée; donc

complication des calculs ne m'a pas permis de vérifier cette égalité, qui rappelle un problème de Gauss.

Pour terminer ce Chapitre, j'énoncerai une propriété des podaires, conséquence des formules (115) ou (157), et dont la démonstration directe est facile :

Soient  $u, \varepsilon$  le rayon vecteur et l'angle de contingence, en un point *M* de la courbe DIRECTRICE. Soit  $d\sigma$  l'élément de la podaire, au point *P* qui correspond à *M*. On a  $d\sigma = u\varepsilon$ .

(\*) On va voir qu'à une même développante, correspondent une infinité de développées.

ces deux droites sont parallèles, mais dirigées en sens contraires.

**101.** ANGLE DE CONTINGENCE DE LA DÉVELOPPANTE. Il est égal, évidemment, à l'angle  $\omega$  formé par deux normales principales, consécutives, de la développée.

**102.** CENTRE ET RAYON DE COURBURE.  $E = \omega$  étant l'angle de contingence, en P, le rayon de courbure est

$$R = \frac{dS}{E} = \frac{s\varepsilon}{ds} L = s \frac{L}{\rho};$$

ou (84)

$$R = s \cdot \sin H. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

D'un autre côté, si A, B, C sont les cosinus directifs de la tangente à la développante :

$$A = -a'_\rho = -f, \quad B = -b'_\rho = -g, \quad C = -c'_\rho = -h;$$

donc

$$dA = -f'ds, \quad dB = -g'ds, \quad dC = -h'ds. \quad . \quad (142)$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on voit (46, V) que :

1° La normale principale, à la développante, est la perpendiculaire abaissée, du point P, sur la rectifiante en M; 2° le centre de courbure de la développante est le pied de cette perpendiculaire (\*).

**103.** DÉVELOPPANTE D'UNE SÉRIE DE COURBES. Soient, sur une développable  $\Sigma$ , dont les génératrices sont ABC, A'B'C', ..., diverses lignes géodésiques MAA', MBB', MCC', ... partant d'un même point M. Soit MPP' la développante de MAA'. La tangente PR est parallèle à la normale principale AN (100), c'est-à-dire, perpendiculaire au plan tangent, en A, à  $\Sigma$  (42, note). Ainsi déjà : la développante MPP' d'une ligne géodésique MAA', tracée sur la développable  $\Sigma$ , est une trajectoire orthogonale des

(\*) Ce résultat s'accorde avec la formule (141).

*plans tangents à  $\Sigma$ . Mais le plan tangent en A, à cette développable  $\Sigma$ , est tangent tout le long de la génératrice ABC; donc les normales principales en A, B, C, aux courbes MA, MB, MC, sont parallèles entre elles; et enfin : la trajectoire orthogonale d'un plan mobile P, menée par un point M de la surface  $\Sigma$ , enveloppe de P, est la développante commune de toutes les lignes géodésiques tracées sur la développable  $\Sigma$ , et passant par le point M.*

**104. REMARQUES. I.** La dernière propriété peut être envisagée autrement.

Soient, dans un plan P, un point arbitraire M et diverses droites MA, MB, MC, ... Si le plan P, d'abord tangent en M à une développable  $\Sigma$ , roule sur cette développable : 1° chacune des droites données engendre une *surface d'enroulement* (\*); 2° le point M décrit une trajectoire orthogonale, T, du plan mobile; 3° le lieu des points de contact de MA, avec  $\Sigma$ , est une ligne géodésique, dont la transformée par développement serait MA (\*\*); 4° ce lieu est donc une développée de T; etc.

II. Si la tangente MT, à la développée MA, roule sur cette courbe, de manière à prendre les positions M'T', M''T'', ... l'extrémité T, de la droite mobile, décrit la développante.

III. Si un fil, dont l'extrémité A est fixe, est d'abord appliqué sur la courbe MM'A, et qu'il soit toujours tendu, l'extrémité libre M décrit la développante MP.

IV. En considérant la développante comme composée d'une série d'arcs de cercles, infiniment petits, on a

$$\text{arc MP} = \int_0^s s \varepsilon,$$

$\varepsilon$  désignant l'angle de contingence de la développée.

(\*) *Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces.*

(\*\*) Pour élucider ce point, qui n'est peut-être pas évident *a priori*, il suffit de la considération suivante.

Soit un plan P, appliqué sur une développable  $\Sigma$ , contenant une ligne quelconque ABCD. Pour détacher le plan, à partir de la génératrice cD, on effectue des rotations successives, autour des droites cC, bB, aA : la



V. Si les géodésiques MA, MB ont même longueur :

$$\text{arc MP} = \int_0^s s \varepsilon_A, \quad \text{arc MQ} = \int_0^s s \varepsilon_B, \quad \text{arc PQ} = \int_0^s s (\varepsilon_A - \varepsilon_B).$$

L'intégrale est nulle lorsque les angles de contingence,  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  sont égaux ; et alors  $\text{arc MP} = \text{arc MQ}$ .

