This page intentionally left blank.

MÉLANGES

MATHÉMATIQUES;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

I. — SUR LES COMBINAISONS AVEC RÉPÉTITION (1838) (*).

Le terme général du développement de

$$(a + b + c + \ldots + t)^m$$

est, comme l'on sait,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times \ldots\ldots \times 1.2.3\ldots\theta}\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots t^\theta \quad (1),$$

les exposants α, β, γ, . . ., θ satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \theta = m \qquad (2).$$

Le nombre des termes de ce développement est celui des solutions, en nombres entiers non négatifs (**), de l'équation (2), qui renferme n inconnues, n étant le nombre des

(*) Cette Note, qui a paru dans le *Journal de Liouville* (tome III), a été écrite à l'occasion d'un Mémoire de M. Brianchon (*Journal de l'École polytechnique*, 25e cahier).

(**) C'est afin d'éviter toute ambiguité que j'emploie cette locution : *nombres non négatifs*, bien qu'elle me paraisse constituer un véritable pléonasme : *un nombre*, c'est-à-dire le rapport de deux grandeurs de même espèce, *est essentiellement positif*.

termes du polynôme proposé ; ou le nombre de manières dont il est possible de former une somme m, avec n nombres entiers, positifs ou nuls ; ou enfin le nombre de combinaisons que l'on peut effectuer avec n lettres différentes, prises m à m, chaque lettre pouvant entrer 0, 1, 2, ..., m fois dans chaque combinaison. C'est de ce dernier point de vue que je considère la question, et je représente par N le nombre cherché.

Afin de trouver N, j'observe que, pour former les *combinaisons avec répétition* dont il s'agit, on pourrait employer le moyen suivant :

a, b, c étant, pour fixer les idées, trois lettres qu'il s'agit de combiner 7 à 7 :

1° Prenons la quantité $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'$, qui renferme 7 lettres accentuées, écrites dans l'ordre alphabétique ;

2° Dans un terme quelconque égal à celui-là, effaçons 1, 2 ou 3 lettres (en général, n lettres au plus, si n est $< m$, m lettres au plus, si n est $> m$) ; puis remplaçons chaque lettre effacée par une des lettres a, b, c (en général, par une des lettres a, b, c, . . ., t), en ayant soin que, dans chaque terme ainsi formé, les lettres sans accent n'offrent pas d'inversion alphabétique ; qu'aucune ne soit répétée ; et qu'une suite de lettres accentuées soit toujours précédée d'une lettre sans accent (ce qui exige que l'on efface toujours la lettre a').

Nous obtiendrons ainsi une suite de termes tels que

$$a\,b'\,c'\,b\,e'\,f'\,g',\quad a\,b\,c'\,d'\,e'\,c\,g',\quad b\,b'\,c'\,d'\,c\,f'\,g',\ \ldots \qquad \text{(A)}$$

3° Enfin, dans chacun des termes de la suite (A), remplaçons chaque lettre accentuée par la lettre sans accent qui la précède. Nous aurons la nouvelle suite :

$$a\,a\,a\,b\,b\,b\,b,\quad a\,b\,b\,b\,b\,c\,c,\quad b\,b\,b\,b\,c\,c\,c \ldots\ldots \qquad \text{(B)}$$

Si l'on a effectué sur la quantité $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'$ les opérations indiquées, de toutes les manières possibles, la suite (B) renfermera toutes les *combinaisons avec répétition* demandées.

Or, la suite (A), qui contient autant de termes que la suite (B), est formée des *combinaisons simples* des 6 lettres b', c', d', e', f', g' et des 3 lettres a, b, c, prises 7 à 7. Donc, en général

$$N = C_{n+m-1,\,m} = C_{n+m-1,\,n-1};$$

savoir

$$N = \frac{n+m-1}{1} \cdot \frac{n+m-2}{2} \cdots \frac{n}{m} \qquad (3),$$

ou

$$N = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \cdots \frac{m+n-1}{n} \qquad (4).$$

Les formules (3) et (4) donnent le nombre des termes du développement dont (1) est le terme général.

II. — Aire de l'hyperboloïde à une nappe (1839).

I. Soit

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1 \qquad (1)$$

l'équation de l'hyperboloïde. L'aire de la partie de cette surface comprise entre le plan des xy et un plan parallèle au premier est déterminée par la formule

$$A = 4 \int\int dx'\,dy' \sqrt{\frac{\left(1+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\frac{x'^2}{\alpha^2} + \left(1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\frac{y'^2}{\beta^2} - 1}{\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - 1}} \qquad (2),$$

dans laquelle x' et y' doivent recevoir toutes les valeurs positives satisfaisant aux conditions

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \overset{=}{>} 1 \qquad (3),$$

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \overset{=}{<} 1 + \frac{h^2}{\gamma^2} \qquad (4):$$

h est la distance des deux plans limites, ou la hauteur de la zone hyperboloïdique.

II. Si nous posons, pour abréger :

$$\frac{x'}{\alpha} = x, \quad \frac{y'}{\beta} = y, \quad 1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = a^2, \quad 1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} = b^2, \quad \frac{h^2}{\gamma^2} = c^2 \quad (5),$$

les relations précédentes deviennent

$$A = 4\alpha\beta \iint dx\, dy \sqrt{\frac{a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 1}} \quad (6),$$

$$x^2 + y^2 \overline{\gtrless} 1 \quad (7), \qquad x^2 + y^2 \overline{\lessgtr} 1 + c^2. \quad (8).$$

III. Afin de réduire l'intégrale double (6) à une intégrale simple, j'emploie la méthode exposée dans mon *Mémoire sur la Réduction d'une classe d'intégrales multiples*, c'est-à-dire que je suppose, simultanément :

$$F(v) = \iint dx\, dy \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1} \quad (9),$$

$$x^2 + y^2 - 1 \overline{\gtrless} 0, \qquad x^2 + y^2 - 1 \overline{\lessgtr} v^2 \quad (10);$$

alors la formule (6) devient

$$A = 4\alpha\beta \int_0^c \frac{d \,.\, F(v)}{v} \quad (11);$$

et le problème est réduit à trouver l'intégrale (9), ou seulement sa dérivée relative à v.

IV. A cet effet, soient

$$x = u \cos \varphi, \qquad y = u \sin \varphi;$$

d'où

$$F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{1+v^2}} u\, du \sqrt{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)\, u^2 - 1};$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{v}\frac{d \,.\, \mathrm{F}\,(v)}{d\,v} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\varphi \sqrt{(a\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+v^2) - 1} \quad (12).$$

Au moyen de cette valeur, la formule (11) devient

$$\mathrm{A} = 4\,\alpha\,\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\varphi \int_0^{c} d\,v \sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+v^2) - 1} \quad (13).$$

V. En général,

$$\int_0^v d\,v\,\sqrt{\mathrm{P}v^2+\mathrm{Q}} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{ v\sqrt{\mathrm{P}\,v^2+\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{Q}}{\sqrt{\mathrm{P}}}\;\mathrm{l}\,\frac{v\sqrt{\mathrm{P}} + \sqrt{\mathrm{P}\,v^2+\mathrm{Q}}}{\sqrt{\mathrm{Q}}} \right\};$$

donc

$$\int_0^c d\,v\,\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+v^2) - 1} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{ c\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+c^2)-1} + \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\;\mathrm{l}\,\Phi \right\};$$

en posant, pour abréger,

$$\Phi = \frac{c\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+c^2)-1}}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 1}}.$$

La substitution dans la formule (13) donne

$$\mathrm{A} = 2\,c\,\alpha\,\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(1+c^2) - 1}$$

$$+\; 2\,\alpha\,\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\varphi\,\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\;\mathrm{l}\,\Phi;$$

d'où enfin, à cause des valeurs (5) :

$$A = \frac{2h}{\gamma^2} \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{h^2 \alpha^2 \beta^2 + (h^2 + \gamma^2)\gamma^2 (\beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi)}$$

$$+ 2\gamma^2 \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 + \gamma^2 (\beta^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)}} \, 1\, \Phi_1 \quad (14),$$

Φ_1 représentant la quantité

$$\frac{h\sqrt{\alpha^2\beta^2+\gamma^2(\beta^2\cos^2\varphi+\alpha^2\sin^2\varphi)}+\sqrt{h^2\alpha^2\beta^2+\gamma^2(h^2+\gamma^2)(\beta^2\cos^2\varphi+\alpha^2\sin^2\varphi)}}{\gamma^2\sqrt{\beta^2\cos^2\varphi+\alpha^2\sin^2\varphi}}.$$

Addition. — (*Août* 1865).

VI. **Les** trajectoires orthogonales des sections parallèles au plan des $x\,y$ sont caractérisées par l'équation

$$\alpha^2 y'\,dx' - \beta^2 x'\,dy' = o \qquad (15).$$

Soient ds l'élément d'une section parallèle, $d\sigma$ l'élément d'une trajectoire : $dA = ds d\sigma$.

Premièrement, si l'on différencie l'équation (1) en y supposant z' constante, et que l'on fasse, pour plus de symétrie,

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{z'^2+\gamma^2}\cos\theta, \quad \frac{y'}{\beta} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{z'^2+\gamma^2}\sin\theta,$$

on trouve

$$ds = \frac{\sqrt{z'^2+\gamma^2}}{\gamma}\sqrt{\beta^2\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (16).$$

En second lieu, l'équation (1), différenciée par rapport aux trois variables, donne

$$\beta^2 x'\,dx' + \alpha^2 y'\,dy' = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} z'\,dz';$$

d'où, à cause de la relation (15) :

$$dx' = \frac{\alpha^2 \beta^4 x' z'}{\gamma^2 (\alpha^4 y'^2 + \beta^4 x'^2)} dz', \qquad dy' = \frac{\alpha^4 \beta^2 y' z'}{\gamma^2 (\alpha^4 y'^2 + \beta^4 x'^2)} dz';$$

ou, ce qui est équivalent :

$$dx' = \frac{\alpha \beta^2}{\gamma} \frac{z' dz'}{\sqrt{z'^2 + \gamma^2}} \frac{\cos\theta}{\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta},$$

$$dy' = \frac{\alpha^2 \beta}{\gamma} \frac{z' dz'}{\sqrt{z'^2 + \gamma^2}} \frac{\sin\theta}{\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta}.$$

Il résulte, de ces valeurs,

$$d\sigma = dz' \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta^2 z'^2}{\gamma^2 (z'^2 + \gamma^2)(\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta)} + 1} \qquad (17).$$

Par suite,

$$dA = \frac{1}{\gamma^2} d\theta dz' \sqrt{[\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta)]z'^2 + \gamma^4(\alpha^2\sin^2\theta + \beta^2\cos\theta)};$$

ou plutôt

$$A = \frac{8}{\gamma^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^h dz' R, \qquad (18),$$

avec

$$R = \sqrt{[\alpha^2 \beta^2 + \gamma^2 (\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta)] z'^2 + \gamma^4 (\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta)}.$$

A cause des notations (5), la relation (18) ne diffère pas de la formule (13).

VII. Ce rapprochement donne lieu à la remarque suivante : la méthode dont j'ai fait usage, en 1839, pour ramener aux quadratures l'aire de l'ellipsoïde, équivaut à la décomposition de la surface en rectangles curvilignes. Cette décomposition, très-laborieuse quand les rectangles sont déterminés par les lignes de courbure (*), devient incomparablement

(*) Voyez LEGENDRE, *Théorie des fonctions elliptiques*, tome I, p. 354.

plus simple lorsque ces éléments résultent de sections parallèles à l'un des plans principaux, et de leurs trajectoires orthogonales.

III. — SUR L'INTÉGRALE $\iint dx\,dy\sqrt{\dfrac{a^2x^2+b^2y^2-1}{x^2+y^2-1}}$.

Au lieu de prendre, pour conditions aux limites,

$$x^2+y^2 \gtreqqless 1, \qquad x^2+y^2 \gtreqqless 1+c^2,$$

comme dans la Note I, supposons que l'intégrale doive être étendue à toutes les valeurs de x et de y satisfaisant aux relations

$$x^2+y^2 \gtreqqless 1, \qquad (c^2-a^2)x^2+(c^2-b^2)y^2 \lesseqqgtr c^2-1;$$

et supposons, en outre,

$$c>a>b>1.$$

Soit

$$z^2=\frac{a^2x^2+b^2y^2-1}{x^2+y^2-1} \qquad (S):$$

l'intégrale, que je désignerai par V, représente le volume compris entre le plan des xy, la surface (S) et les cylindres dont les équations seraient

$$x^2+y^2=1, \qquad (c^2-a^2)x^2+(c^2-b^2)y^2=c^2-1.$$

Conséquemment (*)

$$V=\pi\int_{\infty}^{c} z\,d\,.\,XY(S)$$

en supposant

$$X=\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-a^2}}, \quad Y=\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-b^2}}.$$

(*) *Mémoire sur la réduction*, etc. (*Journal de Liouville*), tome IV, p. 325.

On trouve ensuite, par un calcul facile,

$$V = \pi (a^2 - 1) \int_c^\infty \frac{z^2 dz}{(z^2 - a^2)\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}$$

$$+ \pi (b^2 - 1) \int_c^\infty \frac{z^2 dz}{(z^2 - b^2)\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \; ;$$

puis, en prenant

$$z^2 - a^2 = (z^2 - b^2)\sin^2\varphi, \quad b = e\,a, \quad \sin\lambda = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - a^2 e^2}} :$$

$$V = \frac{\pi (a^2 - 1)}{a(1 - e^2)} \int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}$$

$$+ \frac{\pi (a^2 e^2 - 1)}{a(1 - e^2)} \int_\lambda^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \; ;$$

ou encore

$$V = \frac{\pi(a^2-1)}{a} \int_0^\mu \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}} + \frac{\pi(a^2e^2-1)}{a} \int_0^\mu \frac{d\theta}{(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \; ;$$

pourvu que l'on suppose

$$\sin\theta = \frac{a}{z}, \quad \sin\mu = \frac{a}{c}.$$

IV. — DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE DIRICHLET.

Cette formule, célèbre autant que remarquable, est la suivante :

$$\int\int\int \ldots\ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\,dy\,dz \ldots$$

$$= \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots}{pqr \ldots} \; \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)} \qquad \text{(A).}$$

On suppose les n variables $x, y, z, \ldots$, positives et satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^z + \ldots \overline{\overline{<}} 1,$$

dans laquelle les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots p, q, r, \ldots$ sont positives.

Pour établir la relation (A), je commence, comme le fait M. Liouville (*), par la réduire à celle-ci :

$$\mathrm{A} = \int\int\int \ldots x^{\frac{a}{p}-1} y^{\frac{b}{q}-1} z^{\frac{c}{r}-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)} \qquad \text{(B)},$$

dans laquelle

$$x + y + z + \ldots \overline{\overline{<}} 1.$$

Soit maintenant

$$\mathrm{B} = \int\int \ldots y^{\frac{b}{q}-1} z^{\frac{c}{r}-1} \ldots dy\, dz \ldots,$$

la condition aux limites étant

$$y + z + \ldots \overline{\overline{<}} 1;$$

et soit V ce que devient la même intégrale B, lorsque la condition aux limites est

$$y + z + \ldots \overline{\overline{<}} 1 - x.$$

(*) *Journal de Mathématiques*, tome IV, p. 225.

Il est visible que

$$V = (1-x)^{n-1+\frac{b}{q}-1+\frac{c}{r}-1+\dots} B,$$

ou

$$V = (1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\dots} B.$$

D'ailleurs

$$A = B\int_0^1 x^{\frac{a}{p}-1}(1-x)^{\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\dots}\,dx;$$

ou, d'après une formule connue,

$$A = B\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\dots\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\dots\right)} \qquad (C).$$

Cette relation (C), qui réduit le cas de n variables à celui de $n-1$ variables, équivaut au théorème proposé; car, dans le cas d'une seule variable u, l'on a

$$\int_0^1 u^{\frac{f}{t}-1}\,du = \frac{t}{f} = \frac{\Gamma\left(\frac{f}{t}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{f}{t}\right)}.$$

V. — RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE (*).

Soit

$$A_n = \int dx\,dy\,dz\dots\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\dots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\dots)}},$$

les n variables, supposées positives, satisfaisant à la condition

$$x^2+y^2+z^2+\dots \overline{\gtrless} 1.$$

(*) Cette Note est extraite, en partie, du *Journal de Liouville* (tome IV).

Je pose, à l'ordinaire (*),

$$\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\ldots)}=v^2;$$

d'où résulte

$$x^2+y^2+z^2+\ldots=\frac{1-v^2}{1+v^2}:$$

les limites de v sont 1 et 0. Si donc je représente par F (v) l'intégrale

$$\int dx\,dy\,dz\ldots,$$

la condition aux limites étant

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{1-v^2}{1+v^2}}}\right)^2+\ldots\overline{\overline{<}}\,1,$$

j'aurai

$$\mathrm{A}=\int_1^0 v\,d.\,\mathrm{F}(v).$$

Par la formule de Dirichlet,

$$\mathrm{F}(v)=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

donc

$$\mathrm{A}_n=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_1^0 v\,d.\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

ou

$$\mathrm{A}_n=2n\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_0^1\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\frac{v^2\,dv}{(1+v^2)^2}.$$

(*) *Mémoire sur la Réduction*, etc.

Soit

$$v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi ;$$

d'où

$$\frac{1 - v^2}{1 + v^2} = \cos \varphi , \quad v^2 = \frac{1 - \cos \varphi}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}, \quad \frac{d v}{(1 + v^2)^2} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \, d \varphi :$$

la formule ci-dessus devient

$$A_n = \frac{n}{2} \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} - 1} \varphi \, (1 - \cos \varphi) \, d \varphi ,$$

ou

$$A_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} - 1} \varphi \, d \varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} + 1} \varphi \, d \varphi \right] .$$

On a, par des formules connues :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} - 1} \varphi \, d \varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1 - \theta)^{\frac{n}{4} - 1} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{n}{2} + 1} \varphi \, d \varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1 - \theta)^{\frac{n - 2}{4}} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + 1\right)};$$

donc

$$A_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n + 1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n + 2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4} + 1\right)} \right] .$$

Lorsque $n = 1$,

$$A_1 = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right].$$

Mais

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)};$$

donc

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}.$$

Si l'on pose $x = \cos\varphi$, l'intégrale se transforme en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1-1+\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\left[F^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) - E^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right].$$

Ainsi, l'intégrale eulérienne

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{-\frac{3}{4}}dx = \Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right),$$

et les fonctions elliptiques complètes $E^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $F^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, satisfont à la relation

$$F^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) - E^1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \frac{1}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi}} - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}.$$

VI. — AUTRE INTÉGRALE MULTIPLE.

Soit

$$B_n = \int \frac{dx\, dy\, dz \ldots}{\sin(x+y+z+\ldots)},$$

les n variables $x, y, z, \ldots$ étant positives et satisfaisant à la condition

$$x + y + z + \ldots \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on pose

$$x + y + z + \ldots = v,$$

on aura

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \,.\, F(v)}{\sin v},$$

pourvu que

$$F(v) = \int dx\, dy\, dz \ldots,$$

et que, dans cette intégrale multiple, les variables vérifient l'inégalité

$$x + y + z + \ldots \overline{\overline{<}} v.$$

Or, par la Formule de Dirichlet (Note IV),

$$F(v) = \frac{v^n}{\Gamma(n+1)};$$

donc

$$B_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v^{n-1}\, dv}{\sin v}.$$

Addition. — (Septembre 1865).

Si $n = 1$, l'intégrale est infinie.

$$\text{Si } n = 2, \quad B_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\,dv}{\sin v} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(v)\,dv\,;$$

ou, en supposant $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,v = u$:

$$B_2 = -2\int_0^1 \frac{\mathrm{l}\,u}{1+u^2}\,du = 2G \ (^*).$$

Dans le cas général, la détermination de l'intégrale simple dont dépend B_n paraît exiger l'emploi de séries compliquées (**).

VII. — SUR LA PARTITION DES NOMBRES.

PROBLÈME. — *Trouver le nombre* N *des solutions entières positives de l'équation*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = s,$$

dans laquelle s *est un nombre entier donné.*

La solution résulte immédiatement de ce que l'on a vu dans la Note I. En effet, l'équation ci-dessus peut être écrite ainsi :

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_n - 1) = s - n;$$

(*) *Mémoire sur la Transformation des séries et sur quelques intégrales définies. (Académie de Belgique, Savants étrangers,* tome XXXIII.) La constante G, égale à la somme de la série $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \ldots\ldots$ a pour valeur 0,915 965 594 177 21...

(**) *Bierens de Haan*, T. 239.