**105. SURFACE POLAIRE D'UNE DÉVELOPPANTE.** Soient, comme ci-dessus (100), AMB une courbe donnée; APD l'une de ses développantes; PR la tangente à la développante; MC le rayon de courbure de la développée; etc.; PR et MC sont parallèles; en outre, le centre de courbure de la développante est la projection I de P sur la rectifiante MG de la développée (100). Par conséquent, *la binormale, en P, est parallèle à cette rectifiante MG*; ou, ce qui est équivalent : 1° *la droite polaire de la développante est la rectifiante de la développée*; 2° *la surface polaire de la développante est la surface rectifiante de la développée*.

**106. SUITE.** A une même développante APD, correspondent une infinité de développées AMB, AM'B', AM''B'', ... lignes géodésiques de la surface polaire de APD (103). Les tangentes PM, PM', PM'', ... respectivement équivalentes aux arcs AM, AM', AM'', ... ont leurs points de contact situés sur la droite polaire de P. En outre, d'après ce que l'on a vu précédemment (66), le centre de la sphère osculatrice, en P, à la développante, est le point G où cette droite polaire, *rectifiante de chacune des développées*, touche son enveloppe. De là, on déduit que le rayon de la sphère osculatrice est donné par la formule

$$\overline{PG}^2 = s^2 - 2 \frac{\rho}{r \left(\frac{\rho}{r}\right)'} s + \frac{\rho^2}{L^2 \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)'\right]^2}.$$

ligne ABCD, devenue *plane*, est AB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>. Si maintenant on fait *rouler* la ligne aAB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> sur ABCD, les points B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, ... reprendront leurs positions primitives B, C, D; et chacune de ces positions sera *un contact* de  $\Sigma$  avec la ligne plane.

**XII. Quelques infiniment petits.**

**107.** ANGLE D'UNE CORDE ET D'UNE TANGENTE. Soient  $MM'$ ,  $MT$  ces deux droites, l'arc  $MM'$  étant supposé égal à  $ds$ . Les coordonnées du point  $M'$  sont, si l'on tient compte du deuxième ordre :

$$x + ads + \frac{1}{2} a'ds^2, \quad y + bds + \frac{1}{2} b'ds^2, \quad z + cds + \frac{1}{2} c'ds^2.$$

Les cosinus directifs de  $MM'$  ont donc pour valeurs :

$$\left(a + \frac{1}{2} a'ds\right) \frac{ds}{MM'}, \quad \left(b + \frac{1}{2} b'ds\right) \frac{ds}{MM'}, \quad \left(c + \frac{1}{2} c'ds\right) \frac{ds}{MM'};$$

ou, en négligeant des quantités du *troisième* ordre (\*):

$$a + \frac{1}{2} a'ds, \quad b + \frac{1}{2} b'ds, \quad c + \frac{1}{2} c'ds.$$

Les cosinus directifs de  $MT$  étant  $a, b, c$ , la formule connue donne, immédiatement,

$$V = \frac{1}{2} \epsilon. \quad \dots \quad (145)$$

Ainsi, *l'angle infiniment petit*  $V$ , *formé par une corde*  $MM'$  *et la tangente en l'une de ses extrémités, est la moitié de l'angle formé par les tangentes aux extrémités de la corde* (\*\*).

(\*) On verra, plus loin, que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde a pour expression  $\frac{ds^5}{24\rho^2}$ . Provisoirement, on peut la supposer du deuxième ordre, au moins (*Cours d'Analyse*, p. 322). Le résultat ne change pas.

(\*\*) Cette proposition, évidente si l'on remplace les courbes par le cercle osculateur en  $M$  ou en  $M'$ , n'est pas rigoureusement exacte : elle exprime que *le rapport des deux angles tend vers*  $\frac{1}{2}$  *quand l'arc*  $MM'$  *diminue indéfiniment*. Des restrictions du même genre doivent être apportées aux énoncés suivants.

**108. DISTANCE ENTRE UN POINT D'UNE COURBE ET LA TANGENTE AU POINT INFINIMENT VOISIN.** En désignant par  $\delta$  cette distance, on a  $\delta = \sqrt{ds} = \frac{1}{2} \varepsilon ds$ , ou

$$\delta = \frac{ds^2}{2\rho} (*) \dots \dots \dots (144)$$

**109. DISTANCE ENTRE UN POINT D'UNE COURBE ET LE PLAN OSCULATEUR AU POINT INFINIMENT VOISIN.** On sait que la plus courte distance d'un point  $(x_1, y_1, z_1)$ , au plan représenté par

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

est donnée par la formule

$$\delta_1 = \frac{A(x_1 - x) + B(y_1 - y) + C(z_1 - z)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dans le cas actuel :

$$A = l, \quad B = m, \quad C = n;$$

$$x_1 - x = \left( a + \frac{1}{2} a' ds + \frac{1}{6} a'' ds^2 \right) ds,$$

$$y_1 - y = \left( b + \frac{1}{2} b' ds + \frac{1}{6} b'' ds^2 \right) ds,$$

$$z_1 - z = \left( c + \frac{1}{2} c' ds + \frac{1}{6} c'' ds^2 \right) ds (**).$$

Conséquemment, et à cause des sommes nulles,

$$\delta_1 = \frac{1}{6} ds^3 \sum la'';$$

(\*) Ce résultat est encore évident par la considération du cercle osculateur.

(\*\*) Par la formule de Mac-Laurin. Si, comme dans le premier problème, on conservait seulement les termes du deuxième ordre, on trouverait  $\delta_1 = 0$ .

ou (23)

$$\delta_1 = \frac{1}{6} \rho ds^3 \sum (bc' - cb') a'';$$

ou enfin (48)

$$\delta_1 = \frac{1}{6} \frac{ds^3}{r\rho} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (146)$$

**110.** DIFFÉRENCE ENTRE UN ARC INFINIMENT PETIT ET SA CORDE.  
Les coordonnées du point M', infiniment voisin de M, sont

$$\begin{aligned} x + ads + \frac{1}{2} a' ds^2 + \frac{1}{6} a'' ds^3, \\ y + bds + \frac{1}{2} b' ds^2 + \frac{1}{6} b'' ds^3, \\ z + cds + \frac{1}{2} c' ds^2 + \frac{1}{6} c'' ds^3. \end{aligned}$$

Donc,  $k$  étant la longueur de MM' :

$$k^2 = ds^2 \sum \left( a + \frac{1}{2} a' ds + \frac{1}{6} a'' ds^2 \right)^2.$$

Le développement du second membre, limité au *quatrième* ordre, est

$$ds^2 + ds^4 \left[ \frac{1}{4} \sum a'^2 + \frac{1}{3} \sum aa'' \right].$$

A cause des formules (19), (58), cette quantité se réduit à

$$\left( 1 - \frac{ds^2}{12\rho^2} \right) ds^2,$$

dont la racine carrée est  $\left( 1 - \frac{ds^2}{24\rho^2} \right) ds$ . Conséquemment,

$$ds - k = \frac{ds^3}{24\rho^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (145)$$

**111. DISTANCE ENTRE DEUX TANGENTES CONSÉCUTIVES.** La plus courte distance de deux droites ayant pour équations :

$$\frac{X - x}{a} = \frac{Y - y}{b} = \frac{Z - z}{c},$$

$$\frac{X - x_1}{a_1} = \frac{Y - y_1}{b_1} = \frac{Z - z_1}{c_1},$$

est

$$\delta_2 = \frac{\sum (x_1 - x) (bc_1 - cb_1)}{\sqrt{\sum (bc_1 - cb_1)^2}}.$$

Dans le problème dont il s'agit :

$$x_1 - x = \left( a + \frac{1}{2} a' ds + \frac{1}{6} a'' ds^2 \right) ds,$$

$$y_1 - y = \left( b + \frac{1}{2} b' ds + \frac{1}{6} b'' ds^2 \right) ds,$$

$$z_1 - z = \left( c + \frac{1}{2} c' ds + \frac{1}{6} c'' ds^2 \right) ds;$$

$$a_1 = a + a' ds + \frac{1}{2} a'' ds^2,$$

$$b_1 = b + b' ds + \frac{1}{2} b'' ds^2,$$

$$c_1 = c + c' ds + \frac{1}{2} c'' ds^2.$$

Il résulte, de ces dernières valeurs,

$$bc_1 - cb_1 = (bc' - cb') ds + \frac{1}{2} (bc'' - cb'') ds^2;$$

puis, par la suppression des sommes nulles,

$$\begin{aligned} & \sum (x_1 - x) (bc_1 - cb_1) \\ &= \left[ \frac{1}{4} \sum (bc'' - cb'') a' + \frac{1}{6} \sum (bc' - cb') a'' \right] ds^4 \\ &= -\frac{1}{12} \Delta ds^4. \quad (23). \end{aligned}$$