Donc *le nombre* N *des décompositions de la somme* s — n *en* n *parties positives*, *est égal au nombre des décompositions de* s — n *en* n *parties nulles ou positives* (*). Donc aussi, d'après la formule de la page 3,

$$N = C_{s-1,\,n-1} = \frac{(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\quad(n-1)}.$$

Addition. — (*Septembre* 1865).

Dans le développement de

$$(a + b + c + \ldots + k)^s,$$

le nombre des termes contenant *une seule* lettre est, d'après la formule précédente,

$$C_{s-1,\,0} \times \frac{n}{1},$$

n désignant le nombre des lettres a, b, c, . . . k.

De même, les termes contenant *deux lettres* sont en nombre

$$C_{s-1,\,1} \times \frac{n(n-1)}{1\,.\,2};$$

et ainsi de suite.

Enfin, parmi les termes du développement considéré, le nombre de ceux qui contiennent les n lettres est

$$C_{s-1,\,n-1} \times 1.$$

D'ailleurs, le nombre total des termes est, comme on l'a vu dans la Note I,

$$C_{n+s-1,\,s}.$$

(*) Il est bien entendu qu'il ne s'agit pas ici des décompositions *essentiellement différentes* : 3 + 2 et 2 + 3 sont considérées comme *deux décompositions* du nombre 5.

On a donc la relation suivante, qui peut être démontrée directement :

$$C_{p,o} \times C_{n,1} + C_{p,1} \times C_{n,2} + .. + C_{p,n-1} \times C_{n,n} = C_{n+p,p+1}.$$

Par exemple, si $p = 12$ et $n = 5$:

$$1 \times \frac{5}{1} + \frac{12}{1} \times \frac{5.4}{1.2} + \frac{12.11}{1.2} \times \frac{5.4}{1.2} + \frac{12.11.10}{1.2.3} \times \frac{5}{1} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} \times 1$$

$$= \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4},$$

ou

$$5 + 12 . 10 + 66 . 10 + 220 . 5 + 495 = 2\,380;$$

ce qui est exact.

VIII. — SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN PRODUIT EN FACTEURS.

PROBLÈME. — *De combien de manières le produit* $a\,b\,c\,d\,..\,k = N$, *composé de n facteurs premiers, inégaux, peut-il être décomposé en p facteurs?*

Soit $x_{n,p}$ ce nombre inconnu.

Si nous introduisons un nouveau facteur premier l, différent de a, b, c, . . . , k, nous pourrons décomposer le produit N l en p facteurs, soit en multipliant par l un quelconque des p facteurs dont le produit est N, soit en multipliant par l le nombre N décomposé en $p - 1$ facteurs.

Par conséquent

$$x_{n+1,p} = p x_{n,p} + x_{n,p-1},$$

ou

$$x_{n,p} = p x_{n-1,p} + x_{n-1,p-1} \qquad (1).$$

On conclut aisément de cette équation, à cause de $x_{p,p}=1$:

$$x_{n,p} = x_{n-1,p-1} + p x_{n-2,p-1} + p^2 x_{n-3,p-1} + \ldots$$

$$+ p^{n-p-1} x_{p,p-1} + p^{n-p} \qquad (2).$$

Cette nouvelle équation aux différences finies est moins simple que la précédente : néanmoins, nous allons pouvoir en conclure, par induction, l'intégrale de celle-ci.

1° Soit d'abord $p = 2$: l'équation (2) devient

$$x_{n,2} = x_{n-1,1} + 2 . x_{n-2,1} + 2^2 . x_{n-3,1} + .. + 2^{n-3} x_{2,1} + 2^{n-2}.$$

Mais, évidemment,

$$x_{n-1,1} = x_{n-2,1} = \ldots = x_{2,1} = 1;$$

donc

$$x_{n,2} = 2^{n-1} - 1 \tag{3}$$

2° Soit $p = 3$:

$$x_{n,3} = \left(2^{n-2} - 1\right) + 3\left(2^{n-3} - 1\right) + 3^2\left(2^{n-4} - 1\right) + \ldots$$

$$+ 3^{n-4}\left(2^2 - 1\right) + 3^{n-3}\left(2 - 1\right)$$

$$= 2\left(2^{n-3} + 3 . 2^{n-4} + 3^2 . 2^{n-5} + .. + 3^{n-4} . 2 + 3^{n-3}\right)$$

$$- \left(1 + 3 + .. + 3^{n-3}\right)$$

$$= 2\left(3^{n-2} - 2^{n-2}\right) - \frac{3^{n-2} - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(3^{n-1} - 2 . 2^{n-1} + 1\right) \tag{4}$$

3° Soit encore $p = 4$: l'équation (2) se réduit à

$$x_{n,4} = \frac{1}{2}\left(3^{n-2} - 2 . 2^{n-2} + 1\right) + 4 . \frac{1}{2}\left(3^{n-3} - 2 . 2^{n-3} + 1\right)$$

$$+ 4^2 \frac{1}{2}\left(3^{n-4} - 2 . 2^{n-4} + 1\right) + .. + 4^{n-5} \frac{1}{2}\left(3^3 - 2 . 2^3 + 1\right)$$

$$+ 4^{n-4} \frac{1}{2}\left(3^2 - 2 . 2^2 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} 3^2 \left(3^{n-4} + 4 . 3^{n-5} + .. + 4^{n-4}\right) - 2^2\left(2^{n-4} + 4 . 2^{n-5} + .. + 4^{n-4}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + 4 + 4^2 + .. + 4^{n-4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3^2 \left(4^{n-3} - 3^{n-3}\right) - 2\left(4^{n-3} - 2^{n-3}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(4^{n-3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3}\left(4^{n-1} - 3 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 1\right) \qquad (5).$$

La loi des résultats est maintenant évidente; et l'on a, en général,

$$x_{n,p} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 3 \ldots (p-1)}\left[p^{n-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{n-1} + \ldots \pm 1\right];$$

ou, plus simplement

$$x = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)} \Delta^{p-1}\left(1^{n-1}\right) \qquad (A).$$

Addition. — (*Septembre* 1865).

I. La valeur (A), substituée dans l'équation (1), conduit à la relation

$$\Delta^{p-1}\left(1^{n-1}\right) = p\,\Delta^{p-1}\left(1^{n-2}\right) + (p-1)\,\Delta^{p-2}\left(1^{n-2}\right),$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\Delta^{p}\left(1^{n+1}\right) = (p+1)\,\Delta^{p}\left(1^{n}\right) + p\,\Delta^{p-1}\left(1^{n}\right) \qquad (B).$$

Celle-ci ne diffère pas de celle que j'ai employée dans ma Note *sur les différences de* 1^p *et sur le calcul des Nombres de Bernoulli* (*). La concordance de ces relations est une vérification nouvelle de la formule (A).

II. Les valeurs de $x_{n,p}$ sont précisément celles que j'ai désignées par $A_p, B_p, C_p, \ldots$ dans une Note *sur la somme des puissances semblables des nombres naturels* (**). De là résulte un rapprochement assez inattendu entre deux problèmes dont les énoncés sont bien différents.

(*) *Annali di Matematica pura ed applicata*, tome II.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XV, p. 210.

III. Si l'on veut savoir *de combien de manières le nombre* N *est décomposable en facteurs*, il suffit de calculer

$$S_n = x_{n,1} + x_{n,2} + \ldots + x_{n,n}.$$

Soit, par exemple $n = 6$: la table contenue dans la Note dont il vient d'être question donne

$$x_{6,1} = 1, x_{6,2} = 31, x_{6,3} = 90, x_{6,4} = 65, x_{6,5} = 15, x_{6,6} = 1 ;$$

donc

$$S_6 = 203.$$

IX. — ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

Si les coefficients a, b sont entiers et premiers entre eux, et que c soit entier, les solutions entières de l'équation

$$ax + by = c \qquad (1)$$

sont, comme l'on sait, données par les deux formules :

$$x = \alpha - b\theta, \quad y = \beta + a\theta \qquad (2),$$

dans lesquelles α, β représentent un système de valeurs entières de x, y : θ est un entier quelconque, positif ou négatif.

Supposons a, b, c positif. Alors les ***solutions positives***, nécessairement en nombre limité, sont déterminées par les inégalités

$$\theta < \frac{\alpha}{b}, \quad \theta > -\frac{\beta}{a} \qquad (3).$$

A cause de

$$a\alpha + b\beta = c,$$

on a

$$-\frac{\beta}{a} = \frac{a\alpha - c}{ab};$$

donc les inégalités (3) équivalent à celles-ci :

$$\theta < \frac{a\alpha}{ab}, \quad \theta > \frac{a\alpha - c}{ab} \qquad (4).$$

La différence entre les deux limites de θ est $\frac{c}{ab}$. Conséquemment, la *partie entière de* $\frac{c}{ab}$, *ou cette partie entière augmentée d'une unité, indique le nombre des valeurs que l'on peut attribuer à* θ. En d'autres termes : *le nombre des solutions positives de l'équation* (1) *est égal à l'un des deux quotients entiers de* c *par* ab (*).

Addition. — (*Septembre* 1865).

Considérons d'abord le cas où c serait un multiple de ab : $c = abq$. On peut prendre $\beta = o$, $\alpha = bq$; et il est clair, par les formules (2), que θ peut recevoir *les* $q + 1$ *valeurs* $0, 1, 2, \ldots q$ (**).

En second lieu, supposons $c = abq + c'$, c' étant positif et moindre que ab; puis, prenons simultanément les deux équations

$$ax + by = abq + c' \qquad (A),$$

$$ax' + by' = c' \qquad (B),$$

qui donnent celle-ci :

$$a(x - x') + b(y - y') = abq \qquad (C).$$

(*) Ce petit théorème, que je trouve dans mes notes de 1839, est souvent attribué à M. Hermite. J'ignore si ce profond géomètre, que je m'honore d'avoir eu pour élève, l'a publié quelque part.

(**) A vrai dire, les solutions $x = o$, $y = aq$; $x = bq$, $y = o$ ne sont pas *essentiellement positives* ; néanmoins on peut les compter, parce qu'elles sont *non négatives*.

Si l'équation (B), qui ne peut avoir plus d'une solution positive, en a réellement une, nous aurons, en désignant par α', β', ces valeurs positives de x', y' :

$$y - \beta' = a\theta, \quad x - \alpha' = bq - b\theta;$$

ou

$$y = \beta' + a\theta, \quad x = \alpha' + b(q - \theta) \qquad \text{(D)}.$$

A cause de $c' < ab$, on a

$$\beta' < a, \quad \alpha' < b:$$

donc les deux dernières formules donneront des valeurs positives si l'on fait $\theta = 0, 1, 2, \ldots q$.

Ainsi, *quand l'équation* (B) *admet un système de valeurs positives*, *l'équation* (A) *en admet* q + 1.

Si l'équation (B) n'a aucune solution positive, on peut supposer, dans les formules (D),

$$o < \beta' < a, \quad o > \alpha' > -b:$$

ceci résulte des préliminaires de la théorie. Par suite, les seules valeurs admissibles pour θ sont 0, 1, 2, 3, ... q — 1. Donc, *lorsque l'équation* (B) *n'admet aucune solution positive, l'équation* (A) *en admet seulement* q.

En résumé : 1° *Si* c = q a b, *l'équation*

$$ax + by = c$$

admet q + 1 *solutions non-négatives*; 2° *Si* c = qab + c', *cette même équation admet* q + 1 *ou* q *solutions positives*, *suivant que l'équation auxiliaire*

$$ax' + by' = c'$$

a ou n'a pas de solution positive.

X. — SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^n}\, dx$ (*).

I. D'après une remarque générale faite par Poisson (**), si l'on appelle y_n cette intégrale définie, on trouve aisément l'équation linéaire d'ordre $2n$:

$$y_n - \frac{n}{1}\frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{d^4 y_n}{d\alpha^4} - \ldots \pm \frac{d^{2n} y_n}{d\alpha^{2n}} = y_0 \qquad (1),$$

dans laquelle « y_0 représente l'intégrale $\int_0^\infty \cos \alpha x dx$.

» Cette intégrale est, en général, indéterminée; mais ici » on peut la supposer nulle; car, en adoptant cette valeur, » on est conduit à $y_1 = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, valeur exacte (***). »

II. A cause de $y_0 = o$, l'équation (1) est vérifiée par $y_n = e^t$, t représentant une racine quelconque de

$$1 - \frac{n}{1} t^2 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} t^4 - \ldots + t^{2n} = o,$$

(*) Le texte de cette Note, tel qu'il a paru dans le *Journal de Liouville*, (tome V), renferme quelques fautes de calcul et d'impression.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, (16e cahier, p. 222).

(***) M. Serret a critiqué, avec raison (*Journal de Liouville*, tome VIII, p. 191) l'emploi que j'ai fait de l'intégrale indéterminée $\int_0^\infty \cos \alpha x\, dx$, à l'exemple de Poisson. J'avais prévu l'objection qui pouvait être faite ; car la phrase *guillemetée*, que je n'ai pas reproduite dans le *Journal de Liouville*, est tirée de ma rédaction primitive (13 février 1840). Du reste, je donne cette démonstration pour ce qu'elle vaut.

ou de

$$(1 - t^2)^n = o \qquad (2).$$

Cette équation (2) a n racines égales à $+ 1$, et n racines égales à $- 1$. D'ailleurs l'intégrale proposée ne peut croître indéfiniment avec α; par conséquent la valeur de cette intégrale doit être donnée par la formule

$$y_n = e^{-\alpha}\left[A_0 + \frac{A_1}{1}\alpha + \frac{A_2}{1.2}\alpha^2 + \ldots + \frac{A_{n-1}}{1\ldots(n-1)}\alpha^{n-1}\right] (3),$$

$A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ étant des constantes qu'il s'agit de déterminer.

III. Pour cela, je représente par P le polynôme entre parenthèses, et je prends les $n - 1$ premières dérivées des deux membres de l'égalité (3), ce qui donne généralement

$$\frac{d^i y_n}{d\alpha^i} = (-1)^i e^{-\alpha}\left[P - \frac{i}{1}\frac{dP}{d\alpha} + \frac{i(i-1)}{1.2}\frac{d^2P}{d\alpha^2} - \ldots \pm \frac{d^iP}{d\alpha^i}\right] \quad (4).$$

Faisant $\alpha = o$ dans les équations (3) et (4), j'obtiens

$$(y_n) = A_o,$$

et

$$\left(\frac{d^iy}{d\alpha^i}\right) = (-1)^i\left[A_o - \frac{i}{1}A_1 + \frac{i(i-1)}{1.2}A_2 - \ldots \pm A_i\right] (5) :$$

(y_n) et $\left(\frac{d^iy_n}{d\alpha^i}\right)$ représentent les valeurs de y_n et $\frac{d^iy_n}{d\alpha^i}$ répondant à $\alpha = o$.

La nature des équations (5) permet de les résoudre facilement : on trouve

$$A_i = (y_n) + \frac{i}{1}\left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{d^2y_n}{d\alpha^2}\right) + \ldots + \left(\frac{d^iy_n}{d\alpha^n}\right) \quad (6).$$

IV. J'observe actuellement que

$$y_n = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{\left(1 + x^2\right)^n},$$

$$\frac{dy_n}{d\alpha} = -\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \, . \, x dx}{\left(1 + \alpha^2\right)^n},$$

$$\frac{d^2 y_n}{d\alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, . \, x^2 \, dx}{\left(1 + x^2\right)^n},$$

$$\frac{d^3 y_n}{d\alpha^3} = +\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \, . \, x^3 \, dx}{\left(1 + \alpha^2\right)^n},$$

$$\frac{d^4 y_n}{d\alpha^n} = +\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, . \, x^4 \, dx}{\left(1 + x^2\right)^n},$$

. . . . ;

d'où

$$\left(y_n\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^n},$$

$$\left(\frac{dy_n}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 y}{d\alpha^2}\right) = -\int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{\left(1 + x^2\right)^n},$$

$$\left(\frac{d^3y}{d\alpha}\right) = o ,$$

$$\left(\frac{d^4 y}{d\alpha n}\right) = +\int_o^\infty \frac{x^4 dx}{\left(1+x^2\right)^n} ,$$

. . . .

Pour évaluer ces diverses intégrales définies, je considère généralement

$$B_p = \int_o^\infty \frac{x^{2p}\, dx}{\left(1+x^2\right)^n} \qquad (7),$$

l'exposant $2p$ étant moindre que n (*).

Si l'on pose

$$x^2 = \frac{\theta}{1-\theta},$$

la formule (7) devient

$$B_p = \tfrac{1}{2}\int_o^1 \theta^{p-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{n-p-\frac{3}{2}}\, d\theta \qquad (8),$$

ou

$$B_p = \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-p-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \qquad (9).$$

Par conséquent, à cause de l'égalité (6),

$$A_i = \frac{1}{2\,\Gamma(n)}\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{1}{2}\right) - \frac{i(i-1)}{1\,.\,2}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{3}{2}\right) + \ldots\right] \qquad (10).$$

(*) L'intégrale B_p ne devient infinie que pour $2p = 2n$; mais, dans la formule (6), i est inférieur à n; et le nombre pair $2p$ remplace i.

Lorsque i est pair, le dernier terme de la quantité entre parenthèses est

$$\pm \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i+1}{2}\right);$$

et, quand i est impair, ce dernier terme

$$= \pm i\,\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{i}{2}\right).$$

V. La valeur de A_i peut être écrite autrement.

Si l'on fait

$$x = \operatorname{tg}\varphi,$$

on trouve

$$B_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi \cos^{2n-2p-2}\varphi\, d\varphi \qquad (11).$$

Par suite

$$A_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\cos^{2n-2}\varphi - \frac{i(i-1)}{1.2}\sin^2\varphi\cos^{2n-4}\varphi + \ldots\right]$$

La quantité entre parenthèses est la partie réelle du développement de $\cos^{2n-i-2}\varphi\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^i$; donc, par le Théorème de Moivre,

$$A_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi \cos i\varphi\, d\varphi \qquad (12).$$

VI. On a identiquement

$$\cos i\varphi = \cos\varphi\cos(i-1)\varphi - \sin\varphi\sin(i-1)\varphi;$$

donc

$$A_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-1}\varphi\cos(i-1)\varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi\sin\varphi\sin(i-1)\varphi\, d\varphi;$$

ou, en intégrant par parties et observant que le terme

$$\frac{1}{2n-i-1}\cos^{2n-i-1}\varphi\sin(i-1)\varphi$$

s'annule aux deux limites,

$$A_i = 2\,\frac{n-i}{2n-i-1}\,A_{i-1} \qquad (13).$$

D'ailleurs

$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2\Gamma(n)}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2})\,;$$

ou, par une formule de Legendre,

$$A_0 = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\,\frac{\Gamma(2n-2)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n-1)} \qquad (14);$$

donc, après quelques réductions,

$$A_i = \frac{\pi}{2^{2n-i-1}}\,\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n-1)} \qquad (15).$$

La comparaison des valeurs (10), (12) et (15) donne

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) - \frac{i(i-1)}{1\,.\,2}\Gamma(\tfrac{3}{2})\Gamma(n-\tfrac{3}{2}) + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\Gamma(\tfrac{5}{2})\Gamma(n-\tfrac{5}{2}) - \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2^{2n-i-2}}\,\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n-i)} \qquad (16),$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-i-2}\varphi\cos i\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n-i-1}}\,\frac{\Gamma(2n-i-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n-i)}\ (^*) \qquad (17).$$

(*) Cette formule, qui subsiste pour toutes les valeurs positives de n et de $n-i-1$, paraît due à Cauchy (*Journal de Liouville*, tome VIII, p. 2) (septembre 1865).

VII. Revenant à l'intégrale proposée, je substitue les valeurs (15) dans la formule (3), et j'obtiens

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{(1+x^2)^n}$$

$$= \frac{\pi e^{-\alpha}}{2^{2n-1}\left[\Gamma(n)\right]^2}\left[\Gamma(2n-1) + \frac{n-1}{1}(2\alpha)\Gamma(2n-2) + \ldots + (2\alpha)^{n-1}\Gamma(n)\right] \quad (18)$$

Si, dans cette formule (18), on remplace les symboles Γ par les intégrales eulériennes qu'ils représentent, on pourra l'écrire ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-\alpha}}{2^{n2-1}\left[\Gamma(n)\right]^2}\int_0^\infty e^{-y} y^{n-1}(y+2\alpha)^{n-1} dy \quad (19),$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\left[\Gamma(n)\right]^2}\int_0^\infty e^{-2z} z^{n-1}(z+\alpha)^{n-1} dz \quad (20),$$

ou enfin, en représentant $\alpha + 2z$ par αt :

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n-1}}{\left[\Gamma(n)\right]^2}\int_1^\infty e^{-\alpha t}(t^2-1)^{n-1} dt \quad (21).$$

XI. — PROBLÈME DE MINIMUM (1841).

Mener un plan tangent à un ellipsoïde donné, de manière que le triangle formé par les intersections de ce plan avec les plans principaux, ait une aire minimum (*).