En outre,

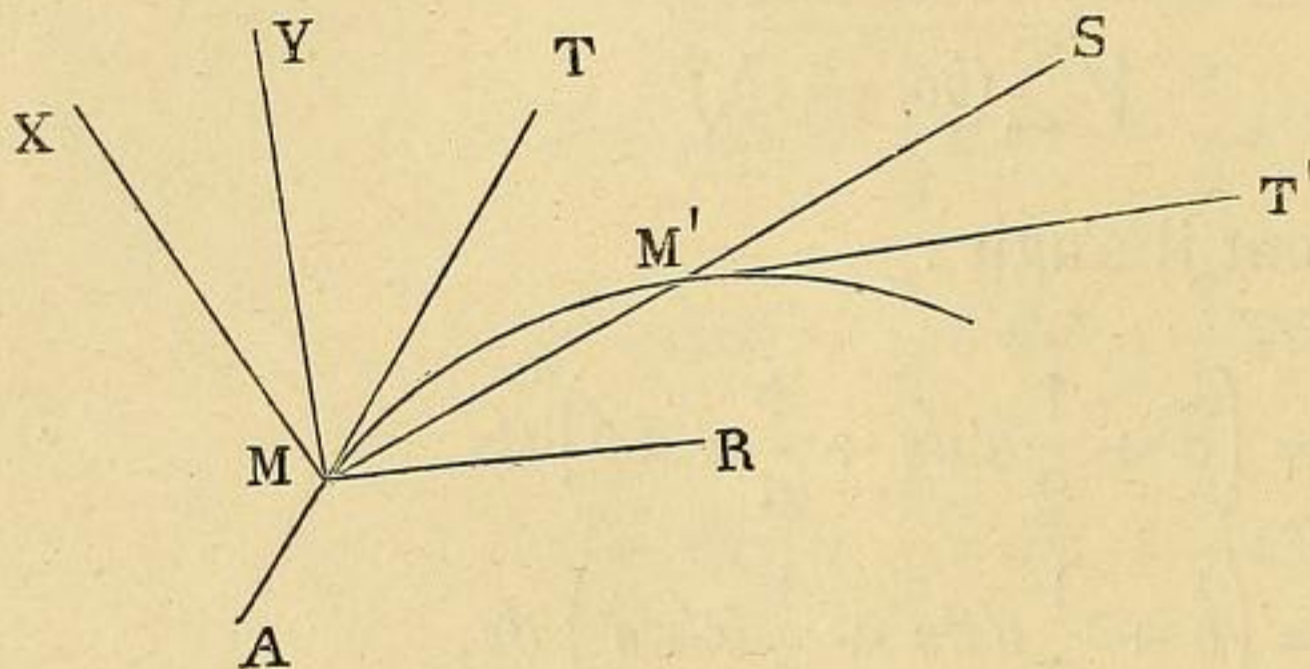
$$\sum (bc_1 - cb_1)^2 = ds^2 \sum (bc' - cb')^2 = \frac{ds^2}{\rho^2}.$$

Donc

$$\delta_2 = \frac{1}{12} \frac{ds^3}{r\rho} = \frac{1}{2} \delta_1. \quad \dots \quad (147)$$

**112. DÉTERMINATION D'UN ANGLE DIÈDRE.**

Fig. 31.



MR (fig. 31) étant parallèle à la tangente M'T', les droites MT, MM'S, MR sont les arêtes d'un angle trièdre. Calculons l'angle dièdre suivant MT (\*). A cet effet, soient MX, MY deux normales aux plans TMS, TMR.

1° Les cosinus directifs de MS étant (109)

$$a + \frac{1}{2} a' ds + \frac{1}{6} a'' ds^2, \quad b + \frac{1}{2} b' ds + \frac{1}{6} b'' ds^2, \quad c + \frac{1}{2} c' ds + \frac{1}{6} c'' ds^2 (**);$$

ceux de MX sont proportionnels aux quantités

$$A = \frac{1}{2} (bc' - cb') + \frac{1}{6} (bc'' - cb'') ds,$$

$$B = \frac{1}{2} (ca' - ac') + \frac{1}{6} (ca'' - ac'') ds,$$

$$C = \frac{1}{2} (ab' - ba') + \frac{1}{6} (ab'' - ba'') ds.$$

2° Les cosinus directifs de MR ont pour valeurs :

$$a + a' ds + \frac{1}{2} a'' ds^2, \quad b + b' ds + \frac{1}{2} b'' ds^2, \quad c + c' ds + \frac{1}{2} c'' ds^2;$$

(\*) La limite commune des plans TMS, TMR est le plan osculateur. (*Cours d'Analyse*, p. 484.)