I. L'ellipsoïde étant rapporté à ses axes, et x, y, z désignant les coordonnées du point de contact, on a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1).$$

Le plan tangent coupe les axes en des points dont les distances au centre sont

$$\frac{a^2}{x},\ \frac{b^2}{y},\ \frac{c^2}{z}.$$

Les faces du tétraèdre tri-rectangle déterminé par les quatre plans ont donc pour aires, respectivement :

$$\tfrac{1}{2}\frac{b^2c^2}{yz},\ \tfrac{1}{2}\frac{c^2a^2}{zx},\ \tfrac{1}{2}\frac{a^2b^2}{xy}.$$

Par suite, l'aire cherchée est

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{yz}\right)^2+\left(\frac{c^2a^2}{zx}\right)^2+\left(\frac{a^2b^2}{xy}\right)^2},$$

ou

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\frac{a^2b^2c^2}{xyzp} \qquad (2),$$

en supposant

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4} \qquad (3)$$

(*) Note rédigée à l'occasion d'une solution inexacte, publiée dans le tome III du *Journal de Mathématiques*.

on sait que p est la distance du centre au plan tangent.

II. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} = u, \quad \frac{y^2}{b^2} = v, \quad \frac{z^2}{c^2} = w \qquad (4);$$

alors les équations (1), (2) peuvent être remplacées par

$$u + v + w = 1 \qquad (5),$$

$$\varphi^2 = \frac{1}{4}\,\frac{a^2 b^2 c^2}{uvw}\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right) \qquad (6).$$

La condition $d\varphi = o$ équivaut à

$$\left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right)\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right) - \left(\frac{du}{a^2} + \frac{dv}{b^2} + \frac{dw}{c^2}\right) = o,$$

ou, plus simplement, à

$$\left(\frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2}\right)\frac{du}{u} + \left(\frac{w}{c^2} + \frac{u}{a^2}\right)\frac{dv}{v} + \left(\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2}\right)\frac{dw}{w} = o \quad (7).$$

D'ailleurs

$$du + dv + dw = o \qquad (8).$$

Si l'on retranche membre à membre ces deux équations, après avoir divisé la seconde par une indéterminée λ^2, et que l'on égale ensuite à zéro les coefficients des différentielles du, dv, dw, on aura

$$-\frac{u}{\lambda^2} + \frac{v}{b^2} + \frac{w}{c^2} = o, \quad \frac{u}{a^2} - \frac{v}{\lambda^2} + \frac{w}{c^2} = o, \quad \frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2} - \frac{w}{\lambda^2} = o \quad (9),$$

d'où l'on tire aisément

$$2\lambda^6 + (a^2 + b^2 + c^2)\,\lambda^4 - a^2b^2c^2 = o \qquad (10).$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{a^2 + \lambda^2} + \frac{1}{b^2 + \lambda^2} + \frac{1}{c^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (11),$$

ou encore sous celle-ci :

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda^2}+\frac{b^2}{b^2+\lambda^2}+\frac{c^2}{c^2+\lambda^2}=2 \qquad (12).$$

D'un autre côté, si l'on combine deux à deux les équations (9), on trouve

$$\frac{u}{\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda^2}\right)}=\frac{v}{\left(\frac{b^2}{b^2+\lambda^2}\right)}=\frac{w}{\left(\frac{c^2}{c^2+\lambda^2}\right)}=\tfrac{1}{2} \qquad (13);$$

à cause des relations (1) et (12). Par suite

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{2(a^2+\lambda^2)}},\ y=\frac{b^2}{\sqrt{2(b^2+\lambda^2)}},\ z=\frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+\lambda^2)}} \quad (14);$$

$$\frac{1}{p^2}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+\lambda^2}+\frac{1}{b^2+\lambda^2}+\frac{1}{c^2+\lambda^2}\right],$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (12) :

$$p=\lambda\sqrt{2} \qquad (15).$$

Enfin, le minimum cherché a pour valeur

$$\varphi=\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+b^2)(\lambda^2+c^2)} \qquad (16).$$

Addition. —(*Octobre* 1865).

III. On peut reconnaître, de diverses manières, que les équations (10), (11) ou (12) donnent pour λ^2 une valeur positive et deux valeurs négatives. D'après les équations (9) ou (15), la valeur positive satisfait seule à la question. Pour simplifier l'équation (10), on peut faire

$$\lambda^2=\frac{abc}{t} \qquad (17),$$

d'où l'on conclut

$$t^3-(a^2+b^2+c^2)\,t-2\,abc=0 \qquad (18).$$

Cette nouvelle équation, qui est bien connue, se rapporte au problème suivant : *Déterminer le diamètre* t *d'un demi-cercle auquel on puisse inscrire trois cordes consécutives, égales à des droites données* a, b, c. On voit que si ce demi-cercle était tracé, il serait facile de construire les diverses lignes au moyen desquelles on peut déterminer le plan tangent qui détermine le triangle minimum. Ce rapprochement entre deux problèmes d'apparences bien différentes paraîtra peut-être assez curieux.

XII. — PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE. (1841.)

Déterminer le rayon du cercle circonscrit à un triangle, connaissant les distances des côtés au centre du cercle.

ABC étant le triangle cherché (*), soient p, q, r les distances des côtés BC, CA, AB au centre O. Désignons par x le rayon inconnu et par β, γ les angles OAB, OAC. On a

$$\sin\beta = \frac{r}{x}, \quad \sin\gamma = \frac{q}{x}, \quad \cos(\beta+\gamma) = \frac{p}{x} \qquad (^{**}).$$

D'un autre côté,

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos(\beta+\gamma) + \cos^2(\beta+\gamma) = 1 :$$

donc, par l'élimination des angles,

$$x^3 - (p^2 + q^2 + r^2) - 2pqr = o.$$

D'après cette équation, *le rayon* x *est le diamètre d'un demi-cercle auquel seraient inscrites trois cordes consécutives, égales aux distances* p, q, r (***). Des considérations géométriques conduisent à la même conclusion.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) En effet, $\frac{\text{BOC}}{2} = \text{A} = (\beta + \gamma)$.

(***) Voir la question précédente.

XIII. — THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE (1840) (*).

De toutes les pyramides ayant même hauteur et même angle polyèdre au sommet, la plus petite en volume a pour centre de gravité de la base, le pied de la hauteur.

La base est déterminée par un plan tangent à une sphère ayant pour centre le sommet de la pyramide, et pour rayon la hauteur, que nous adoptons comme unité. Le sommet étant pris pour origine des coordonnées rectangulaires, soient x, y, z les coordonnées du point où le plan de la base touche la sphère : nous aurons

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (1).$$

Soient α_1, β_1, γ_1 les angles que forme, avec les axes, une première arête, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point où elle perce le plan tangent. Nous aurons encore

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1 \qquad (2),$$

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z_1}{\cos\gamma_1} = l_1 \qquad (3);$$

en représentant par l_1 la longueur de l'arête considérée. D'après ces équations,

$$\frac{1}{l_1} = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 \qquad (4).$$

Projetons, sur le plan des xy, la base de la pyramide. C étant l'aire de cette projection, la formule de Stainville donne

$$2C = \Sigma\,(x_1 y_2 - x_2 y_1) \qquad (5).$$

Soient δ , δ_2, . . . les rayons vecteurs menés, de l'origine des coordonnées, aux sommets du polygone situé sur le plan

(*) Publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome VI. Cette première rédaction présente quelques inexactitudes.

des xy ; soient θ_1, θ_2, . . . les angles formés par ces droites avec la partie positive de l'axe des x :

$$x_1 = \delta_1 \cos\theta_1, \quad x_2 = \delta_2 \cos\theta_2,$$

$$y_1 = \delta_1 \sin\theta_1, \quad y_2 = \delta_2 \sin\theta_2;$$

donc

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \delta_1 \delta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

et comme

$$\delta_1 = l_1 \sin\gamma_1, \quad \delta_2 = l_2 \sin\gamma_2,$$

la formule (5) devient

$$2C = \Sigma\, l_1 l_2 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \qquad (6).$$

L'angle formé par la base de la pyramide avec le plan xy a pour cosinus z; donc, P étant l'aire de la base,

$$2P = \frac{1}{z}\Sigma\, l_1 l_2 \sin\gamma_2 \sin\gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_2) \qquad (7).$$

Dans cette équation (7) l_1, l_2, l_3, . . . sont des fonctions de x, y, z; les autres quantités sont indépendantes de ces variables. D'ailleurs, le *minimum* du volume répond au *minimum* de P; donc la question est ramenée à un simple problème de Calcul différentiel.

Posons

$$\Sigma\, l_1 l_2 \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = F(x, y, z):$$

en égalant à zéro la différentielle de $\frac{1}{z}F(x, y, z)$, nous avons

$$z\left(\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz\right) - dz\, F(x, y, z) = 0 \qquad (8).$$

De plus, à cause de l'équation (1),

$$xdx + ydy + zdz = 0 \qquad (9).$$

On conclut aisément, de ces deux relations,

$$y\frac{dF}{dx} = x\frac{dF}{dy} \qquad (10).$$

Pour interpréter ce résultat, observons que, d'après la valeur de $\frac{1}{l_1}$ (4) :

$$\frac{d\,(l_1 l_2)}{dx} = l_2 \frac{dl_1}{dx} + l_1 \frac{dl_2}{dx} = - l_2 l_1^2 \cos \alpha_1 - l_1 l_2^2 \cos \alpha_2$$

$$= - l_1 l_2 (l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2),$$

ou

$$\frac{d(l_1 l_2)}{dx} = - l_1 l_2 (x_1 + x_2).$$

Le premier membre de l'équation (10) équivaut donc à

$$-y \Sigma l_1 l_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin (\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2) = -y \Sigma \delta_1 \delta_2 \sin (\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2).$$

$\delta_1 \delta_2 \sin (\theta_2 - \theta_1)$ représente le double du triangle déterminé par les rayons vecteurs δ_1, δ_2; $x_1 + x_2$ est le double de l'abscisse du milieu de la base correspondante. Désignant donc par t_1 l'aire de ce triangle, et rar g_1 l'abscisse de son centre de gravité, nous avons

$$\Sigma \delta_1 \delta_2 \sin (\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2) = 6 \Sigma t_1 g_1;$$

ou encore

$$\Sigma \delta_1 \delta_2 \sin (\theta_2 - \theta_1)(x_1 + x_2) = 6 \mathrm{C} \mathrm{X},$$

X étant l'abscisse du centre de gravité du polygone C.

On aurait, semblablement,

$$\Sigma \delta_1 \delta_2 \sin (\theta_2 - \theta_1)(y_1 + y_2)\, 6 \mathrm{C} \mathrm{Y}.$$

L'équation (10) devient donc

$$\frac{\mathrm{X}}{x} = \frac{\mathrm{Y}}{y}.$$

Ainsi, les coordonnées du point de contact cherché sont proportionnelles aux coordonnées du centre de gravité de la base; ce qui démontre le théorème.

XIV. — PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE (1842.)

Trouver un triangle dont les trois côtés et la surface soient représentés par des nombres entiers.

I. D'après la formule

$$T^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \qquad (1),$$

le périmètre $2p$ doit être un nombre *pair*; donc les nombres entiers a, b, c doivent être *pairs*; ou bien l'un doit être *pair*, les deux autres étant *impairs*.

Soient

$$c = 2n,\ p-a = \alpha,\ p-b = \beta \qquad (2);$$

d'où

$$\alpha + \beta = 2n \quad (3), \qquad T^2 = p\alpha\beta(p-2n) \qquad (4).$$

La dernière équation donne

$$p = n + \sqrt{n^2 + \frac{T^2}{\gamma}} \qquad (5),$$

en supposant

$$\alpha\beta = \gamma \qquad (6);$$

ainsi $n^2 + \dfrac{T^2}{\gamma}$ est un carré. D'ailleurs, en vertu des équations (3) et (6), $n^2 - \gamma$ doit aussi être un carré. La question est donc ramenée à la résolution, en nombres entiers, des deux équations

$$n^2 - \gamma = x^2 \quad (7), \qquad n^2 + \frac{T^2}{\gamma} = y^2 \qquad (8).$$

Si l'on prend arbitrairement n et x, l'équation (7) donnera pour γ une valeur entière, après quoi l'on trouvera T et y au moyen de l'équation (8), si toutefois cette équation admet des solutions entières.

II. Si γ contient un facteur carré λ^2, T doit être divisible par λ, et l'équation (8) se simplifie immédiatement, sans changer de forme. Supposons donc que γ ne renferme aucun facteur carré; alors T doit être divisible par γ; ainsi

$$T = \gamma z \qquad (9);$$

puis

$$y^2 - \gamma z^2 = n^2 \qquad (10).$$

III. Si cette équation (10) admet un système de valeurs entières,

$$y = B, \quad z = C \qquad (11),$$

on aura

$$T = C\gamma, \quad x = \sqrt{n^2 - \gamma} = A, \quad p = n + B, \quad \alpha = n + A, \quad \beta = n - A,$$

et enfin

$$a = B - A, \quad b = B + A \qquad (12).$$

IV. Prenons, par exemple,

$$n = 17, \quad x = A = 4.$$

Il résulte, de ces valeurs, $\gamma = 273$; en sorte que l'équation (10) devient

$$y^2 - 273z^2 = 289 \qquad (13).$$

En supposant

$$y = 17y', \quad z = 17z',$$

on réduit l'équation (13) à

$$y'^2 - 273z'^2 = 1.$$

Au moyen des Tables de Legendre (*), on trouve que cette dernière relation est vérifiée pour

$$y' = 727, \quad z' = 44;$$

(*) *Théorie des Nombres*, tome I, table X.

donc

$$y = \mathrm{B} = 12\,359, \quad z = \mathrm{C} = 748;$$

puis

$$\mathrm{T} = 748 \,.\, 273 = 204\,204, \quad a = 12\,355, \quad b = 12\,363, \quad c = 34.$$

XV. — QUELQUES THÉORÈMES EMPIRIQUES. (1842-43.)

En étudiant la série

$$1 + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{7\,.\,8} + \frac{1}{8\,.\,9} + \frac{1}{15\,.\,16} + \frac{1}{24\,.\,25} + \ldots$$

dont le terme général a la forme $\frac{1}{(p-1)p}$, p étant une *puissance* (*), je fus conduit, par induction, au théorème suivant :

Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes* (**). Après avoir perdu près d'une année à la recherche d'une démonstration qui fuyait toujours, j'abandonnai cette recherche fatigante. Néanmoins, elle ne fut pas complètement inutile, parce qu'elle me conduisit à quelques propositions sur la Théorie des Nombres, dont je donne aujourd'hui les *énoncés*. On voudra bien regarder ces propositions comme de simples *théorèmes empiriques*, attendu que, depuis longtemps, les démonstrations, ou plutôt les *tentatives de démonstration* de la plupart d'entre elles, sont égarées. Vrais ou faux, ces théorèmes empiriques pourront peut-être provoquer d'utiles travaux.

I. a *étant un nombre entier et* n *un nombre premier impair, le seul diviseur commun des nombres* $\mathrm{a} + 1$ *et* $\frac{\mathrm{a}^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{a} - 1}$, *est* 1 *ou* n.

(*) *Journal de Liouville*, tome VII, p. 9.

(**) On en trouvera ci-après une démonstration due à *M. Housel*, qui a bien voulu m'autoriser à la faire paraître dans ces *Mélanges*. Elle n'avait pas encore été publiée.

II. *De même, le seul diviseur commun des nombres* $a + 1$ *et* $\frac{a^n + 1}{a + 1}$, *est* 1 *ou* n.

III. *En outre, si* $a = n \mp 1$, $a^n \pm 1$ *est divisible par* n^2, *et non divisible par* n^3.

IV. *L'équation* $(x + 1)^x - x^y = 1$ *est impossible en nombres entiers, excepté pour* $x = o$, $x = 1$, $x = 2$.

V. *L'équation* $x^m - 2^n = 1$ *est impossible en nombres entiers, excepté pour* $x = 3$.

VI. $x^y - y^x = 1$ *est impossible en nombres entiers, excepté pour* $x = 3$, $y = 2$ (*).

VII. *L'équation* $x^p - 1 = P$, *dans laquelle* p *et* P *sont premiers, n'est vérifiée que pour* $x = 2$, $p = 3$, $P = 7$.

VIII. $x^n - 1 = P$ *est impossible, sauf lorsque* $x = 2$.

IX. $x^n - 1 = P^2$ *est impossible.*

X. *L'équation* $x^2 - 1 = p^m$ *n'est vérifiée que pour* $x = 3$, $p = 2$, $m = 3$; *ou* $x = 2$, $p = 3$, $m = 1$.

XI. *L'équation* $m^p - q^n = 1$, *dans laquelle* p *et* q *sont premiers, est impossible, excepté lorsque* $m = 3$, $p = 2$, $q = 2$, $n = 3$.

XII. $x^3 + y^3 = p^2$ *est impossible, sauf le cas de* $x = 2$, $y = 1$, $p = 3$.

XIII. *L'équation*

$$x^n = \frac{(2^{n-2} - 1)^n + 1}{2^{n-2}}$$

est impossible en nombres entiers, excepté dans le cas de $n = 3$, $x = 1$.

(*) On ne compte pas la solution insignifiante : $x = 1$, $y = o$. La même restriction subsiste pour quelques-uns des énoncés suivants.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME RELATIF A LA THÉORIE DES NOMBRES.

(PAR M. HOUSEL.)

Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes.*

I. Cette proposition, énoncée depuis longtemps par M. Catalan, consiste en ce que l'équation

$$a^n = b^m - 1 \qquad (1),$$

vérifiée pour $a = 2$, $b = 3$, $n = 3$, $m = 2$, ne peut l'être pour aucun autre système de valeurs entières et positives. Il est bien entendu que l'on exclut les cas où un de ces quatre nombres serait égal à zéro ou à l'unité.

Pour démontrer ce théorème, nous devons chercher quelles relations peuvent s'établir entre ces nombres a, b, m, n d'après la nécessité à laquelle ils sont soumis d'être entiers et positifs, condition qu'il faut joindre à l'équation (1). En appliquant cette condition, l'on sera conduit à une égalité qui remplacera cette équation (1), autant que cela sera nécessaire, puisqu'elle en admettra toutes les solutions entières et positives : elle devra donc, en particulier, être vérifiée par les quatre nombres indiqués. S'il en arrive autrement pour une égalité à laquelle nous aurons été conduits, il faudra par conséquent la rejeter comme ne pouvant représenter l'équation (1); c'est que nous aurons été entraînés hors de la question par une hypothèse faite provisoirement et qu'il faudra dès lors abandonner.

Enfin nous pourrons toujours supposer que m et n sont premiers. Si l'on avait, par exemple, $m = m'm''$, on poserait

$$b^m = \left(b^{m'}\right)^{m''},$$

et l'on prendrait $b' = b^{m'}$ pour point de départ, au lieu de b.

II. Soit

$$b = 1 + B,$$

l'équation (1) devient

$$a^n = mB + \frac{m(m-1)}{2} B^2 + \ldots + mB^{m-1} + B^m \qquad (2).$$

Soit α le plus grand commun diviseur qui existe nécessairement entre a et B, nous poserons

$$a = \alpha a', \quad B = \alpha B',$$

de sorte que a' et B' sont premiers entre eux. Nous aurons, en divisant par α,

$$\alpha^{n-1} \cdot a'^n = mB' + \frac{m(m-1)}{2} \alpha B'^2 \ldots + \alpha^{m-1} B'^m \qquad (3).$$

Comme le terme mB' doit être divisible par α, ainsi que tous les autres termes de cette équation, il arrivera de deux choses l'une : le nombre m, que nous avons supposé être premier (n° 1), sera égal à α (hypothèse que nous écarterons pour le moment), ou bien sera premier avec α ; dans ce cas, B' sera divisible par α. Nous poserons

$$B' = \alpha^\theta P,$$

le nombre P n'étant plus divisible par α.

D'après cela, si nous remplaçons B par $\alpha^{\theta+1}$. P dans l'équation (2) où $a^n = \alpha^n \cdot a'^n$, et si nous divisons de part et d'autre par $\alpha^{\theta+1}$, il en résulte

$$\alpha^{n-(\theta+1)} \cdot a'^n = mP + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^{\theta+1} . P^2 + \ldots + \alpha^{(\theta+1)(m-1)} . P^m \qquad (4).$$

III. Observons d'abord qu'il est impossible d'avoir $n < \theta + 1$. S'il en était ainsi, il faudrait, pour empêcher que le second membre, qui est entier, fût égalé à un premier membre fractionnaire, que α'^n fît disparaître α en dénominateur ; mais il n'en serait pas moins évident que le premier membre n'aurait d'autres facteurs premiers que ceux de a'. Donc ce premier membre ne pourrait être, comme l'est le second, divisible par P, puisque a' est premier avec B' et par suite avec P.

Il est important de remarquer que ce résultat subsiste, même si l'on admet $P = 1$. En effet, puisque B', qui devient alors égal à α^θ, est premier avec a', on voit que a'^n ne peut faire disparaître α en dénominateur.

IV. Si l'on admet $n = \theta + 1$, le premier membre de l'équation (4) se réduisant à a'^n et devant être, comme le second, divisible par P qui est premier avec a', on aura

$$P = 1.$$

Alors

$$B = \alpha^{\theta+1} = \alpha^n,$$

et l'on trouve, à la place de l'équation (1), la nouvelle forme d'égalité

$$\alpha^n \,.\, a'^n = (1 + \alpha^n)^m - 1 \qquad (5).$$

Mais ce n'est pas la forme cherchée. En effet, si l'on tâche d'identifier (n° I) le second membre de cette équation (5) avec la quantité $3^2 - 1$, on obtient

$$(1 + \alpha^n)^m = 3^2;$$

or, dans cette égalité, comme 3 est évidemment le seul facteur premier de chaque terme, on a $\alpha^n = 2$, ce qui exige que l'on ait $n = 1$. Ainsi l'on tombe sur un des cas d'exclusion déjà indiqués (n° I), c'est-à-dire que l'équation (5) ne peut remplacer l'équation (1).

V. Il nous reste à supposer $n > \theta + 1$. Alors le premier membre de l'équation (4) étant encore divisible par α, il faudra qu'il en soit de même pour mP, comme pour tous les autres termes du second membre. Mais si l'on continuait à admettre que m ne fût pas égal à α, il faudrait que α divisât

P, ce qui est contre l'hypothèse (n° II). On est donc conduit à poser $\alpha = m$, et l'équation (4) devient, après qu'on l'a encore divisée par $\alpha = m$,

$$a'^n \cdot m^{n-(\theta+2)} = \mathrm{P} + \frac{m(m-1)}{2} m^\theta \mathrm{P}^2 + \ldots \qquad (6).$$

Seulement il faut, en général, s'arrêter là, c'est-à-dire poser

$$n = \theta + 2.$$

En effet, si le nombre m divisait encore le premier membre, il devrait aussi diviser P, puisqu'il divise déjà tous les autres termes du second membre, dont les puissances croissent à partir de m^θ; or, cela est contre l'hypothèse, puisque $\alpha = m$ ne divise jamais P (n° II). (Cependant ce raisonnement serait en défaut si l'on avait $\theta = 0$).

Du reste, cette valeur $n = \theta + 2$ réduisant à a'^n le premier membre de l'équation (6), on voit que le facteur P qui divise le second membre et qui est premier avec a' ne pourrait diviser le premier membre. On est donc obligé de poser $\mathrm{P} = 1$, et il reste

$$a'^n = 1 + \frac{m(m-1)}{2} m^\theta + \ldots \qquad (7).$$

VI. Nous avons été ramenés à l'hypothèse $\alpha = m$ que nous avions laissée de côté (n° II). Pour ne rien négliger, nous allons l'introduire directement dans l'équation (3), qui deviendra, en divisant par m,

$$m^{n-2} \cdot a^{n'} = \mathrm{B}' + \frac{m(m-1)}{2} \mathrm{B}'^2 + \ldots + m^{m-2} \mathrm{B}'^m \qquad (8).$$

En répétant les raisonnements que nous avons déjà faits (n^{os} III et IV), nous verrons qu'il est impossible de supposer $n < 2$, et que $n = 2$ donne $\mathrm{B}' = 1$, puisque B' devrait alors diviser a'^n. Par conséquent, B est alors égal à m, et l'on a

$$m^2 \cdot a'^2 = (1 + m)^m - 1. \qquad (9).$$

Si l'on essaye sur cette égalité le système connu $2^3=3^2-1$, on pourra bien identifier les seconds membres en posant $m=2$, mais la comparaison des premiers membres donnerait $a'^2=2$; donc l'équation (9) ne peut pas non plus représenter l'équation (1).

Quant à la supposition $n>2$, elle laisse le premier membre de l'équation (8) divisible par m; il en est évidemment de même pour le troisième terme du second membre et pour tous les termes suivants. Je dis que le deuxième terme $\frac{m(m-1)}{2}B'^2$ est aussi divisible par m, car ce nombre m, étant premier, est impair (à moins qu'on n'ait $m=2$). Alors il faudra que le premier terme du second membre, B', soit divisible par m; on posera donc

$$B'=m^\theta P,$$

ce qui ramène l'équation (8) à l'équation (6), et par suite à l'équation (7) (sauf le cas où $m=2$).

VII. Or cette dernière forme (7) a été trouvée en posant

$$\alpha=m,\quad \theta=n-2,\quad B=m^{n-1},$$

ce qui donne

$$m^n.a'^n=(1+m^{n-1})^m-1. \qquad (10).$$

En cherchant toujours à identifier l'égalité (10) avec $2^3=3^2-1$, on trouve par la comparaison des seconds membres

$$m^{n-1}=2,$$

d'où

$$m=2,\quad n=2.$$

Mais la comparaison des premiers membres donnerait encore $a'^2=2$. Ainsi la forme (10) doit aussi être rejetée.

VIII. Il semble que nous ayons épuisé inutilement toutes les hypothèses possibles. Cependant nous avons réservé (n° V) le cas où l'on aurait, avec $\alpha = m$, la valeur particulière $\theta = 0$. Dans cette supposition, qui donne

$$B' = P, \quad B = mP,$$

l'équation (4) devient, après qu'on a encore divisé par $\alpha = m$,

$$m^{n-2} . a'^n = P + \frac{m(m-1)}{2} P^2 + \ldots + m^{m-2} P^m \qquad (11).$$

C'est un cas particulier de l'équation (8) quand on y remplace B' par P.

Aussi l'on reconnaîtra, comme au n° VI, que l'on doit avoir $n > 2$: mais alors, en reprenant les raisonnements de ce numéro, on verra que le premier terme P du second membre n'étant pas divisible par $\alpha = m$ (n° II), le deuxième terme $\frac{m(m-1)}{2} P^2$ ne doit pas l'être non plus; nous sommes donc forcés d'admettre que $\frac{m-1}{2}$ n'est pas entier, c'est-à-dire que m est pair.

IX. Comme m est premier, nous aurons $m = 2$, circonstance que nous avions laissée de côté (n° VI). Pour n'oublier aucune des combinaisons possibles, nous reprendrons cette hypothèse, qui consiste à poser $n > 2$ et $\alpha = m = 2$, avec toute la généralité dont elle est susceptible ; nous allons donc l'introduire directement dans l'équation (8), qui devient

$$2^{n-2} a'^n = B' + B'^2 \qquad (12).$$

Ici B', premier avec a'^n (n° II) et divisant les deux membres, ne peut avoir d'autre facteur premier que 2; donc

$$B' = 2^\theta, \quad B = 2^{\theta+1};$$

ainsi l'équation primitive se réduit à

$$2^n . a'^n = (1 + 2^{\theta+1})^2 - 1 \qquad (13).$$

Cette dernière égalité revient à

$$2^n . a'^n = 2^{\theta+2}\left(1 + 2^\theta\right),$$

ou encore à

$$a'^n . 2^{n-(\theta+2)} = 1 + 2^\theta.$$

On a toujours $n \geqq \theta + 2$, car α', premier avec $B' = 2^\theta$, l'est aussi avec 2.

En général, le second membre $1 + 2^\theta$ n'est pas divisible par 2 (à moins qu'on n'ait $\theta = 0$); donc le premier membre n'est pas non plus divisible par 2; ce qui donne

$$n = \theta + 2, \quad \theta = n - 2,$$

et l'équation (13) devient

$$2^n . a'^n = \left(1 + 2^{n-1}\right)^2 - 1 \qquad (14).$$

Pour voir si cette égalité peut enfin remplacer l'équation (1), on cherchera encore à l'identifier avec la relation $2^3 = 3^2 - 1$, ce qui donne, en comparant les seconds membres,

$$2^{n-1} = 2, \quad n = 2.$$

La comparaison des premiers membres donne

$$2^2 . a'^2 = 8, \quad a'^2 = 2.$$

Ainsi l'identification est encore impossible.

Il faut donc prendre $\theta = 0$, ce qui nous ramène au n° VIII. Ici l'équation (13) se réduit à

$$2^n . a'^n = (1 + 2)^2 - 1 = 8 \qquad (15).$$

Alors il est enfin possible d'identifier avec la relation $2^3 = 3^2 - 1$; mais l'équation (15) revient évidemment à $2^{n-3} . a'^n = 1$, ce qui exige que l'on ait $n = 3$ et $a' = 1$. On est donc conduit nécessairement au système indiqué, qui est ainsi le seul possible.

XVI. — LIEU GÉOMÉTRIQUE (1843).

PROBLÈME. — *Une ellipse, dont le plan est immobile, tourne autour de son centre* O (*). *Dans chacune de ses positions, on mène à la courbe une tangente* TT′, *parallèle à une direction donnée. Quel est le lieu du point de contact* M?

Soient a, b les demi-axes de l'ellipse; OM $= u$; OA $= a'$, le demi-diamètre parallèle à TT′; AOM $= \omega$.

On a, par les théorèmes d'Apollonius :

$$a'^2 + u^2 = a^2 + b^2, \quad a'u \sin\omega = ab;$$

ou, en remplaçant les coordonnées polaires par des coordonnées rectangulaires,

$$a'^2 + x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad a'y = ab;$$

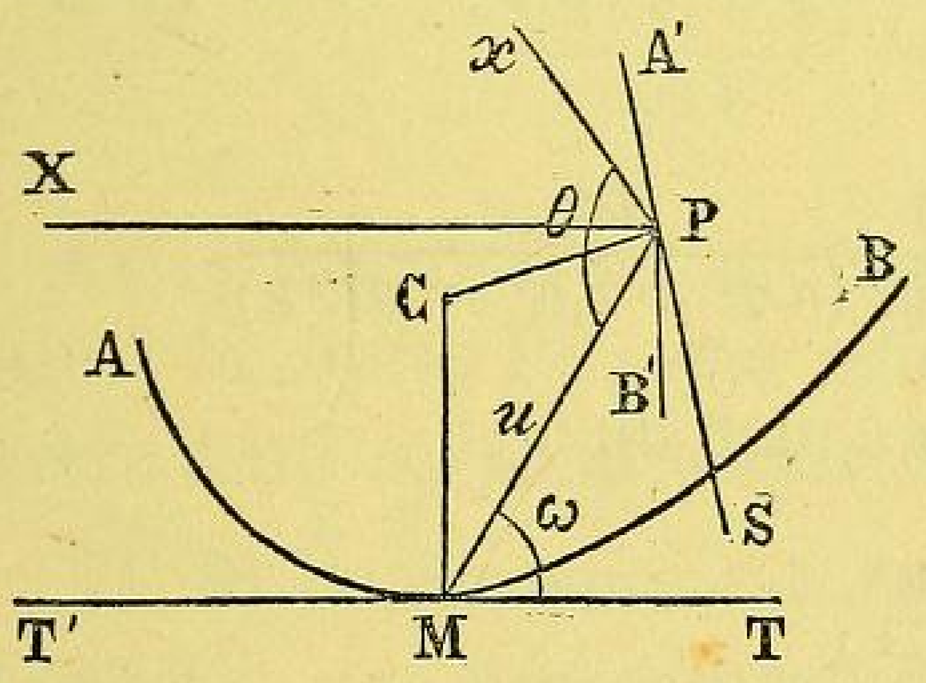
d'où

$$x^2 = \frac{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}{y^2} \qquad (1).$$

Addition. — (*Décembre* 1865).

I. L'équation (1) appartient au *lieu décrit par le centre d'une ellipse donnée, glissant et roulant sur une droite fixe, de manière que le point de contact soit immobile sur la droite* (**).

Cette propriété est générale. En effet, si la courbe AMB tourne autour du point P, et que TT′ soit la tangente parallèle à la direction donnée, *les coordonnées du point de contact* M, *relativement au pôle* P *et à l'axe* PX (parallèle à TT′) *sont les mêmes que les coordonnées de* P, *relativement au pôle* M *et à l'axe* MT.



(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, tome I, p. 424. (Note.)

II. D'après cela, si l'équation de AMB est

$$u = f(\theta) \qquad (1),$$

l'axe Px faisant corps avec la courbe, on aura

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{u\,d\theta}{du} \qquad (2);$$

d'où, en éliminant θ, on trouvera l'équation de la courbe décrite par le point P.

III. Si cette dernière équation est donnée, l'équation (2) prend la forme

$$d\theta = \varphi(u)\,du \qquad (3);$$

en sorte que, par une simple quadrature, on retombera sur l'équation (1). D'après cela, *une courbe quelconque* A′B′ *peut être décrite par un point* P, *lié invariablement à une courbe* AB, *glissant et roulant sur une droite fixe*, ou, sous une forme plus concise,

Toute courbe plane est une tractoire (*).

IV. On tire, de l'équation (2),

$$d\omega = \frac{u\,d^2u - du^2}{du^2}\,d\theta\,.\cos^2\omega \qquad (4).$$

Mais, si l'on désigne par $d\sigma$ l'élément de AMB, et par ρ le rayon de courbure MC, on a

$$d\sigma^2 = du^2 + u^2\,d\theta^2,\quad \rho = \frac{d\sigma^3}{d\theta\,(d\sigma^2 + du^2 - u\,d^2u)}.$$

Au moyen de ces valeurs, et à cause de

$$\cos^2\omega = \frac{du^2}{d\sigma^2},$$

(*) Ce théorème a une grande analogie avec celui que j'ai donné en 1855, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (tome XV, p. 103). Ordinairement, on appelle *tractoire* une courbe dont la génération diffère de celle qui est indiquée ici; néanmoins j'ai conservé cette dénomination, pour n'avoir pas à créer un mot.

la formule (4) devient

$$d\omega = d\theta - \frac{d\sigma}{\rho} \qquad (5).$$

Ainsi, *l'accroissement infiniment petit de* ω *est égal à l'accroissement infiniment petit de l'angle* θ, *moins l'angle de contingence de la courbe* AMB. Ce résultat est évident par la Géométrie.

V. Si l'on désigne par V l'angle MPS que fait la tangente PS avec le rayon vecteur u, on a

$$tg\,V = \frac{ud\omega}{du} = \frac{u}{du}\left(d\theta - \frac{d\sigma}{\rho}\right) = -\,tg\omega - \frac{ud\sigma}{\rho du},$$

ou

$$tg\,V + tg\omega = \frac{u}{\rho \cos \omega},$$

ou encore

$$\frac{\sin (V + \omega)}{\cos V} = \frac{u}{\rho} \qquad (6).$$

Le second membre est égal à $\frac{\sin MCP}{\sin MPC}$; donc

$$\frac{\sin (V + \omega)}{\cos V} = \frac{\sin MCP}{\sin MPC}.$$

Cette proportion prouve que PS est perpendiculaire à CP. Ainsi *la droite* PC, *qui joint le centre de courbure de la* GLISSANTE AMB *au point décrivant* P, *est normale à la tractoire.*

VI. Si la glissante est une *développante de cercle*, la tractoire est *une perpendiculaire à* TT'; si la glissante est une *spirale logarithmique*, la tractoire est une *ligne droite*, etc.

XVII. — THÉORÈME SUR LES SURFACES DÉVELOPPABLES (1843) (*).

Si l'on considère une courbe c tracée sur une surface développable, ainsi que la transformée C de c dans le développement de la surface; le rayon du cercle osculateur de la courbe primitive est égal au rayon du cercle osculateur de la courbe transformée, multiplié par le cosinus de l'angle que fait le plan osculateur de la première courbe, avec le plan tangent à la surface.

Prenons pour origine un point de la première courbe, pour axe des x la tangente en ce point, et pour plan des xy le plan tangent, en ce même point, à la surface développable. Par suite de ces hypothèses :

$$dy = o, \quad dz = o, \quad p = \frac{dz}{dx} = o, \quad q = \frac{dz}{dy} = o, \quad d^2x = o, \quad dz = dx, \quad d^2z = 0;$$

x étant la variable indépendante.

En appelant R le rayon de courbure de la transformée, on a, pour le point considéré,

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{d \cdot \frac{dy}{dz}}{dx} \quad (^{**}),$$

ou

$$\mathrm{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1).$$

Soit ε l'angle de contingence : en général

$$\varepsilon^2 = \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds}\right)^2;$$

donc, pour l'origine,

$$\varepsilon^2 = \left(d \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{dx}\right)^2,$$

(*) Publié dans les *Comptes-Rendus*, tome XVII.

(**) *Calcul différentiel de Lacroix*, tome 1er, p. 668.

ou

$$\varepsilon^2 = \frac{d^2y^2 + d^2z^2}{dx^2}.$$

Par suite, le rayon de courbure a pour valeur

$$\rho = \frac{dx^2}{\sqrt{d^2y^2 + d^2z^2}} \qquad (2).$$

Il est facile de voir que le plan osculateur de la courbe a pour équation

$$-\mathrm{Y}\,d^2z + \mathrm{Z}\,d^2y = o;$$

donc, en appelant λ l'inclinaison de ce plan sur le plan des xy,

$$\cos\lambda = \frac{d^2y}{\sqrt{d^2y^2 + d^2z^2}} \qquad (3).$$

Cela posé, les relations (1), (2), (3) donnent

$$\rho = \mathrm{R}\cos\lambda \qquad (4).$$

Remarques. — (*Décembre* 1865).

I. Si la courbe c est tracée sur une surface quelconque S, on peut remplacer celle-ci par la *développable* Σ, circonscrite à S suivant c. Au moyen de cette modification, le théorème devient beaucoup plus général (*).

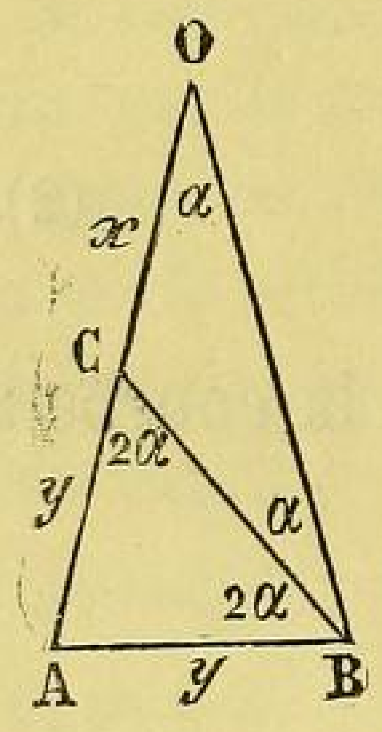
II. L'équation (4) étant mise sous la forme

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\cos\lambda}{\rho},$$

on voit que *la courbure de la transformée* C ne diffère pas de ce que l'on appelle, depuis quelques années, *courbure géodésique d'une courbe* c.

(*) Ce théorème se trouve, *sans citation d'auteur*, dans le *Calcul des Variations* de M. l'abbé Moigno (1861) et dans le *Calcul différentiel* de M. Bertrand (1865).

XVIII. — SUR LE TÉTRADÉCAGONE RÉGULIER (1843).



I. La construction au moyen de laquelle on établit le théorème relatif au côté du décagone régulier s'applique, jusqu'à un certain point, aux polygones réguliers de quatorze côtés, de dix-huit côtés, etc. Considérons, par exemple, le *tétradécagone régulier*. Soit AB le côté de ce polygone, OA étant le rayon du cercle circonscrit. En désignant par α l'angle au centre, et en prenant l'angle droit pour unité, on a $\alpha = \frac{2}{7}$; donc $ABO = BAO = \frac{6}{7} = 3\alpha$. De là résulte que si l'on fait l'angle $OBC = \alpha$, on aura $ACB = ABC = 2\alpha$; en sorte que le triangle ABC est isocèle.