(\*\*) On néglige encore le troisième ordre.

donc ceux de  $MY$  sont proportionnels aux nouvelles quantités :

$$A_1 = (bc' - cb') + \frac{1}{2}(bc'' - cb'') ds,$$

$$B_1 = (ca' - ac') + \frac{1}{2}(ca'' - ac'') ds,$$

$$C_1 = (ab' - ba') + \frac{1}{2}(ab'' - ba'') ds \quad (*).$$

Il faut, maintenant, appliquer la formule

$$V^2 = \frac{\sum (AB_1 - BA_1)^2}{\sum A^2 \times \sum A_1^2}.$$

Or, si l'on supprime les termes du deuxième ordre :

$$AB_1 - BA_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) [(bc' - cb')(ca'' - ac'') - (ca' - ac')(bc'' - cb'')] ds;$$

ou, par une réduction connue,

$$AB_1 - BA_1 = \frac{1}{12} \Delta cds = \frac{1}{12} \frac{cds}{r\rho^2}.$$

De là résulte

$$\sum (AB_1 - BA_1)^2 = \left[ \frac{ds}{12r\rho^2} \right]^2.$$

D'un autre côté :

$$\sum A^2 = \frac{1}{4\rho^2}, \quad \sum A_1^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Donc, finalement,

$$V = \frac{1}{6} \frac{ds}{r} = \frac{1}{6} \eta. \quad \dots \dots \dots (148)$$

Ainsi, l'angle  $V$  est  $\frac{1}{6}$  de l'angle formé par deux plans osculateurs consécutifs.

(\*) Au lieu de ces valeurs, on peut prendre celles-ci :

$$A = \frac{1}{2} \frac{l}{\rho} + \frac{1}{6} \frac{\rho l' - l \rho'}{\rho^3} ds, \quad B = \frac{1}{2} \frac{m}{\rho} + \frac{1}{6} \frac{\rho m' - m \rho'}{\rho^3} ds, \quad C = \frac{1}{2} \frac{n}{\rho} + \frac{1}{6} \frac{\rho n' - n \rho'}{\rho^3} ds;$$

etc.

**113.** SUITE. Cherchons les inclinaisons des faces TMS, TMR sur le plan osculateur en M; ou, ce qui est équivalent, les mesures des angles plans NMX, NMY. Les cosinus directifs de la binormale MN étant  $l, m, n$ , la formule ordinaire donne :

$$(\text{NMX})^2 = \frac{\sum (\text{B}n - \text{C}m)^2}{\sum \Lambda^2}, \quad (\text{NMY})^2 = \frac{\sum (\text{B}_1n - \text{C}_1m)^2}{\sum \Lambda_1^2}.$$

Mais, comme on le voit aisément :

$$\text{B}n - \text{C}m = \frac{1}{6} \frac{nm' - mn'}{\rho^2} ds = \frac{1}{6} \frac{a}{r\rho^2} ds,$$

$$\text{B}_1n - \text{C}_1m = \frac{1}{2} \frac{nm' - mn'}{\rho^2} ds = \frac{1}{2} \frac{a}{r\rho^2} ds;$$

donc

$$\text{NMX} = \frac{1}{5} \eta, \quad \text{NMY} = \frac{1}{2} \eta. \quad \dots \quad (*) (149)$$

**114.** ANGLES D'UNE DROITE AVEC DEUX TANGENTES CONSÉCUTIVES. Par le point M, menons une droite D, ayant  $\alpha, \beta, \gamma$  pour cosinus directifs. Soit  $\varphi$  l'angle de D avec la tangente MT, de manière que

$$\cos \varphi = a\alpha + b\beta + c\gamma. \quad \dots \quad (150)$$

Quand on remplace M par M',  $\cos \varphi$  reçoit un accroissement donné par la formule de Taylor :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos \varphi &= (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) ds + \frac{1}{2} (a''\alpha + b''\beta + c''\gamma) ds^2 \\ &+ \frac{1}{6} (a'''\alpha + b'''\beta + c'''\gamma) ds^3 + \dots \end{aligned} \right\} (151)$$

Ordinairement,  $\Delta \cos \varphi$  est du *premier ordre*. Si l'on veut que

(\*) Les formules (148), (149) sont dues, pensons-nous, à M. DE SAINT-GERMAIN. Si elles étaient *exactes*, on aurait un exemple de *trisection d'angle*. Mais, évidemment, elles ne peuvent être qu'*approchées*.



cette quantité descende au *troisième ordre*, on doit supposer

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0, \quad a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0; \quad . \quad (152)$$

ou bien

$$\frac{\alpha}{b'c'' - c'b''} = \frac{\beta}{c'a'' - a'c''} = \frac{\gamma}{a'b'' - b'a''} \cdot \cdot \cdot \quad (153)$$

Ces équations représentent la rectifiante (81). On a donc ce remarquable théorème :

*De toutes les droites passant par le point M, la rectifiante est LA PLUS ÉGALEMENT INCLINÉE sur les tangentes aux extrémités de l'arc MM' : la différence entre les angles formés par la rectifiante et les tangentes est infiniment petite par rapport à la différence analogue, relative à toute autre droite D (\*).*