Soient maintenant

$$OC = BC = x, \quad AB = AC = y, \quad AO = BO = 1 :$$

les équations du problème sont

$$1 = 2x\cos\alpha \ (1), \quad x = 2y\cos 2\alpha \ (2), \quad x + y = 1 \quad (3).$$

Par suite,

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \quad (4).$$

II. Cette équation (4) a deux racines positives et une racine négative. *Elle ne change pas quand on y remplace* x *par* $1 - \frac{1}{x}$. Il s'ensuit que si c, b, a sont ces racines, rangées par ordre de grandeur décroissante, elles satisfont aux relations :

$$a = 1 - \frac{1}{b}, \quad b = 1 - \frac{1}{c}, \quad c = 1 - \frac{1}{a}.$$

En même temps, à cause de l'équation (3), les valeurs de y sont indifféremment représentées par

$$1 - a, \quad 1 - b, \quad 1 - c,$$

ou par

$$\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}.$$

III. La racine b, comprise entre o et 1, est celle qui répond au problème. Elle donne, pour le côté y du tétradécagone, environ 0,445. Les deux autres racines de l'équation (4) correspondent aux *tétradécagones réguliers étoilés*, dont les angles au centre sont $\frac{6}{7}$ et $\frac{10}{7}$ d'angle droit. On trouve aisément que les systèmes d'équations relatifs à ces deux polygones sont, pour l'un :

$$x = 2y \cos \alpha, \quad y = 2 \cos 2\alpha, \quad x - y = 1;$$

et, pour l'autre :

$$1 = -2x \cos 2\alpha, \quad y = 2 \cos \alpha, \quad -x + 1 = y.$$

Dans les deux cas, l'élimination de y et de α fait retomber sur l'équation (4).

XIX. — SUR LA TOROÏDE (*).

On appelle *toroïdes* les *parallèles à l'ellipse*, c'est-à-dire les courbes qui ont mêmes normales qu'une ellipse donnée. Cette dénomination est fondée sur ce que *la projection du contour apparent d'un tore, sur un plan quelconque, est une toroïde* (**).

Pour trouver l'équation de cette courbe, il faut éliminer θ entre les équations

$$\frac{a^2x^2}{(\theta + a^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(\theta + b^2)^2} = 1, \quad \frac{\theta^2x^2}{(\theta + a^2)^2} + \frac{\theta^2y^2}{(\theta + b^2)^2} = k^2 \text{ (***)}.$$

(*) Note extraite des *Nouvelles Annales*, tome III, p. 553.

(**) Je crois que cette remarque est due à mon regrettable camarade de l'École de Dessin et de l'Ecole polytechnique, *Fleur Saint-Denis*, si connu par les beaux travaux qu'il a exécutés au pont de Kehl.

(***) CAUCHY, *Comptes-Rendus*, tome XIII, p. 1062.

Cette élimination se fait assez simplement de la manière suivante.

Chassant les dénominateurs, on a d'abord :

$$a^2(\theta+b^2)^2x^2+b^2(\theta+a^2)^2y^2=(\theta+a^2)^2(\theta+b^2)^2 \qquad (1),$$

$$\theta^2(\theta^2+b^2)^2x^2+\theta^2(\theta+a^2)y^2=k^2(\theta+a^2)^2(\theta+b^2)^2 \qquad (2).$$

Multipliant par θ^2, par a^2; retranchant membre à membre, et supprimant le facteur $(\theta+a^2)^2$, j'obtiens

$$(a^2-b^2)\theta^2y^2=(\theta+b^2)^2(a^2k^2-\theta^2) \qquad (3).$$

De même,

$$(a^2-b^2)\theta^2x^2=(\theta+a^2)^2(\theta-b^2k^2) \qquad (4).$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (3), (4), et si l'on supprime le facteur commun (a^2-b^2), on trouve

$$\theta^2(x^2+y^2)=\theta^2(a^2+b^2+2\theta)+k^2(\theta^2-a^2b^2) \qquad (5).$$

Multiplions l'équation (3) par a^2, l'équation (4) par b^2, ajoutons, et supprimons le facteur (a^2-b^2) : il vient

$$\theta(a^2y^2+b^2x^2)=\theta(a^2b^2-\theta^2)+k^2\theta(a^2+b^2)+2a^2b^2k^2 \qquad (6).$$

Les équations (5), (6) peuvent être écrites ainsi :

$$2\theta^3-(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)\theta^2-a^2b^2k^2=0 \qquad (5'),$$

$$\theta^3+(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)\theta-2a^2b^2k^2=0 \qquad (6').$$

J'élimine tour à tour, entre ces deux dernières équations, le terme en θ^3 et le terme indépendant; je trouve ainsi :

$$A\theta^2+2B\theta-3C=0 \quad (7), \qquad 3\theta^2-2A\theta-B=0 \qquad (8);$$

en posant, pour abréger :

$$A=x^2+y^2-a^2-b^2-k^2, \quad B=a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2,$$

$$C=a^2b^2k^2.$$

Les équations (7), (8), traitées comme les deux précédentes, donnent

$$2(A^2+3B)\theta+AB-9C=0 \qquad (9),$$

$$(AB-9C)\theta+2(B^2+3AC)=0 \qquad (10).$$

Enfin, l'élimination de θ, entre ces deux dernières équations, conduit à

$$(AB - 9C)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC).$$

L'équation de la toroïde est donc

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2)^2 \\ + 4a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^3 - 27\, a^4 b^4 k^4 \\ + 18 a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2) \\ + 4(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2)^3 = 0. \qquad (11)\end{aligned}$$

Addition. — (*Juin* 1866).

Si $a = b$, et que l'on fasse $x^2 = y^2 + u^2$, l'équation (11) se réduit à

$$\begin{aligned}(u^2 - 2a^2 - k^2)^2 (u^2 - a^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 (u^2 - 2a^2 - k^2)^3 + 4a^2 (u^2 - 2k^2 - a^2)^3 \\ + 18 a^2 k^2 (u^2 - 2a^2 - k^2)(u^2 - 2k^2 - a^2) - 27 a^4 k^4 = 0. \qquad (12)\end{aligned}$$

Pour simplifier celle-ci, je pose $u^2 - a^2 - k^2 = t^2$: la transformée est

$$\begin{aligned}(t^2 - a^2)^2 (t^2 - k^2)^2 + 4k^2 (t^2 - a^2)^3 + 4a^2 (t^2 - k^2)^3 + 18 a^2 k^2 (t^2 - a^2)(t^2 - k^2) \\ - 27 a^4 k^4 = 0,\end{aligned}$$

ou

$$t^8 + 2(a^2 + k^2)\, t^6 + (a^2 - k^2)^2 t^4 - 8a^2 k^2 (a^2 + k^2)\, t^2 - 4a^2 k^2 (a^2 + k^2)^2 = 0. \qquad (13)$$

Lorsque $a = b$, l'ellipse devient un cercle ; par conséquent, la toroïde doit se réduire au système de deux cercles concentriques avec le premier, et dont les rayons sont $u = a \pm k$: le premier membre de l'équation (13) est donc divisible par $(t^2 + 2ak)(t^2 - 2ak)$. Si l'on fait la division, on trouve, pour quotient, $(t^2 + a^2 + k^2)^2$, c'est-à-dire u^4. Conséquemment, l'équation (12) est vérifiée par $u^2 = 0$; ce qui prouve que l'on a, *identiquement*,

$$[(2a^2 + k^2)(a^2 + 2k^2) + 9a^2 k^2]^2 = 4k^2 (2a^2 + k^2)^3 + 4a^2 (2k^2 + a^2)^3 + 108 a^4 k^4 \,;$$

ou

$$(a^4 + 7a^2k^2 + k^4)^2 = k^2(2a^2 + k^2)^3 + a^2(2k^2 + a^2)^3 + 27a^4k^4\ ; \qquad (14)$$

ou encore, en faisant $a^2 = \alpha^3$, $k^2 = \beta^3$:

$$(\alpha^6 + 7\alpha^3\beta^3 + \beta^6)^2 = (2\alpha^3\beta + \beta^4)^3 + (\alpha^4 + 2\alpha\beta^3)^3 + (3\alpha^2\beta^2)^3 \qquad (15).$$

Cette identité (15) donne une infinité de solutions entières de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^2. \qquad (16).$$

En voici deux :

1° $\alpha = 2, \beta = 1,\ x = 17,\ y = 20,\ z = 12,\ u = 121$;
2° $\alpha = 2, \beta = 5,\ x = 705, y = 516,\ z = 3\,000, u = 22\,689$.

En effet,

$$121^2 = 17^3 + 20^3 + 12^3,$$

et

$$22\,689^2 = 705^3 + 516^3 + 3\,000^3.$$

Remarque. — L'identité (15) ne fait pas connaître toutes les solutions de l'équation (16). Par exemple, on n'en pourrait tirer celle-ci :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2.$$

XX. — SUR LA TOROÏDE.

D'après la définition (p. 55) les trajectoires orthogonales d'une suite de normales à l'ellipse sont des toroïdes.

Une de ces normales étant représentée par

$$y = mx + \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

l'équation différentielle des toroïdes est

$$y = -x\frac{dx}{dy} - \frac{c^2dx}{\sqrt{a^2dy^2 + b^2dx^2}} \qquad (1).$$

D'un autre côté, l'équation générale de ces courbes est

$$
\begin{gathered}
(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2)^2 \\
+ 4a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^3 - 27 a^4 b^4 k^4 \\
+ 18 a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2) \\
+ 4 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2)^3 = 0\ (*) \qquad (2),
\end{gathered}
$$

k représentant la distance arbitraire prise sur la normale, à partir de l'ellipse. Cette équation (2) est donc l'intégrale générale de l'équation (1). Il serait peut-être difficile d'arriver directement à ce résultat.

Addition. — (Juillet 1866.)

Généralement, soit

$$f(\alpha, \beta) = 0 \qquad (1),$$

l'équation d'une courbe donnée C. Si l'on fait

$$-\frac{d\alpha}{d\beta} = m \qquad (2),$$

on pourra mettre sous la forme

$$y = mx + \varphi(m) \qquad (3),$$

l'équation

$$y - \beta = -\frac{d\alpha}{d\beta}(x - \alpha)$$

de la normale D au point (α, β).

Cela posé, l'équation différentielle des courbes qui coupent orthogonalement les droites D; ou, ce qui est équivalent, l'équation différentielle des courbes parallèles à C est

$$y = -x\frac{dx}{dy} + \varphi\left(-\frac{dx}{dy}\right) \qquad (4).$$

Bien que cette équation différentielle puisse échapper à

(*) p. 57.

toutes les classifications connues, il est facile d'en trouver l'intégrale générale.

En effet, cette intégrale est l'enveloppe des cercles représentés par

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2 \tag{5}.$$

Par conséquent, si l'on élimine α, β entre les équations (1), (5) et

$$\frac{x-\alpha}{\frac{df}{d\alpha}}=\frac{y-\beta}{\frac{df}{d\beta}} \tag{6};$$

l'équation résultante,

$$\mathrm{F}(x, y, k)=0 \tag{7},$$

sera cette intégrale générale.

XXI. — SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES (1844).

PROBLÈME. (*) — *Intégrer les deux équations*

$$\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+9y-2x=0 \tag{1},$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}-6x+y=\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \tag{2}.$$

Mettons l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dx}{dt}-2x=2\frac{dy}{dt}-9y \tag{3}.$$

(*) Proposé au concours d'Agrégation des Colléges, en 1844. — La solution suivante a paru dans les *Nouvelles Annales* (tome IV, p. 243).

Regardant le second membre comme une fonction de t, inconnue, nous aurons, par la méthode de la variation des constantes :

$$x = Ae^{2t}, \quad \frac{dA}{dt} = e^{-2t}\left(2\frac{dy}{dt} - 9y\right).$$

La valeur de x donne

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t}\left(2A + \frac{dA}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}\left(4A + 4\frac{dA}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), nous la transformons d'abord en

$$\frac{dy}{dt} + y + e^{2t}\left(\frac{dA}{dt} - \frac{d^2A}{dt^2}\right) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4).$$

Mais

$$\frac{d^2A}{dt^2} = e^{-2t}\left(18y - 13\frac{dy}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\right);$$

d'où

$$\frac{dA}{dt} - \frac{d^2A}{dt^2} = e^{-2t}\left(-27y + 15\frac{dy}{dt} - 2\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

L'équation (4) devient donc

$$-2\frac{d^2y}{dt^2} + 16\frac{dy}{dt} - 26y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (5);$$

et le calcul n'offre plus de difficulté (*).

(*) Ce procédé, applicable à un grand nombre de cas, a quelque analogie avec celui que l'on peut employer dans l'*Analyse indéterminée du premier degré* (*Cours de Mathématiques*, par Auguste Blum, tome 1er, Appendice).

XXII. — SUR LA PARTITION DES NOMBRES (1848) (*).

Soit (n, q) le nombre de manières de former une somme n, avec q nombres entiers positifs, *inégaux*; et soit $[n, q]$ le nombre de manières de former cette même somme par l'addition de q nombres entiers, positifs, *égaux* ou *inégaux*. On peut toujours supposer que les q nombres entiers qui concourent à former la somme n sont rangés par ordre de grandeur *non décroissante*. Par exemple, s'il s'agit de former la somme 37 par l'addition de 3 entiers, on pourra considérer ces groupes :

$$12,\ 12,\ 13;$$

$$5,\ 8,\ 24;$$

mais non ceux-ci :

$$13,\ 12,\ 12;$$

$$24,\ 5,\ 8.$$

Cela posé, on aura les théorèmes suivants (**) :

THÉORÈME I. $(n, q) = (n - q, q - 1) + (n - q, q)$. (1).

Démonstration. — Si l'on considère un groupe quelconque formé de q termes, et que l'on retranche *une* unité de chacun d'eux, on obtient un nouveau groupe dans lequel la somme des termes est seulement $n - q$. D'ailleurs, ce nouveau groupe est formé de $q - 1$ termes ou de q termes, suivant que le premier groupe commençait par 1 ou par un nombre supérieur à 1. La même remarque subsiste pour chacun des groupes proposés; donc, etc.

THÉORÈME II. $[n, q] = [n - 1, q - 1] + [n - q, q]$ (2).

(*) Les démonstrations suivantes, que je retrouve dans une lettre adressée autrefois à M. Terquem, m'avaient été demandées par ce regrettable savant. Elles n'ont jamais été imprimées.

(**) Ils ont, je crois, été démontrés par Euler.

Démonstration. — Partageons nos groupes en deux séries; mettons dans la première ceux qui commencent par 1, et dans la seconde ceux qui commencent par un nombre supérieur à 1. Supprimons le premier terme dans tous les groupes composant la première série, et retranchons 1 de chacun des termes formant les autres groupes. Nous obtiendrons ainsi deux espèces de sommes : les unes égales à $n - 1$, et composées de $q - 1$ termes; les autres égales à $n - q$, et composées de q termes. C'est là ce qu'exprime l'équation (2).

THÉORÈME III. $(n, q) = \left[n - \frac{q(q-1)}{1}, q\right]$ (3).

Démonstration. — Soit un groupe formé de q termes inégaux, dont la somme est n. Retranchons 0 du premier terme, 1 du deuxième, 2 du troisième; et ainsi de suite. Il est évident que nous obtiendrons un nouveau groupe dont un terme quelconque sera *égal* ou *inférieur* à celui qui le suit (*). D'ailleurs, la somme des termes de ce nouveau groupe est $n - (1 + 2 + 3 + \ldots + \overline{q - 1})$, ou $n - \frac{q(q-1)}{2}$. L'équation (3) est ainsi démontrée.

THÉORÈME IV. $[n, q] = \sum_{i=1}^{i=q} [n - q, i]$ (4).

Démonstration. — Prenons un groupe de q termes, *égaux* ou *inégaux*, dont la somme soit n, et dont les $q - i$ premiers soient égaux à 1. Si nous retranchons 1 de chaque terme, nous formerons un nouveau groupe de q termes, de somme $n - q$, et dont les $q - i$ premiers termes seront des zéros ;

(*) Réciproquement : si, à des termes rangés par ordre de grandeur non décroissante, on ajoute, respectivement, 0, 1, 2,... unités, les nouveaux termes ainsi formés seront *inégaux* et *croissants*.

ou, ce qui est équivalent, un groupe composé de i termes, égaux ou inégaux, et de somme $n - q$. Donc, etc.

THÉORÈME V. $$(n, q) = \sum_{i=1}^{i=p-1} (n - iq, q - 1) \quad (5),$$

p étant le quotient entier de $n + 1$ par q.

Démonstration. — Considérons un groupe dont le premier terme soit i, et retranchons i de chacun de ses termes. A cause de $i - i = 0$, nous obtiendrons ainsi un nouveau groupe composé de $q - 1$ termes, et de somme $n - iq$. Et comme $n - iq$ doit être *égal* ou *supérieur* à $q - 1$, on doit supposer i *égal* ou *inférieur* au quotient de $n + 1$ par q, ce quotient étant pris par *défaut.*

Remarque. — Les équations (1), (2), (4), (5) supposent $n \geqq 2q$. Si $n = 2q$, elles se réduisent à:

$$(2q, q) = (q, q - 1)(^*) \quad (1'),$$
$$[2q, q] = [2q - 1, q - 1] + 1 \quad (2'),$$
$$[2q, q] = [q, 1] + [q, 2] + \ldots + [q, q] \quad (4').$$

Applications et vérifications. — Soient $n = 15$, $q = 3$: les relations démontrées ci-dessus deviennent :

$$(15, 3) = (12, 2) + (12, 3),$$
$$[15, 3] = [14, 2] + [12, 3],$$
$$(15, 3) = [12, 3],$$
$$[15, 3] = [12, 1] + [12, 2] + [12, 3],$$
$$(15, 3) = (12, 2) + (9, 2) + (6, 2) + (3, 2).$$

D'un autre côté, le calcul direct donne :

$(15, 3) = 12$, $(12, 2) = 5$, $(12, 3) = 7$, $[15, 3] = 19$, $[14, 2] = 7$, $[12, 3] = 12$, $[12, 1] = 1$, $[12, 2] = 6$, $(9, 2) = 4$, $(6, 2) = 2$, $(3, 2) = 1$;

(*) La quantité (q, q) égale zéro.

donc

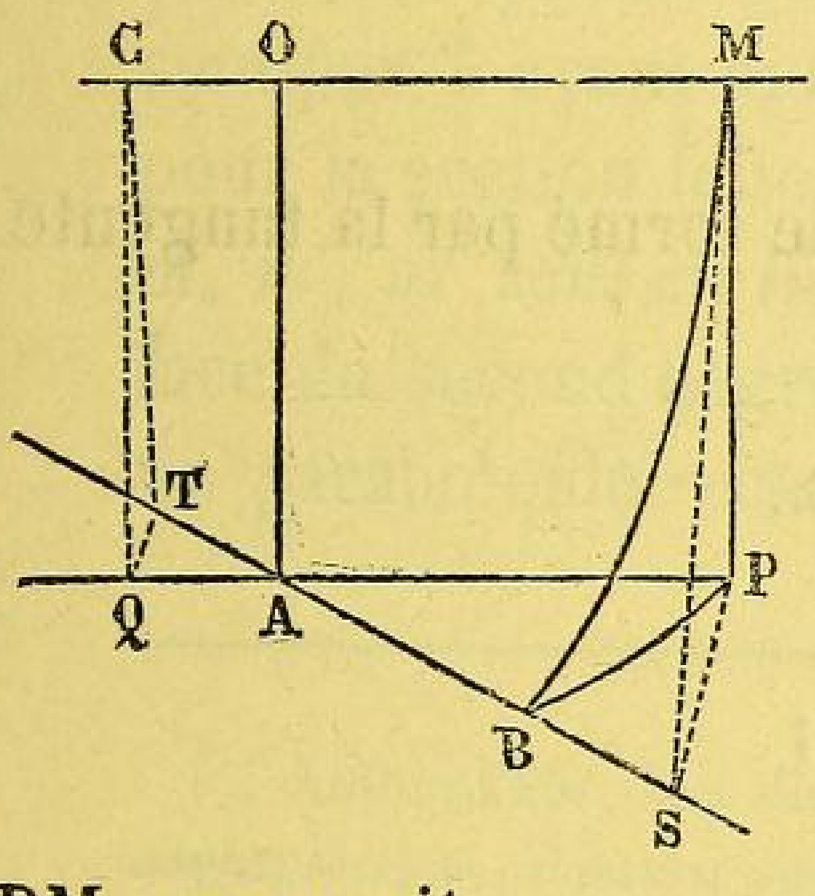
$$12 = 5 + 7,$$
$$19 = 7 + 12,$$
$$12 = 12,$$
$$19 = 1 + 6 + 12,$$
$$12 = 5 + 4 + 2 + 1;$$

ce qui est exact.

XXIII. — SUR L'HÉLIÇOÏDE DE RACCORDEMENT.

I. Soit M un point quelconque de l'hélice BM, tracée sur un cylindre de révolution dont AO est l'axe. Soit C le centre de courbure relatif au point M. On a, par une formule connue,

$$CM = OM\,(1 + tg^2\alpha) \qquad (1),$$



α étant l'angle que fait la tangente MS avec sa projection PS.