**115. SUITE.** Au moyen des relations (152), la formule (151) se réduit à

$$\Delta \cos \varphi = \frac{1}{6} (a''' \alpha + b''' \beta + c''' \gamma) ds^5.$$

On conclut, de celle-ci :

$$\Delta \varphi = - \frac{1}{6 \sin \varphi} (a''' \alpha + b''' \beta + c''' \gamma) ds^5;$$

ou (84) :

$$\Delta \varphi = - \frac{1}{6} \frac{\rho}{L} (a''' \alpha + b''' \beta + c''' \gamma) ds^5. \quad . \quad . \quad (154)$$

Il reste donc à calculer la somme entre parenthèses. Or, d'après les proportions (153) et l'équation (150) :

$$\frac{a''' \alpha + b''' \beta + c''' \gamma}{\sum (b'c'' - c'b'') a'''} = \frac{\cos \varphi}{\sum (b'c'' - c'b'') a}.$$

(\*) CH. RUCHONNET. *Exposition géométrique des propriétés générales des courbes*, troisième édition, p. 140.

Conséquemment [(67), (48)] :

$$a'''\alpha + b'''\beta + c'''\gamma = \frac{L}{\rho^3} \left(\frac{\rho}{r}\right)' (*) ;$$

et enfin

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{6} \left(\frac{\rho}{r}\right)' \frac{ds^5}{\rho^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (155)$$

Telle est, au troisième ordre près, l'expression de la différence  $\Delta\varphi$ .

**116. REMARQUES. I.** Si l'on se donnait seulement la condition  $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$ ,  $\Delta\varphi$  serait du deuxième ordre. Quand il en est ainsi, la droite **D** est située dans le plan rectifiant.

**II.** Ainsi qu'on l'a vu plusieurs fois, la courbe donnée est une ligne géodésique, relativement à la surface rectifiante. Le théorème de M. Ruchonnet constitue donc une *propriété caractéristique des lignes géodésiques d'une surface développable*.

**117. DISTANCE ENTRE UNE COURBE ET LA SPHÈRE OSCULATRICE.** Représentons, comme précédemment (65), par **X**, **Y**, **Z** les coordonnées du centre **S**, et par **R** le rayon de la sphère osculatrice. Soient  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$  les coordonnées courantes, de manière que

$$(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2 = R^2.$$

D'après la définition (65), cette équation doit être vérifiée par les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} X_1 &= x, & Y_1 &= y, & Z_1 &= z; \\ X_1 &= x + ads, & Y_1 &= y + bds, & Z_1 &= z + cds; \\ X_1 &= x + ads + \frac{1}{2} a' ds^2, & Y_1 &= y + bds + \frac{1}{2} b' ds^2, & Z_1 &= z + cds + \frac{1}{2} c' ds^2; \\ X_1 &= x + ads + \frac{1}{2} a' ds^2 + \frac{1}{6} a'' ds^3, & Y_1 &= y + bds + \frac{1}{2} b' ds^2 + \frac{1}{6} b'' ds^3, & Z_1 &= z + cds + \frac{1}{2} c' ds^2 + \frac{1}{6} c'' ds^3. \end{aligned}$$

(\*) On peut vérifier ce résultat en observant que

$$\alpha = p = a \cos H + l \sin H \quad (86),$$

puis en appliquant les formules :

$$\Sigma aa''' = \frac{3\rho'}{\rho^3}, \quad \Sigma la''' = \rho \Sigma (bc' - cb') a'''; \text{ etc.}$$

De cette remarque, il résulte que : 1° la distance comprise entre la sphère et le point M' infiniment voisin de M, est du *quatrième ordre* (\*); 2° on doit prendre, comme coordonnées de ce point :

$$X_1 = x + ads + \frac{1}{2} a' ds^2 + \frac{1}{6} a'' ds^3 + \frac{1}{24} a''' ds^4,$$

$$Y_1 = y + bds + \frac{1}{2} b' ds^2 + \frac{1}{6} b'' ds^3 + \frac{1}{24} b''' ds^4,$$

$$Z_1 = z + cds + \frac{1}{2} c' ds^2 + \frac{1}{6} c'' ds^3 + \frac{1}{24} c''' ds^4;$$

3° dans le développement de la formule

$$(R + \delta)^2 = \sum \left[ -\rho f - r\rho' l + ads + \frac{1}{2} a' ds^2 + \frac{1}{6} a'' ds^3 + \frac{1}{24} a''' ds^4 \right]^2 (**),$$

on peut faire abstraction des termes qui ne contiennent pas  $ds^4$ .

Nous pouvons donc écrire, sans autre calcul :

$$2R\delta = \left[ -\frac{1}{12} \sum (\rho f + r\rho' l) a''' + \frac{1}{4} \sum a'^2 + \frac{1}{3} \sum aa'' \right] ds^4;$$

ou, par les valeurs (51), (54), (58) :

$$\delta = -\frac{1}{24R} \left[ \rho^2 \sum a'a''' + r\rho\rho' \sum (bc' - cb') a''' + \frac{1}{\rho^2} \right] ds^4.$$

Nous avons trouvé (77), (66) :

$$\sum a'a''' = -\frac{\rho''}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2 L^2} + 2\frac{\rho'^2}{\rho^4}, \quad \sum (bc' - cb') a''' = -\frac{r'}{r^2 \rho^2} - 2\frac{\rho'}{r\rho^3}.$$

(\*) La démonstration précédente est à peu près celle qu'emploie M. Bertrand (*Calcul différentiel*, p. 652). Mais ce Géomètre, après avoir *annoncé* le calcul suivant, semble ne l'avoir pas effectué.

(\*\*) On ne doit pas oublier que

$$X = \rho f + r\rho' l, \quad Y = \rho g + r\rho' m, \quad Z = \rho h + r\rho' n. \quad \dots \dots (109)$$

Conséquemment,

$$\delta = \frac{1}{24R} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{r'\rho'}{r\rho} + \frac{\rho''}{\rho} \right].$$

Enfin, si l'on désigne par  $ds$  l'élément de la courbe polaire (111), on a

$$\delta = \frac{1}{24} \frac{\varepsilon \eta ds dS}{R}; \quad \dots \dots \dots (156)$$

formule trouvée par M. Ruchonnet (\*).

Liège, 20 août 1875.

E. CATALAN.

(\*) *Nouvelles Annales* (1870); *Exposition géométrique*, ... p. 159.

---

## ADDITIONS.

—

### I

#### SUR L'ÉQUATION DES LIGNES GÉODÉSIQUES.

1. Soit, sur une surface  $S$ , une ligne géodésique  $L$ . Soit  $G$  une génératrice de la développable  $\Sigma$ , circonscrite à  $S$  suivant  $L$ . On a, par la considération de la *rectifiante*,

$$\operatorname{tg} H = \frac{r}{\rho} \quad (*) ; \quad \dots \quad (1)$$

$H$  étant l'angle de  $G$  avec la tangente  $T$  à  $L$ , au point  $M$  où  $G$  coupe  $L$ .

2. Si  $P, Q, R$  sont les cosinus directifs de la normale  $MN$  à  $S$ , de manière que

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad \dots \quad (1)$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 1; \quad \dots \quad (2)$$

l'équation du plan tangent, en  $M$ , aux surfaces  $S, \Sigma$ , est

$$P(X - x) + Q(Y - y) + R(Z - z) = 0. \quad \dots \quad (3)$$

Différenciant, et ayant égard à la relation (1), on trouve

$$(X - x)dP + (Y - y)dQ + (Z - z)dR = 0 \quad \dots \quad (4)$$

Par conséquent, si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directifs de la *rectifiante*  $G$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{QdR - RdQ} &= \frac{\beta}{RdP - PdR} = \frac{\gamma}{PdQ - QdP} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\sum (PdQ - QdP)^2}} = \frac{1}{V}; \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5)$$

$V$  représentant le radical.

(\*) Voir la note de la page 27.

D'un autre côté,  $a, b, c$  désignant, à l'ordinaire, les cosinus directifs de la tangente  $T$ ,

$$\cos H = a\alpha + b\beta + c\gamma;$$

et, par les relations (5):

$$\cos^2 H = \frac{[\sum a(QdR - RdQ)]^2}{\sum (QdR - RdQ)^2} \dots \dots \dots (6)$$

3. On a

$$\sin^2 H = (a\beta - b\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2, \dots \dots (7)$$

$$a\beta - b\alpha = \frac{a(RdP - PdR) - b(QdR - RdQ)}{V}.$$

Au moyen d'une transformation bien connue, le numérateur devient  $R(adP + bdQ + cdR)$ ; donc, en vertu de l'équation (2),

$$\sin H = \frac{adP + bdQ + cdR}{V};$$

puis

$$\text{tg } H = \frac{adP + bdQ + cdR}{\sum a(QdR - RdQ)} \dots \dots \dots (8)$$

Telle est la formule qui détermine, fort simplement, la génératrice  $G$  de la développable  $\Sigma$ , circonscrite à  $S$ , suivant la courbe  $L$ .