Cette relation équivaut à

$$CO = OM\,tg^2\alpha = OM\left(\frac{MP}{PS}\right)^2.$$

Pour une autre hélice B'M', tracée sur l'héliçoïde déterminé par AO et BM, on aurait

$$C'O = OM'\left(\frac{MP}{P'S'}\right)^2;$$

donc

$$\frac{CO}{C'O} = \frac{OM}{OM'}\left(\frac{P'S'}{PS}\right)^2.$$

Mais

$$\frac{P'S'}{PS} = \frac{AP'}{AP} = \frac{OM'}{OM}:$$

l'équation précédente devient donc

$$\frac{CO}{C'O} = \frac{OM'}{OM},$$

ou

$$CO . OM = C'O . OM' = const. \qquad (2).$$

Ainsi, *pour toutes les hélices tracées sur un même héliçoïde à plan directeur, les distances d'un point et du centre de courbure correspondant, à l'axe du cylindre, forment un rectangle constant.*

II. Soit R le rayon du cylindre pour lequel $\alpha = 45°$. Dans ce cas, $C''O = OM'' = R$; donc, en général,

$$CO . OM = R^2 \qquad (3).$$

III. Cette relation est symétrique; donc CM *est le rayon de courbure commun des hélices décrites par les points* C, M.

IV. On a, par l'équation (1),

$$OM = CM \cos^2 \alpha.$$

De même, en désignant par β l'angle formé par la tangente CT avec sa projection QT :

$$OC = CM \cos^2 \beta..$$

Mais

$$OM + OC = CM;$$

donc

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Ainsi, *les angles aigus* S, T *sont complémentaires*; d'où il résulte que *les plans tangents à l'héliçoïde, aux points* M, C, *sont perpendiculaires entre eux* (*).

V. Le lieu des tangentes MS est évidemment un paraboloïde hyperbolique : ces deux surfaces ont, en chacun des points de OM, même plan tangent; c'est-à-dire que, suivant l'ex-

---

(*) Ce résultat est compris dans un théorème de M. Chasles (*Journal de Liouville*, t. II, p. 413).

pression consacrée, *elles se raccordent le long de la génératrice commune*. Conséquemment, *on peut toujours déterminer un héliçoïde de raccordement avec une surface gauche donnée*: *l'axe de l'héliçoïde* est la commune perpendiculaire à la génératrice donnée et à la génératrice infiniment voisine; le *plan directeur* est perpendiculaire à l'axe, etc. (*).

XXIV. — SUR L'HÉLIÇOÏDE A PLAN DIRECTEUR.

THÉORÈME. — *L'héliçoïde à plan directeur est la seule surface gauche à courbure moyenne nulle* (**).

Soient G, G', G'' trois génératrices consécutives de la surface cherchée S. Par un point *m* situé sur la première, faisons passer un plan P, perpendiculaire à cette droite G; et soient *m'*, *m''* les points où il coupe G', G''. La section normale passant par G ayant une courbure nulle, il en doit être de même pour la section faite par le plan P; c'est-à-dire que *les points m, m', m'' sont en ligne droite* (***). Conséquemment, la surface du second degré, *osculatrice de* S *le long de* G (****), est un paraboloïde *rectangulaire*, dont l'un des plans directeurs

---

(*) Aujourd'hui, l'on dirait simplement : *l'axe est la perpendiculaire au plan asymptotique, passant par le point central* (mai 1866).

(**) Dans le *Journal de Liouville* (t. VII, p. 203) le même théorème est démontré par le calcul. A défaut d'autre mérite, cette *première démonstration* a celui de la priorité. Néanmoins, on peut lire, dans le 32e Cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique* (1848, p. 134) : « Meunier a le premier démontré cette proposition remarquable dans son Mémoire sur les surfaces, qui a été inséré au *Recueil des Savants étrangers*. » — Cette assertion si précise atteste un grand *effort d'imagination* : Meunier prouve seulement que, parmi les surfaces engendrées par une droite *horizontale*, l'héliçoïde satisfait seul à la propriété énoncée; ce qui est bien différent.

Pour comprendre le procédé que je relève ici, on doit se rappeler les maximes de Bertrand et de Raton (*La Fontaine*, livre IX, fable XVII) — (mai 1866).

(***) Autrement dit, la surface S est de telle nature, que *toute section plane, perpendiculaire à une génératrice, présente une inflexion au point où elle coupe cette génératrice*. Cette propriété appartient, en effet, à l'héliçoïde (mai 1866).

(****) Leroy, *Géométrie descriptive*, p. 360.

est le plan P, et dont l'autre plan directeur, Q, est perpendiculaire à P. Trois génératrices consécutives quelconques étant parallèles à un même plan, il s'ensuit que *la surface* S *admet un plan directeur*, savoir, le plan Q.

Remarquons maintenant que, parmi les génératrices du paraboloïde osculateur, il en est une qui rencontre orthogonalement G, G′, G″; donc *la surface* S *est un conoïde droit.*

Le reste est évident.

XXV. — SUR UN CAS PARTICULIER DE L'HYPERBOLOÏDE GAUCHE (1849).

On sait que si les faces d'un angle dièdre droit passent respectivement par deux droites AB, CD (*), non situées dans un même plan, l'arête du dièdre engendre un hyperboloïde dont les trois axes satisfont à une équation de condition. Cette surface jouit de quelques propriétés qui n'avaient peut-être pas été remarquées.

I. Si l'on prend pour origine le milieu de la plus courte distance des directrices, AB, CD; pour axe des z, une parallèle à la droite AB; pour axe des x, la plus courte distance; et si l'on désigne par γ l'angle des directrices, ces droites sont représentées par

$$\left.\begin{array}{l} x=-a \\ y=0 \end{array}\right\}(\mathrm{AB}), \qquad \left.\begin{array}{l} x=+a \\ y=z\operatorname{tg}\gamma \end{array}\right\}(\mathrm{CD});$$

et l'équation de l'hyperboloïde est

$$x^2+y^2-yz\operatorname{tg}\gamma=a^2 \qquad (1).$$

II. A l'inspection de cette équation, on voit que l'hyperboloïde peut être engendré par une circonférence dont le plan resterait perpendiculaire à AB, et qui couperait, aux extrémités B, D d'un même diamètre, les deux directrices. Des

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

considérations de Géométrie descriptive conduisent au même résultat.

III. L'équation (1) est vérifiée par $x = \pm a$, $y = 0$; donc *les sections circulaires de l'hyperboloïde rencontrent deux génératrices, perpendiculaires aux plans de ces sections* (*).

Puisqu'il en est ainsi, *les trajectoires orthogonales des sections circulaires se projettent, sur un plan perpendiculaire aux deux génératrices, suivant des circonférences ayant leurs centres situés sur la droite qui joint les pieds des génératrices.* Ces circonférences sont déterminées par l'équation

$$x^2 + y^2 + \lambda x + a^2 = 0 \qquad (2),$$

λ étant un paramètre variable (**).

IV. Si les sections circulaires sont considérées comme des *lignes de niveau* de l'hyperboloïde, les projections des *lignes de plus grande pente* sont donc des circonférences. Ce résultat est d'autant plus remarquable que, dans le cas général, les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un hyperboloïde sont des courbes très-compliquées (***).

V. *Remarque.* — Le diamètre BP du cercle générateur est la normale, en B, à l'hyperboloïde (****). De là résulte que le lieu décrit par ce diamètre est le *paraboloïde normal* suivant AB; etc.

(*) Il s'agit ici d'un des deux systèmes de sections circulaires : le second système jouit d'une propriété semblable.

(**) Voyez, sur ce point, le *Journal de Liouville* (tome XIX, p. 132).

(***) *Journal de Liouville* (tome XII, p. 483).

(****) Il y a un théorème plus général : « Pour obtenir la normale en un point » P de la surface gauche engendrée par l'arête d'un angle dièdre droit, dont les » faces sont normales à une courbe donnée, menez, par le point P, un plan » perpendiculaire à l'arête; construisez les points Q, R où ce plan perpendiculaire » est rencontré par les axes des cercles osculateurs à la courbe donnée, pour les « points où cette courbe est normale aux faces de l'angle dièdre ; avec PQ et QR » comme côtés, construisez un rectangle PQNR : la diagonale de ce rectangle » sera la normale demandée » (*Société Philomathique*, 4 novembre 1848).

XXVI. — PROBLÈME D'ALGÈBRE.

Décomposer un polynôme, égal à la somme de deux carrés, en une autre somme de deux carrés.

I. Si A, B sont des polynômes, et que l'on veuille rendre identique l'équation

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$

il suffit de prendre, soient

$$A' = A\cos\varphi + B\sin\varphi,$$
$$B' = A\sin\varphi - B\cos\varphi;$$

soient

$$A' = A\cos\varphi - B\sin\varphi,$$
$$B' = A\sin\varphi + B\cos\varphi;$$

φ étant un arc quelconque : pour plus de simplicité, on peut le choisir de manière que $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ soient rationnels.

II. De cette remarque, il résulte d'abord que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

étant l'équation d'un hyperboloïde à une nappe, les deux systèmes de génératrices rectilignes peuvent être représentés par

$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi,$	$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\varphi - \sin\varphi,$
$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi - \cos\varphi,$	$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi$ (*).

(*) Cette méthode, que j'ai enseignée il y a bien longtemps, me paraît préférable à celle qui est généralement suivie en France. (Juillet 1866.)

III. De plus, si A, B sont des fonctions de x, y, z, *du premier degré*, l'équation

$$A^2 + B^2 = 0,$$

qui représente en général une ligne droite, peut, de *deux infinités de manières*, être remplacée par

$$A'^2 + B'^2 = 0.$$

Soient, par exemple,

$$A = x + 2y - 3z + 1,$$
$$B = 2x - y + z.$$

Si l'on prend

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin\varphi = \frac{4}{5},$$

on pourra substituer, à l'équation

$$(x + 2y - 3z + 1)^2 + (2x - y + z)^2 = 0,$$

soit

$$(11x + 2y - 5z + 3)^2 + (-2x + 11y - 15z + 4)^2 = 0,$$

soit

$$(-5x + 10y - 13z + 3)^2 + (10x + 5y - 9z + 4)^2 = 0.$$

En effet, ces trois équations deviennent respectivement, étant développées:

$$5x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 14yz - 2zx + 2x + 4y - 6z + 1 = 0,$$
$$125x^2 + 125y^2 + 250z^2 - 350yz - 50zx + 50x + 100y - 150z + 25 = 0,$$
$$125x^2 + 125y^2 + 250z^2 - 350yz - 50zx + 50x + 100y - 150z + 25 = 0;$$

et il est visible que les deux dernières équivalent à la première.

XXVII. — SUR LE PROBLÈME DES PARTIS. (1855.)

Je rappelle l'énoncé de ce problème :

À chaque coup, l'un des deux joueurs A, B *gagne un point. Pour que la partie soit terminée, il manque* a *points au joueur* A, *et il en manque* b *au joueur* B. *Sachant que les probabilités de gagner un point sont* α *pour* A *et* β *pour* B, *on demande quelle est, pour chacun des joueurs, la probabilité de gagner la partie.*

I. En désignant par p la probabilité relative à A, on trouve, par diverses méthodes :

$$p = \alpha^a\left[1 + \frac{a}{1}\beta + \frac{a(a+1)}{1.2}\beta^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(b-1)}\beta^{b-1}\right] \quad (1),$$

$$p = \alpha^{a+b-1} + \frac{a+b-1}{1}\alpha^{a+b-2}\beta + \ldots + \frac{a+b-1}{1}\cdots\frac{a+1}{b-1}\alpha^a\beta^{b-1} \quad (2),$$

$$p = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\alpha^a}{a} - \frac{b-1}{1}\frac{\alpha^{a+1}}{a+1} + \frac{(b-1)(b-2)}{1.2}\frac{\alpha^{a+2}}{a+2} - \ldots \pm \frac{\alpha^{a+b-1}}{a+b-1}\right] \quad (3).$$

De même, la probabilité q relative à B peut être mise sous ces trois formes :

$$q = \beta^b\left[1 + \frac{b}{1}\alpha + \frac{b(b+1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots + \frac{b(b+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ldots(a-1)}\alpha^{a-1}\right] \quad (4),$$

$$q = \beta^{a+b-1} + \frac{a+b-1}{1}\beta^{a+b-2}\alpha + \ldots + \frac{a+b-1}{1}\cdots\frac{b+1}{a-1}\beta^b\alpha^{a-1} \quad (5),$$

$$q = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\beta^b}{b} - \frac{a-1}{1}\frac{\beta^{b+1}}{b+1} + \frac{(a-1)(a-2)}{1.2}\frac{\beta^{b+2}}{b+2} - \ldots \pm \frac{\beta^{a+b-1}}{a+b-1}\right] \quad (6).$$

II. Si l'on fait $\alpha = \frac{x}{x+y}$, $\beta = \frac{y}{x+y}$, et que l'on ajoute les égalités correspondantes, on trouve :

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^{a+b-1}=x^a&\left[(x+y)^{b-1}+\frac{a}{1}y(x+y)^{b-2}+\dots+\frac{a(a+1)\dots(a+b-2)}{1\,.\,2\,\dots\,(b-1)}y^{b-1}\right]\\ +y^b&\left[(x+y)^{a-1}+\frac{b}{1}x(x+y)^{a-2}+\dots+\frac{b(b+1)\dots(a+b-2)}{1\,.\,2\,\dots\,(a-1)}x^{a-1}\right]\end{aligned}\right\}(7),$$

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^{a+b-1}=x^a&\left[x^{b-1}+\frac{a+b-1}{1}x^{b-2}y+\dots+\frac{(a+b-1)\dots(a+1)}{1\,.\,2\,\dots\,(b+1)}y^{b-1}\right]\\ +y^b&\left[y^{a-1}+\frac{a+b-1}{1}xy^{a-2}+\dots+\frac{(a+b-1)\dots(b+1)}{1\,.\,2\,\dots\,(a-1)}x^{a-1}\right]\end{aligned}\right\}(8),$$

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^{a+b-1}=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^a&\left[\frac{1}{a}(x+y)^{b-1}-\frac{b-1}{1}\,\frac{x}{a+1}(x+y)^{b-2}+\dots\pm\frac{x^{b-1}}{a+b-1}\right]\\ +\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}y^b&\left[\frac{1}{b}(x+y)^{a-1}-\frac{a-1}{1}\,\frac{y}{b+1}(x+y)^{a-2}+\dots\pm\frac{y^{a-1}}{a+b-1}\right]\end{aligned}\right\}(9).$$

III. Soit $y=(m-1)\,x$, m étant entier. Les trois dernières relations se réduisent à :

$$\left.\begin{aligned}m^{a+b-1}&=m^{b-1}+\frac{a}{1}(m-1)\,m^{b-2}+\dots+\frac{a(a+1)\dots(a+b-2)}{1\,.\,2\,\dots\,(a-1)}(m-1)^{b-1}\\ &+(m-1)^b\left[m^{a-1}+\frac{b}{1}m^{a-2}+\dots+\frac{b(b+1)\dots(a+b-1)}{1\,.\,2\,\dots\,(b-1)}\right]\end{aligned}\right\}(10),$$

$$\left.\begin{aligned}m^{a+b-1}&=1+\frac{a+b-1}{1}(m-1)+\dots+\frac{(a+b-1)\dots(a+1)}{1\,.\,2\,\dots\,(b-1)}(m-1)^{b-1}\\ &+(m-1)^b\left[(m-1)^{a-1}+\frac{a+b-1}{1}(m-1)^{a-2}+\dots+\frac{(a+b-1)\dots(b+1)}{1\,.\,2\,\dots\,(a-1)}\right]\end{aligned}\right\}(11),$$

$$\left.\begin{aligned}m^{a+b-1}&=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{1}{a}m^{b-1}-\frac{b-1}{1}\,\frac{1}{a+1}m^{b-2}+\dots\pm\frac{1}{a+b-1}\right]\\ &+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(m-1)^b\left[\frac{1}{b}m^{a-1}-\frac{a-1}{1}\,\frac{m-1}{b+1}m^{a-2}+\dots\pm\frac{(m-1)^{a-1}}{a+b-1}\right]\end{aligned}\right\}(12).$$

IV. Les égalités (10), (11) prouvent que les *nombres entiers*

$$m^{a+b-1}-\left[m^{b-1}+\frac{a}{1}(m-1)m^{b-2}+\ldots+\frac{a(a+1)..(a+b-2)}{1.2..(b-1)}(m-1)^{b-1}\right],$$

$$m^{a+b-1}-\left[1+\frac{a+b-1}{1}(m-1)+\ldots+\frac{(a+b-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(b-1)}(m-1)^{b-1}\right]$$

sont divisibles par $(m-1)$: les quotients sont

$$m^{a-1}+\frac{b}{1}m^{a-2}+\ldots+\frac{b(b+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ \ldots\ (a-1)}$$

et

$$(m-1)^{a-1}+\frac{a+b-1}{1}(m-1)^{a-2}+\ldots+\frac{(a+b-1)\ldots(b+1)}{1.2\ \ldots\ldots(a-1)}.$$

Par exemple :

$$\frac{3^7-[3^4+3.2.3^3+6.2^2.3^2+10.2^3.3+15.2^4]}{2^5}=3^2+5.3+15,$$

$$\frac{3^7-[1+7.2+21.2^2+35.2^3+35.2^4]}{2^5}=2^2+7.2+21;$$

ou

$$\frac{2187-939}{32}=39,\quad \frac{2187-939}{32}=39;$$

ce qui est exact.

V. Les parties négatives des deux dividendes se sont trouvées égales entre elles : il en est toujours ainsi. En effet, ces quantités sont des expressions différentes de p, multipliées par un même facteur. On a donc

$$m^{b-1}+\frac{a}{1}(m-1)m^{b-2}+\ldots+\frac{a(a+1)\ldots(a+b-2)}{1.2\ \ldots\ldots\ (b-1)}(m-1)^{b-1}$$

$$=1+\frac{a+b-1}{1}(m-1)+\ldots+\frac{(a+b-1)\ \ldots\ (a+1)}{1.2\ \ldots\ldots\ (b-1)}(m-1)^{b-1}$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{1}{a}m^{b-1}-\frac{b-1}{1}\frac{1}{a+1}m^{b-2}+\ldots\pm\frac{1}{a+b-1}\right].$$

Conséquemment, le dernier nombre est *entier*; ce qui n'était pas évident *a priori*.

XXVIII. — FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES (*).

I. Une fraction continue *périodique* est celle dont les termes se reproduisent dans le même ordre, à partir d'un certain rang. Elle est dite *périodique simple*, lorsque le premier quotient incomplet fait partie de la période. Dans le cas contraire, elle est appelée fraction périodique *mixte*.

Les fractions continues périodiques jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, reposant toutes sur la proposition suivante.

II. *Soit une fraction périodique simple m, n, p, q, m, n, p, q,... : la valeur y de cette fraction sera donnée par l'équation*

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}}.$$

En désignant par y_i et y_{i+1} les résultats que l'on obtient en prenant i périodes et $i+1$ périodes, on a évidemment

$$y_{i+1} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y_i}}}}.$$

La différence entre deux réduites consécutives peut devenir moindre que toute quantité donnée ; il en est de même

(*) Les Notes XXVIII et XXIX sont extraites d'une *Théorie des Fractions continues*, publiée dans les *Nouvelles Annales* (1849). Si je reproduis un sujet aussi élémentaire, c'est uniquement à cause du calcul développé dans le paragraphe 7 (Note XXIX) (septembre 1866).

pour deux réduites distantes d'un nombre *déterminé* de rangs : car cette dernière différence est égale à la somme des différences entre les réduites intermédiaires et consécutives. Donc y_i et y_{i+1} ont la même limite, laquelle est y.

III. On peut calculer, de proche en proche, y_1, y_2, y_3,..., y_i, y_{i+1}, sans passer par les réduites intermédiaires. En effet, représentons par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites répondant aux termes p, q de la première période ; et soit $\frac{R}{R'}$ la réduite qui suit $\frac{Q}{Q'}$, de manière que

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'}.$$

Si, dans cette valeur, nous remplaçons m par y_i, nous obtiendrons y_{i+1} ; donc, en général,

$$y_{i+1} = \frac{Qy_i + P}{Q'y_i + P'}.$$

IV. Soit $\frac{T}{T'}$ la fraction irréductible équivalente à y_i :

$$y_{i+1} = \frac{QT + PT'}{Q'T + P'T'} \qquad (1);$$

et je dis que la fraction contenue dans le second membre est irréductible.

Soient U, U' les deux termes de cette fraction, savoir :

$$U = QT + PT', \quad U' = Q'T + P'T'.$$

Entre ces équations, éliminons successivement T et T' ; nous trouverons

$$UQ' - U'Q = (PQ' - P'Q)\,T', \quad UP' - U'P = -(PQ' - P'Q)\,T.$$

Mais $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ sont deux réduites consécutives : donc

$$PQ' - P'Q = \pm 1;$$

par suite,

$$UQ' - U'Q = \pm T', \quad UP' - U'P = \mp T.$$

Ces équations prouvent que tout facteur commun à U et U' devrait diviser T et T'. Si donc, comme nous l'avons supposé, $\frac{T}{T'}$ est irréductible, $\frac{U}{U'}$ le sera pareillement.

D'ailleurs, la fraction $\frac{Q}{Q'}$, qui donne la valeur de la première période, est une réduite; donc toutes les fractions obtenues par l'application de la formule (1) sont des réduites.

V. Soient, comme précédemment,

$$y_i = \frac{T}{T'}, \quad y_{i+1} = \frac{U}{U'}.$$

D'après une règle connue, si l'on réduit en fraction ordinaire $m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}$, le dénominateur de cette fraction sera la valeur de la fonction TU' — T'U, prise avec son signe ou avec un signe contraire. Or ce dénominateur est celui de y_1, c'est-à-dire Q'; donc

$$TU' - T'U = \pm Q' \text{ (*)}.$$

VI. Plus généralement, *si dans une fraction périodique, simple ou mixte, on considère deux réduites distantes d'autant de rangs que l'indique le nombre des termes de la période; la différence des produits en croix des termes de ces deux réduites sera égale au dénominateur de la fraction continue équivalente à la période, celle-ci étant comptée à partir de la première des deux réduites.*

(*) Dans l'application de cette formule, on doit prendre le signe +, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et si ce nombre est *impair*, on prendra le signe + ou le signe —, selon que *i* sera *pair* ou *impair*.

Ce théorème, aussi bien que le précédent, est une conséquence immédiate de la propriété qui vient d'être appliquée(*).

Soit, comme exemple, la fraction

$$x = 2, 3, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1 \ldots,$$

ou simplement

$$x = 2, 3 (1, 3, 2).$$

Les réduites consécutives sont

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{34}{15}, \frac{77}{34}, \frac{111}{49}, \frac{410}{181}, \frac{931}{411}, \frac{1341}{592}, \frac{4954}{2187} \ldots$$

D'un autre côté, l'on a

$$1, 3, 2 = \frac{9}{7}; \quad 3, 2, 1 = \frac{10}{3}; \quad 2, 1, 3 = \frac{11}{4}.$$

Or,

1° $7.\,34 - 3.\,77 = -(77.\,411 - 34.\,931) = \ldots = +7;$

2° $9.\,49 - 4.111 = -(111.\,592 - 49.1341) = \ldots = -3;$

3° $34.181 - 15.410 = -(410.2187 - 181.4954) = \ldots = +4.$

VII. D'après l'équation $UQ' - U'Q = \pm T'$, nous voyons que, si T' est divisible par Q', U' sera pareillement divisible par ce facteur. Or le dénominateur de y_1 est précisément Q' : *donc les dénominateurs de toutes les réduites* y_2, y_3,... *sont divisibles par le dénominateur de* y_1.

(*) Voir, pour la démonstration, les *Nouvelles Annales*.

XXIX. — RECHERCHE DES VALEURS DES FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES.

THÉORÈME I. *Toute fraction continue périodique est équivalente à l'une des racines d'une équation du second degré, à coefficients rationnels.*

1° Soit d'abord une fraction périodique simple

$$y = (m, n, p, q).$$

Nous aurons (p. 75) :

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}};$$

d'où, en représentant par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites répondant aux termes p, q,

$$y = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}.$$

Ainsi, la valeur y de la fraction continue périodique simple est donnée par l'équation

$$Q'y^2 + (P' - Q)y - P = 0 \qquad (2),$$

laquelle a ses racines *de signes contraires*. Il est d'ailleurs manifeste que la racine positive seule répond à la question.

2° Si la période avait un seul terme m, l'équation qui donne y serait simplement $y = m + \frac{1}{y}$, ou

$$y^2 - my - 1 = 0 \qquad (3).$$

3° Soit maintenant une fraction périodique mixte

$$x = a, b, c, d, e, (m, n, p, q).$$

En représentant encore par y la fraction périodique simple (m, n, p, q), nous aurons

$$x = a, b, c, d, e, y;$$

d'où, en appelant $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ les réduites qui correspondent aux termes d, e,

$$x = \frac{Ey + D}{E'y + D'} \qquad (4).$$

Cette relation donne

$$y = -\frac{D'x - D}{E'x - E};$$

puis, par la substitution dans (4),

$$\left.\begin{array}{l} Q'(D'x - D)^2 - (P' - Q)(D'x - D)(E'x - E) \\ \quad - P(E'x - E)^2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (5).$$

Or cette équation est du second degré, à coefficients rationnels.

4° Si la partie non périodique avait un seul terme a, on aurait $x = a + \frac{1}{y}$; et l'équation (5) serait remplacée par

$$P(x - a)^2 - (P' - Q)(x - a) - Q = 0 \qquad (6).$$

5° Si la partie périodique et la partie non périodique n'ont chacune qu'un seul terme, l'équation (3) donne

$$(x - a)^2 + m(x - a) - 1 = 0 \qquad (7).$$

6° Enfin, si $x = \frac{1}{y}$, d'où $y = \frac{1}{x}$, les équations (2) ou (3) donneront encore des équations du second degré en x.

La proposition énoncée est donc démontrée dans tous les cas. Mais nous pouvons aller plus loin et discuter les équations (2), (3), (4), etc. A cet effet, établissons d'abord le lemme suivant.

II. *Soit* x *une fraction continue, plus grande que l'unité, et soit* x' *la fraction continue inverse. Si* $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ *sont les deux dernières réduites de* x, *celles de* x' *seront* $\frac{E'}{D'}$, $\frac{E}{D}$.

Une fraction continue x' est dite *inverse* d'une fraction continue x, lorsque les termes de la première sont ceux de la seconde, écrits dans un ordre inverse.

Cela posé, soit $x = a, b, c, d, e$; d'où $x' = e, d, c, b, a$. De $E = De + C$, l'on déduit $\frac{E}{D} = e + \frac{1}{\frac{D}{C}}$. Par la même raison, $\frac{D}{C} = d + \frac{1}{\frac{C}{B}}$; et ainsi de suite jusqu'à $\frac{B}{a} = b + \frac{1}{a}$.

Donc $\frac{E}{D} = e, d, c, b, a = x'$. On verrait de même que $\frac{E'}{D'} = e, d, c, b$.

III. Si la fraction continue x est *symétrique*, c'est-à-dire si ses termes sont tels que a, b, c, b, a, alors $x' = x$; donc $\frac{E'}{D'} = \frac{D}{D'}$; ou, simplement, $E' = D$. Ainsi, *dans toute fraction continue symétrique, le dénominateur de la dernière réduite est égal au numérateur de l'avant-dernière.*

IV. *Remarque.* On peut, de bien des manières, parvenir à l'équation qui donne la valeur d'une fraction continue périodique. En effet, on ne changera pas cette valeur si l'on comprend, dans la partie non périodique, plusieurs termes appartenant à la période, ou si l'on prend plusieurs fois celle-ci, au lieu de la prendre une seule fois.

Soit, par exemple, $x = 2, 3, 5\ (1, 4)$.

Si nous posons $y = (1, 4)$, nous aurons

$$x = 2, 3, 5, y, \quad y = 1, 4, y;$$

d'où

$$x = \frac{37y + 7}{16y + 3}, \quad y = \frac{5y + 1}{4y + 1};$$

puis, par l'élimination de y,

$$28x^2 - 134x + 137 = 0.$$

Mais si nous regardons comme appartenant à la partie non périodique, les termes 1, 4, 1 de la période, et si nous posons $y' = (4, 1, 4, 1)$, nous aurons

$$x = 2, 3, 5, 1, 4, 1, y', \quad y' = 4, 1, 4, 1, y';$$

puis

$$x = \frac{257y' + 213}{111y' + 92}, \quad y' = \frac{29y' + 24}{6y' + 5}.$$

L'élimination de y' donne ensuite l'équation trouvée ci-dessus.

V. Revenons maintenant au n° I. En discutant les différents cas qui se peuvent présenter, et en supposant, pour plus de simplicité, que la fraction périodique soit *plus grande que l'unité*, nous obtiendrons les théorèmes suivants :

1° *L'équation* (2), *à laquelle donne lieu une fraction périodique simple, a ses racines de signes contraires. Et si* α *désigne la fraction continue inverse de la fraction proposée, la racine négative de cette équation est* $-\frac{1}{\alpha}$.

D'abord, l'équation (2) a ses racines de signes contraires, puisque son dernier terme est négatif. En second lieu, d'après le n° II, la fraction inverse serait donnée par l'équation

$$y' = \frac{Qy' + Q'}{Py' + P'},$$

ou

$$Py'^2 + (P' - Q)\,y' - Q' = 0.$$

Et il est visible que celle-ci se déduit de l'équation (2) par le changement de y en $-\frac{1}{y'}$.

2° *Si la période a un seul terme, l'équation résultante a ses racines réciproques, et de signes contraires.*

En effet, dans l'équation (3), le produit des racines est égal à — 1.

3° *Plus généralement, si la période est symétrique, l'équation du second degré a encore ses racines réciproques, et de signes contraires.*

D'après le n° II, le dénominateur Q' est égal au numérateur P ; donc l'équation (2) devient

$$y^2 + \frac{P' - Q}{P} y - 1 = 0.$$

4° *L'équation* (5), *à laquelle donne lieu une fraction périodique mixte qui a plusieurs termes non périodiques, a ses racines positives.*

L'équation (5) résulte de l'élimination de y entre les deux relations

$$Q'y^2 + (P' - Q)\,y - P = 0 \qquad (2),$$

$$x = \frac{Ey + D}{E'y + D'} \qquad (4).$$

Il s'agit donc de faire voir que si l'on substitue dans la formule (4), successivement les deux racines de l'équation (2), les résultats obtenus seront positifs. Cela est évident pour la valeur positive de y. Quant à la valeur négative, j'observe d'abord qu'elle est comprise entre $-\frac{P}{Q'} : \frac{P}{P'}$ et $-\frac{P}{Q'} : \frac{Q}{Q'}$, c'est-à-dire entre $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{P}{Q}$. Ces valeurs, mises à la place de y dans le second membre de la formule (4), donnent

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'}, \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P}.$$

Actuellement, nous avons

$$e < \frac{E}{D} < e + 1, \quad q < \frac{Q}{P} < q + 1,$$

$$e < \frac{E'}{D'} < e + 1, \quad q < \frac{Q'}{P'} < q + 1.$$

D'ailleurs e est différent de q, sans quoi e ferait partie de la période. Soit $e < q$; alors

$$\frac{E}{D} < \frac{Q}{P}, \quad \frac{E}{D} < \frac{Q'}{P'}, \quad \frac{E'}{D'} < \frac{Q}{P}, \quad \frac{E'}{D'} < \frac{Q'}{P'}.$$

Ces dernières inégalités prouvent d'abord que si y varie d'une manière continue, entre $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{Q'}{P'}$, la valeur de x varie aussi d'une manière continue.

Ensuite, ces mêmes inégalités donnent

$$\begin{aligned} &DQ' - EP' > 0, \quad DQ - EP > 0, \\ &D'Q' - E'P' > 0, \quad D'Q - E'P > 0; \end{aligned}$$

d'où.

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'} > 0, \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P} > 0.$$

Si nous avions supposé $e > q$, nous serions arrivés au même résultat.

Puis donc qu'en remplaçant, dans la formule (4), y par ses deux limites $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{P}{Q}$, les résultats de la substitution sont positifs, et que d'ailleurs x varie d'une manière continue dans l'intervalle considéré, nous pouvons conclure que la seconde racine de l'équation (2) est positive et comprise entre

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'} \text{ et } \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P}.$$

5° Si la partie non périodique a un seul terme a, nous aurons $x = a + \frac{1}{y}$, et la seconde racine de l'équation (6) sera comprise entre $a - \frac{Q'}{P'}$ et $a - \frac{Q}{P}$. Or, $\frac{Q'}{P'}$ et $\frac{Q}{P}$ sont compris entre q et $q+1$; donc cette seconde racine est comprise entre $a - q$ et $a - q - 1$.

Si a *est moindre que* q, nos deux limites sont négatives ; donc *la seconde racine sera négative et plus grande que l'unité.*

Si a *est plus grand que* q, les deux limites sont positives ; donc *la seconde racine sera positive.*

6° Enfin, dans l'équation (7), la seconde racine est comprise entre $a - m$ et $a - m - 1$: donc *cette seconde racine est négative ou positive, selon que* a *est inférieur ou supérieur à* m.

VI. THÉORÈME. *Toute racine irrationnelle d'une équation du second degré, à coefficients entiers, se développe en fraction continue périodique.*

Ce théorème, réciproque de celui dont nous venons d'examiner les différents cas, est dû à Lagrange.

Soit

$$a_1x^2 - 2b_0x - a_0 = 0 \qquad (8)$$

l'équation proposée, dans laquelle a_0, a_1, b_0 sont entiers. Supposons d'abord que les racines soient de signes contraires, auquel cas a_0 et a_1 sont positifs. La racine *positive* est donnée par la formule

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0a_1}}{a_1}$$

Pour développer cette quantité en fraction continue, représentons par q_1 la partie entière du second membre, laquelle peut être nulle, et posons $x = q_1 + \frac{1}{x'}$: x_1 sera positif et plus grand que 1.

De $\dfrac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1} = q_1 + \dfrac{1}{x_1}$, on tire

$$\frac{1}{x_1} = \frac{b_0 - a_1 q_1 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1},$$

puis

$$x_1 = \frac{a_1}{b_0 - a_1 q_1 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}.$$

Pour faire passer le radical au numérateur, multiplions les deux termes par $\sqrt{b_0^2 + a_0\, a_1} - (b_0 - a_1\, q_1)$; nous obtiendrons

$$x_1 = \frac{a_1(a_1 q_1 - b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1})}{b_0^2 + a_0 a_1 - (b_0 - a_0 q_1)^2} = \frac{a_1 q_1 - b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_0 + 2b_0 q_1 - a_1 q_1^2},$$

en supprimant le facteur commun a_1.

Posons, pour abréger,

$$a_1 q_1 - b_0 = b_1, \quad a_0 + 2b_0 q_1 - a_1 q_1^2 = a_2;$$

nous aurons, identiquement,

$$b_0^2 + a_0 a_1 = b_1^2 + a_1 a_2;$$

et la valeur de x_1 deviendra

$$x_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + a_1 a_2}}{a_2}.$$

Conséquemment, l'inconnue x_1 est racine de l'équation

$$a_2 x_1^2 - 2b_1 x_1 - a_1 = 0 \qquad (a).$$

Maintenant, je dis que cette équation est de même nature que la proposée, c'est-à-dire qu'elle a ses deux racines de signes contraires. En effet, le coefficient a est ce que devient le premier membre de la proposée quand, après en avoir changé tous les signes, on y remplace x par q_1. Or cette dernière quantité étant, par hypothèse, la partie entière de x, est comprise entre les deux racines de l'équation (8); donc, d'après les propriétés des trinômes du second degré,

$$a_1 q_1^2 - 2b_0 q_1 - a_0 < 0,$$

ou, ce qui est la même chose, $a_2 > 0$. Donc, etc.

L'équation (a) ayant ses racines de signes contraires, il est clair, d'après ce qui précède, que l'inconnue x_1 est la racine positive de cette équation, et que, si l'on désigne par q_2 la partie entière de x_1 (au moins égale à 1), on a

$$x_1 = q_2 + \frac{1}{x_2},$$

x_2 étant la racine positive de l'équation

$$a_3 x_2^2 - 2b_2 x_2 - a_2 = 0 \qquad (b),$$

laquelle se déduit de la précédente comme celle-ci a été déduite de la proposée.

Cette équation (b) a encore ses racines de signes contraires ; et ainsi de suite.

Actuellement, la série des égalités

$$b_0^2 + a_0 a_1 = b_1^2 + a_1 a_2 = b_2^2 + a_2 a_3 = \ldots = \mathrm{A},$$

dans lesquelles a_0, a_1, a_2,..., b_0^2, b_1^2, b_2^2,..., sont des *nombres entiers*, prouve que ces nombres ne peuvent croître indéfiniment ; donc, *après un nombre limité* d'opérations, on arrivera à une certaine équation

$$a_{n+1} x_n^2 - 2b_n x_n - a_n = 0,$$

dont les coefficients seront ceux d'une équation déjà obtenue. Conséquemment aussi, *la valeur de x est périodique.*

Considérons à présent le cas où l'équation du second degré a ses racines de même signe. Nous pouvons les supposer positives : car si elles étaient négatives, il nous suffirait de changer, dans la proposée, x en $-x$.

Cela étant, soit

$$a_0 x^2 - 2b_0 x + a_1 = 0 \qquad (9)$$

cette équation, dans laquelle a_0, a_1, b_0 sont *entiers et positifs*.

La plus grande racine est donnée par la formule

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - a_0 a_1}}{a_0} = q_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Si les deux valeurs de x n'ont pas la même partie entière, l'équation en x_1 aura une racine plus grande que 1, et une racine négative : car l'expression $q_1 + \frac{1}{x_1}$ doit donner les deux valeurs de x. Cette transformée en x_1 ayant ses racines de signes contraires, la racine positive se développera en fraction continue périodique ; et il en sera de même pour la plus grande racine de l'équation (9).

Si les deux racines de cette équation ont la même partie entière q_1, la transformée en x_1 aura ses deux racines plus grandes que l'unité positive ; et alors nous pourrons raisonner sur cette équation comme nous avons raisonné sur l'équation (9), c'est-à-dire que, si les deux valeurs de x_2 n'ont pas la même partie entière, la transformée en x_3 aura ses racines de signes contraires, etc.

Remarquons enfin que nous ne pourrons pas trouver indéfiniment des transformées dont les deux racines aient même partie entière : car, s'il en était ainsi, les deux valeurs de x seraient égales et, conséquemment, rationnelles.

Le théorème de Lagrange est donc démontré.

VII. Reprenons le calcul qui donne le développement de la plus grande racine.

Dans le cas de l'équation (8), nous avons trouvé

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1} = q_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Nommons N la racine carrée entière de $A = b_0^2 + a_0 a_1$, et posons

$$b_0 + N = d_1, \qquad d_1 = a_1 q_1 + r_1 ;$$

nous aurons de même

$$b_1 + N = d_2, \qquad d_2 = a_2 q_2 + r_2,$$
$$b_2 + N = d_3, \qquad d_3 = a_3 q_3 + r_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais

$$b_1 = a_1 q_1 - b_0 = b_0 + N - r_1 - b_0 = N - r_1 ;$$

conséquemment

$$d_2 = 2N - r_1,$$
$$d_3 = 2N - r_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

La *loi des dividendes* est donc connue.

D'un autre côté, la relation $a_2 = a_0 + 2\,b_0 q_1 - a_1 q_1^2$ donne

$$a_2 = a_0 + q_1(2b_0 - a_1 q_1) = a_0 + q_1(2b_0 - b_1 - b_0)$$
$$= a_0 + q_1(b_0 - b_1) = a_0 + q_1(d_1 - d_2) = a_0 + q_1(r_2 - r_1).$$

De là le tableau suivant, qui donne la marche du calcul :

$$d_1 = b_0 + N = 2N - r_0,$$
$$d_1 = a_1 q_1 + r_1, \qquad d_2 = 2N - r_1, \qquad a_2 = a_0 + q_1(r_1 - r_0),$$
$$d_2 = a_2 q_2 + r_2, \qquad d_3 = 2N - r_2, \qquad a_3 = a_1 + q_2(r_2 - r_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

S'il s'agit de l'équation (9), il suffit de changer le signe de a_1.