4. Jusqu'à présent, rien n'exprime que  $L$  soit une ligne géodésique. Pour introduire cette nouvelle hypothèse, nous devons prendre

$$P = f = a'\rho, \quad Q = g = b'\rho, \quad R = h = c'\rho \quad (42, 12, \text{ etc.})$$

La formule (8) devient

$$\text{tg } H = \frac{\rho' \sum aa' + \rho \sum aa''}{\rho^2 \sum (b'c'' - c'b'')};$$

et, par les réductions employées dans tout le cours du Mémoire :

$$\text{tg } H = \frac{r}{\rho} \dots \dots \dots (1)$$

Ainsi, contrairement à ce que l'on aurait pu croire, la formule (1) ne diffère pas de l'équation des lignes géodésiques; elle en est une simple transformation. (Septembre 1875):

## II

**PROBLÈME.** *Trouver les relations qui existent entre la courbure d'une ligne L et les courbures de ses trois projections orthogonales.*

1. Si deux des projections de L sont représentées par

$$z = f(x), \quad z = \varphi(y), \quad \dots \dots \dots (1)$$

l'équation de la troisième projection est

$$f(x) = \varphi(y) \dots \dots \dots (2)$$

On conclut de celle-ci, en prenant  $x$  pour variable indépendante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'}{\varphi'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'' \varphi'^2 - \varphi'' f'^2}{\varphi'^5}.$$

Par conséquent, si A, B, C sont les rayons de courbure des trois projections :

$$A = \frac{(1 + \varphi'^2)^{\frac{5}{2}}}{\varphi''}, \quad B = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{5}{2}}}{f''}, \quad C = \frac{(f'^2 + \varphi'^2)^{\frac{5}{2}}}{f'' \varphi'^2 - \varphi'' f'^2}. \quad (3)$$

2. En désignant par  $a, b, c$  les cosinus directifs de la tangente à L, on a, par les équations (1) :

$$f' = \frac{c}{a}, \quad \varphi' = \frac{c}{b}; \quad \dots \dots \dots (4)$$

donc les formules (3) peuvent être écrites ainsi :

$$A = \frac{\sin^5 \alpha}{\varphi'' \cos^5 \beta}, \quad B = \frac{\sin^5 \beta}{f'' \cos^5 \alpha}, \quad C = \frac{\sin^5 \gamma}{\cos \alpha \cos \beta (f'' \cos^2 \alpha - \varphi'' \cos^2 \beta)}. \quad (5)$$

Éliminant  $\varphi''$  et  $f''$ , on trouve cette relation entre les courbures des trois projections :

$$\frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{A} + \frac{\sin^3 \beta \cos \beta}{B} + \frac{\sin^3 \gamma \cos \gamma}{C} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

3. La formule

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{ds^6} \sum (dy d^2z - dz d^2y)^2$$

devient d'abord, à cause de

$$dy = \frac{f'}{\varphi'} dx, \quad dz = f' dx, \quad d^2x = 0, \text{ etc. :}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi'^6}{(f'^2 + \varphi'^2 + f'^2 \varphi'^2)^3} \left[ \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 \right];$$

puis, par un calcul facile :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{(f'^2 + \varphi'^2 + f'^2 \varphi'^2)^3} [(f'' \varphi'^2 - \varphi'' f'^2)^2 + f''^2 \varphi'^6 + \varphi''^2 f'^6]. \quad (7)$$

D'après les formules (3), (4) :

$$f'^2 + \varphi'^2 + f'^2 \varphi'^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2}, \quad \varphi''^2 f'^6 = \frac{c^6 (b^2 + c^2)^3}{a^6 b^6 A^2},$$

$$f''^2 \varphi'^6 = \frac{c^6 (c^2 + a^2)^3}{a^6 b^6 B^2}, \quad (f'' \varphi'^2 - \varphi'' f'^2)^2 = \frac{c^6 (a^2 + b^2)^3}{a^6 b^6 C^2};$$

donc

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(b^2 + c^2)^3}{A^2} + \frac{(c^2 + a^2)^3}{B^2} + \frac{(a^2 + b^2)^3}{C^2},$$

ou enfin

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^6 \alpha}{A^2} + \frac{\sin^6 \beta}{B^2} + \frac{\sin^6 \gamma}{C^2} \dots \dots \dots (8)$$

4. Remarque. Si  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , les relations (6), (8) deviennent

$$\frac{\sin^2 \alpha}{A} - \frac{\sin^2 \beta}{B} = 0, \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^6 \alpha}{A^2} + \frac{\sin^6 \beta}{B^2}.$$



On conclut, de celles-ci :

$$\rho = A + B \dots \dots \dots (9)$$

Ainsi : *Le rayon de courbure, d'une ligne quelconque, est égal à la somme des rayons de courbure des projections de cette ligne sur deux plans parallèles au premier rayon, et perpendiculaires entre eux (\*)*.

(\*) CHARLES DUPIN, *Développements de Géométrie*, p. 88.



The purpose of this report is to

provide a detailed account of the work done during the period from 1st January to 31st December 1954. The work has been carried out in accordance with the programme of work approved by the Committee at its meeting on 15th November 1953.

The work has been carried out in accordance with the programme of work approved by the Committee at its meeting on 15th November 1953.