VIII. En appliquant cette méthode à l'équation

$$3x^2 - 8x - 5 = 0,$$

on a

$$a_1 = 3, \quad b_0 = 4, \quad a_0 = 5, \quad A = 31, \quad N = 5;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
 & d_1 = 9, & a_1 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_2 = 10, & a_2 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_3 = 10, & a_3 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_4 = 9, & a_4 = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_5 = 6, & a_5 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_6 = 10, & a_6 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_7 = 10, & a_7 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_8 = 8, & a_8 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_9 = 9, & a_9 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_{10} = 10, & a_{10} = 5 - 3 = 2 \ldots\ldots;
\end{array}$$

donc

$$x' = (3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1).$$

IX. Pour la seconde racine, prise positivement, on aurait

$$a_1 = 3, \quad b_0 = -4, \quad a_0 = 5, \quad A = 31, \quad N = 5;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
 & d_1 = 1, & a_1 = 3, \\
1 = 3.\ 0 + 1, & d_2 = 9, & a_2 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_3 = 6, & a_3 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_4 = 10, & a_4 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_5 = 10, & a_5 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_6 = 6, & a_6 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_7 = 9, & a_7 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_8 = 10, & a_8 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_9 = 10, & a_9 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_{10} = 9, & a_{10} = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, \ldots; & &
\end{array}$$

donc

$$-x'' = 0, (1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3).$$

X. Prenons encore l'équation

$$62x^2 - 400x + 645 = 0,$$

laquelle donne

$$x' = \frac{200 + \sqrt{10}}{62}, \quad x'' = \frac{200 - \sqrt{10}}{62}.$$

Pour la première racine

$$a_1 = 62, \quad a_0 = -645, \quad N = 3, \quad d_1 = 203;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
203 = 62.3 + 17, & d_2 = -11, & a_2 = -645 + 3(203 + 11) = -3, \\
-11 = -3.3 - 2, & d_3 = 8, & a_3 = 62 - 3.19 = 5, \\
8 = 5.1 + 3, & d_4 = 3, & a_4 = -3 + 5 = 2, \\
3 = 2.1 + 1, & d_5 = 5, & a_5 = 5 - 2 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_6 = 4, & a_6 = 2 + 1 = 3, \\
4 = 3.1 + 1, & d_7 = 5, & a_7 = 3 - 1 = 2, \\
5 = 2.2 + 1, & d_8 = 5, & a_8 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_9 = 4, & a_9 = 2 + 1 = 3, \ldots.
\end{array}$$

A cause de $d_9 = d_6$ et de $a_9 = a_6$, la période est en évidence ; et

$$x' = 3, 3, 1, 1, (1, 1, 2).$$

On trouve, semblablement,

$$x'' = 3, 5, (1, 2, 1) = 3, 5, 1, (2, 1, 1).$$

XI. La méthode de calcul qui vient d'être appliquée donne une limite supérieure du nombre des transformées de l'équation proposée. En effet, s'il s'agit de l'équation (8), les dividendes sont positifs et moindres que $2N + 1$. En outre, pour un dividende d, il y a au plus d valeurs du diviseur. Donc le nombre des transformées ne surpasse pas

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2N = N(2N + 1).$$

Dans le cas de l'équation (9), comme les dividendes peuvent être négatifs, on obtiendrait une limite du nombre des transformées en doublant N (2 N + 1) (*).

XII. Nous supposerons maintenant, pour plus de simplicité, que *l'équation donnée a au moins une racine plus grande que l'unité positive* : si le contraire arrivait, il suffirait de changer x en $\frac{1}{x}$ ou en $-\frac{1}{x}$. Cette restriction étant admise, si l'on rapproche le théorème de Lagrange de la discussion faite ci-dessus (V), on arrive aux conséquences suivantes :

1° *Soit une équation du second degré, dont les racines sont de signes contraires,*

Si l'on développe, en fractions continues, la racine positive x' *et la racine négative* — x'' *changée de signe :*

La partie périodique de x' *sera l'inverse de la partie périodique de* x'' ;

Les deux fractions continues sont périodiques simples, excepté quand x'' *surpasse* 1, *auquel cas* x' *a un seul terme non périodique.*

2° *Si l'équation du second degré a ses racines positives, ces deux racines se développent suivant deux fractions périodiques mixtes, dans lesquelles les parties périodiques sont inverses l'une de l'autre.*

Ajoutons, pour que cet énoncé ne puisse pas être en défaut :

1° Qu'une fraction périodique simple, plus petite que l'unité, a nécessairement la forme

$$x'' = 0, (m, n, p, q, \ldots, s, t);$$

2° Que pour avoir, dans x' et dans x'', des périodes inverses l'une de l'autre, il pourra être nécessaire de comprendre, dans les parties non périodiques, plusieurs termes périodiques.

(*) On aurait une limite beaucoup plus basse que N (2 N + 1), si l'on pouvait assigner le nombre des solutions entières et positives de l'équation $z^2 + ut = A$.

Ainsi, dans l'exemple du n° VIII, nous avons trouvé

$$x' = (3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1)$$

et

$$x'' = 0, (1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3).$$

Dans le n° X, les valeurs des deux racines étaient

$$x' = 3, 3, 1, 1, (1, 1, 2), \qquad x'' = 3, 5\,(1, 2, 1),$$

et les périodes n'étaient pas inverses; mais elles le sont devenues quand nous avons eu écrit

$$x'' = 3, 5, 1, (2, 1, 1).$$

XIII. THÉORÈME. *La racine carrée d'un nombre rationnel non carré est exprimée par une fraction périodique mixte ayant un seul terme à sa partie non périodique.*

Soit A le nombre, *plus grand que l'unité*, dont on veut développer la racine carrée en fraction continue. Cette racine est donnée par l'équation $x^2 - A = 0$, et le théorème est compris dans celui qui précède.

Soit $x' = \sqrt{A} = a, (m, n, p, q, r)$, en supposant, pour fixer les idées, que la période ait cinq termes. Représentons par y la fraction périodique simple (m, n, p, q, r), nous aurons, d'après le n° V,

$$-x'' = \sqrt{A} = a - (r, q, p, n, m),$$

ou

$$x'' = -a + (r, q, p, n, m).$$

Mais $x'' = x' = a, (m, n, p, q, r)$; donc

$$-a + r = a, \quad q = m, \quad p = n, \quad n = p, \quad m = q, \quad r = r, \text{ etc.}$$

La relation $-a + r = a$ donne $r = 2a$, c'est-à-dire que, *dans le développement de $\sqrt{A}$, le dernier terme de la période est double du terme non périodique.*

Les autres égalités nous apprennent qu'*en faisant abstraction du dernier terme* $2a$, *la période de* $\sqrt{A}$ *est symétrique.*

Par exemple,

$$\sqrt{24} = 4, (1, 8); \quad \sqrt{73} = 8, (1, 1, 5, 5, 1, 1, 16).$$

XIV. Avant de passer à d'autres propriétés, cherchons le moyen de *transformer une fraction continue, à termes positifs et négatifs, en une autre dont tous les termes soient positifs.*

Soit, à cet effet, la fraction continue $x = a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$,

dans laquelle a, b, c ne sont pas inférieurs à l'unité. Cette fraction est comprise entre $a - 1$ et a; donc on peut écrire $x = a - 1 + \frac{1}{z}$. En identifiant, on trouve

$$z = \frac{b + \cfrac{1}{c}}{b - 1 + \cfrac{1}{c}} = 1 + \cfrac{1}{b - 1 + \cfrac{1}{c}}.$$

Donc

$$a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b - 1 + \cfrac{1}{c}}} \qquad (10).$$

Si $b = 1$, on a simplement

$$a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \frac{1}{1 + c}.$$

XV. Comme application, prenons

$$x = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 - \dots}}}}}}$$

Nous obtiendrons, successivement,

$$x = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 - \ldots}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 - \ldots}}}}}}$$

et enfin

$$x = 0, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 1, \ldots.$$

XVI. Revenons à l'équation (8) :

$$a_0 x^2 - 2b_0 x + a_1 = 0\ ;$$

et supposons qu'ayant réduit l'une des racines en fraction continue, on veuille conclure, de ce développement, celui de la seconde racine.

Soit donc, pour fixer les idées,

$$x' = a, b, c, d, e, (m, n, p, q).$$

Représentons par y' la valeur de la fraction périodique simple (m, n, p, q) ; d'où

$$x' = a, b, c, d, e, y'.$$

Il est clair, d'après le n° I, que pour obtenir la seconde racine x' de l'équation (8), il suffira de remplacer y', dans l'expression de x', par la racine négative de l'équation

$$y = m, n, p, q, y.$$

Or cette racine négative $-\ y''$ a pour développement $-\ [0, (q, p, n, m)]$ (V). Conséquemment, en posant $z = (q, p, n, m)$,

$$x'' = a, b, c, d, e - z.$$

Il y a maintenant, à cause de e différent de q, deux cas à distinguer.

1° $e > q$. Alors la fraction

$$e - z = e - q - \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n \quad \ldots,}}$$

ou, par la formule (10),

$$e - z = e - q - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{p - 1 + \cfrac{1}{n + \ldots,}}}$$

puis

$$x'' = a, b, c, d, e - q - 1, 1, p - 1, (n, m, q, p).$$

2° $e < q$. Dans ce cas,

$$d + \frac{1}{e - z} = d - \cfrac{1}{q - e + \cfrac{1}{p + \ldots}} = d - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - e - 1 \cfrac{1}{p + \ldots,}}}$$

et, conséquemment,

$$x'' = a, b, c, d - 1, 1, q - e - 1, (p, q, n, m).$$

Les mêmes considérations s'étendraient à l'équation (9). On trouvera les formules générales, soit dans le Mémoire de M. Ramus (*Journal de* Crelle, tome XX), soit dans celui de M. Lebesgue (*Journal de* Liouville, tome V).

XVII. *Applications.* Soit l'équation

$$62x^2 - 400x + 645 = 0.$$

Nous avons trouvé ci-dessus, pour la première racine,

$$x' = 3, 3, 1, 1, (1, 1, 2).$$

Le développement de la seconde racine est donc

$$x'' = 3, 3, 0, 1, 0 (1, 1, 2)$$

Pour simplifier ce développement, observons qu'une fraction telle que $a + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}} = a + b + \frac{1}{c}\cdot$ Par conséquent

$$x'' = 3, 3, 0, 2, (1, 2, 1) = 3, 5, (1, 2, 1);$$

ce qui est exact.

Soit encore $x' = 2, 3, 3, 4, 5, (3, 2, 2, 2)$. Nous aurons, d'après la formule ci-dessus,

$$x'' = 2, 3, 3, 4, 2, 1, 1, (2, 3, 2, 2).$$

En effet, si l'on remonte aux valeurs de ces deux fractions continues, on trouve qu'elles sont racines de l'équation

$$490\,137x^2 - 2\,256\,768x + 2\,597\,744 = 0.$$

D'ailleurs, cette équation donne

$$x = \frac{1\,128\,384 \pm \sqrt{528}}{490\,137}.$$

XVIII. Pour terminer, résolvons les équations du second degré auxquelles on est conduit lorsqu'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique.

D'abord, l'équation (2) :

$$Q'y^2 + (P' - Q)\,y - P = 0$$

donne

$$y = \frac{-(P' - Q) \pm \sqrt{(P' - Q)^2 + 4PQ'}}{2Q'}.$$

Mais $PQ' - P'Q = \pm 1$; donc

$$y = \frac{-(P' - Q) \pm \sqrt{(P' + Q)^2 \pm 4}}{2Q'}.$$

Plus généralement, soit l'équation (5) :

$$Q'(D'x - D)^2 - (P' - Q)(D'x - D)(E'x - E) - P(E'x - E)^2 = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} &[Q'D'^2 - (P' - Q)D'E' - PE'^2]\,x^2 \\ &- [2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E)]\,x \\ &+ Q'D^2 - (P' - Q)DE - PE^2 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$x = \frac{2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E) \pm \sqrt{L}}{2[Q'D'^2 - PE'^2 - (P' - Q)D'E']},$$

L désignant la fonction

$$\begin{aligned} &[2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E)]^2 \\ &- 4[Q'D'^2 - PE'^2 - (P' - Q)D'E'][Q'D^2 - PE^2 - (P' - Q)DE]. \end{aligned}$$

En développant cette fonction, et ayant égard aux relations $PQ' - P'Q = \pm 1$, $DE' - D'E = \pm 1$, on trouve qu'elle se réduit à $(P' - Q)^2 \pm 4$.

Il suit de là que si l'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique, le radical contenu dans cette valeur a la forme $\sqrt{u^2 \pm 4}$, laquelle, si u est pair, se réduit à $2\sqrt{u'^2 \pm 1}$. Par suite, d'après le théorème de Lagrange, l'irrationnelle $\sqrt{A}$, dans laquelle A est un nombre entier, ne doit différer de l'irrationnelle $\sqrt{u^2 \pm 4}$, que par un facteur commensurable λ. En d'autres termes, on peut toujours satisfaire à l'équation

$$A\lambda^2 = u^2 \pm 4.$$

Cette remarque est utile dans l'Analyse indéterminée du second degré.

XXX. — ANALYSE INDÉTERMINÉE. — (OCTOBRE 1866.)

PROBLÈME. — *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré* (*).

I. A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

on a

$$x^3+(x+1)^3+\cdots+(x+y-1)^3 = \frac{y}{8}(2x+y-1)[4x^2+4(y-1)x+2y(y-1)];$$

ou, en représentant par s la somme des y cubes, et en posant

$$2x + y - 1 = z \qquad (1):$$

$$16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1) \qquad (2).$$

D'après l'égalité (1), y et z sont de *parités différentes*. Par suite, $2yz$ et $y^2 + z^2 - 1$ sont divisibles par 4. Donc s sera un carré, si le second membre de l'équation (2) est un carré.

Soient

$$2yz = \alpha,\quad y^2 + z^2 - 1 = \beta,\quad y + z = \lambda,\quad z - y = \mu,\ s = t^2 \qquad (3);$$

nous aurons

$$\alpha\beta = t^2,\quad \alpha + \beta + 1 = \lambda^2,\quad \beta - \alpha + 1 = \mu^2 \qquad (4).$$

(*) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi. (*Note sur quelques sommations de cubes.*) Bien que ce savant géomètre y donne les solutions *rationnelles* de l'équation *générale*

$$x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \cdots + (x + nr - r)^3 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions *entières* de l'équation *particulière*

$$x^3 + (x + 1)^3 + \cdots + (x + n - 1)^3 = y^2.$$

Ainsi la question se réduit à *trouver deux multiples de* 4, α, β, *tels, que* $\alpha\beta$, $\alpha+\beta+1$, $\beta-\alpha+1$ *soient des carrés.*

II. L'élimination de β, entre la première et la troisième des équations (4), conduit à

$$64t^2 + (\mu^2 - 1)^2 = (2\alpha + \mu^2 - 1)^2 \qquad (5).$$

Les solutions de cette équation sont données par les deux systèmes de formules :

$$2\alpha + \mu^2 - 1 = u^2 + v^2, \quad \mu^2 - 1 = u^2 - v^2, \quad 4t = uv \qquad (6),$$

$$2\alpha + \mu^2 - 1 = u^2 + v^2, \quad \mu^2 - 1 = 2uv, \quad 8t = u^2 - v^2 \qquad (6');$$

d'où l'on tire, soit

$$\alpha = v^2, \quad \beta = u^2 \qquad (7),$$

soit

$$2\alpha = (u - v)^2, \quad 2\beta = (u + v)^2 \qquad (7').$$

Ainsi α, β, *ou leurs doubles, sont des carrés.*

III. Les équations (7) équivalent à

$$2yz = v^2, \quad y^2 + z^2 - 1 = u^2 \qquad (8).$$

Soit $y = \frac{p}{q} z$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible. On déduit de là

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \qquad (9),$$

γ étant un nombre entier. De plus, y et z étant de *parités différentes*, il en est de même pour p et q; en outre, γ *est impair*. Enfin, à cause de $2yz = v^2$, $2pq$ *est un carré*, ce qui prouve que, *des deux nombres p, q, l'un est un carré, et l'autre, le double d'un carré.*

Au moyen des valeurs (9), la seconde équation (8) devient

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - u^2 = 1 \qquad (10).$$

Dans chaque cas particulier, l'équation (10) fera connaître les valeurs de γ et de u. On aura ensuite

$$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = 2pq\frac{\gamma^2 u^2}{16} \qquad (11).$$

IV. Si l'on répète, sur les formules (7'), des calculs analogues aux précédents, on trouve

$$4yz = (u-v)^2, \quad 2(y^2 + z^2 - 1) = (u+v)^2 = 4u'^2 \qquad (8'),$$

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \qquad (9'),$$

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 2u'^2 = 1 \qquad (10'),$$

$$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = pq\frac{\gamma^2 u'^2}{4} \qquad (11'):$$

cette fois, *p et q sont des carrés, l'un pair, l'autre impair* (*).

V. *Applications*. 1° $p = 8$, $q = 9$. L'équation (10) devient

$$145\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Elle est vérifiée par $\gamma = 1$, $u = 12$; d'où $x = 1$. En laissant de côté cette solution connue, on en trouve une infinité au moyen de la relation

$$u + \gamma\sqrt{145} = (12 + \sqrt{145})^{2n+1}.$$

Par exemple $n = 1$ donne

$$u = 6\,948, \ \gamma = 577;$$

puis

$$y = 4\,616, \quad x = 289, \quad s = (3 \,.\, 577 \,.\, 6\,948)^2.$$

Ainsi

(*) Il ne m'a pas été possible de trouver une solution de l'équation (10'). Pourrait-on démontrer qu'elle n'en admet aucune?

$$289^3 + 290^3 + \cdot \cdot \cdot + 4\,904^3 = (3\,.\,577\,.\,6\,948)^2.$$

2° $p = 2$, $q = 25$. L'équation (10) est

$$629\,\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Les valeurs les plus simples sont

$$\gamma = 313, \quad u = 7\,850\ (*);$$

d'où

$$y = 626, \quad x = 3\,600, \quad s = (5\,.\,313\,.\,3\,925)^2.$$

On a donc

$$3\,600^3 + 3\,600^3 + \cdot \cdot \cdot + 4\,225^3 = (5\,.\,313\,.\,3\,925)^2.$$

3° Si, dans la relation

$$u + \gamma\sqrt{629} = (7\,850 + 313\sqrt{629})^{2n+1},$$

on suppose $n = 1$, on trouve

$$u = 7\,850^3 + 3\,.\,7\,850\,.\,313^2\,.\,629 = 7\,850\,(7\,850^2 + 3\,.\,313^2\,.\,629),$$

$$\gamma = 3\,.\,7850^2\,.\,313 + 313^3\,.\,629 = 313\,(3\,.\,7850^2 + 313^2\,.\,629).$$

Or :

$$7\,850^2 = 61\,622\,500, \quad 313^2 = 97\,969, \quad 3\,.\,313^2\,.\,629 = 184\,867\,503,$$

$$313^2\,.\,629 = 61\,622\,501;$$

donc

$$u = 7\,850\,(61\,622\,500 + 184\,867\,503) = 7\,850\,.\,246\,490\,003$$

$$= 1\,934\,946\,523\,550,$$

---

* La Table X de Legendre (*Théorie des Nombres*, tome I) renferme une faute typographique : au lieu de 1 850, on doit lire 7 850.

$$\gamma = 313\,(184\ 867\ 500 + 61\ 622\ 501) = 313\ .\ 246\ 490\ 001$$

$$= 77\ 151\ 370\ 313.$$

Si ces valeurs sont exactes, on doit avoir

$$629\ .\ 77\ 151\ 370\ 313^2 - 1\ 934\ 946\ 523\ 500^2 = 1.$$

En effet :

$$77\ 151\ 370\ 313^2 = 5\ 952\ 331\ 941\ 173\ 657\ 717\ 969,$$

$$629\ .\ 77\ 151\ 370\ 313^2 = 3\ 744\ 018\ 048\ 998\ 230\ 704\ 602\ 501,$$

$$1\ 934\ 946\ 523\ 500^2 = 3\ 744\ 018\ 048\ 998\ 230\ 704\ 602\ 500;$$

etc.

Des valeurs précédentes de γ et de u, on tire

$$y = 2\gamma = 154\ 302\ 740\ 626, \quad x = \frac{23\gamma + 1}{2} = 887\ 240\ 758\ 600,$$

$$x + y - 1 = 1\ 041\ 543\ 499\ 225,$$

$$s = \left(\frac{u\gamma}{2}\right)^2 = (967\ 473\ 261\ 775\ .\ 77\ 151\ 370\ 313)^2.$$

Ainsi

$$887\ 240\ 758\ 600^3 + 887\ 240\ 758\ 601^3 + \cdot\ \cdot\ \cdot + 1\ 041\ 543\ 499\ 225^3$$

$$= (967\ 473\ 261\ 775\ .\ 77\ 151\ 370\ 313)^2.$$

XXXI. — RECTIFICATION DE LA MÉTHODE DE NEWTON (*) (1850).

I. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la *séparation des racines* a été opérée; en sorte que la racine inconnue a, dont on veut approcher, est comprise entre deux quantités données, α, β, qui ne comprennent aucune autre racine de l'équation $f(x) = 0$. Nous admettrons, en outre, que ces deux limites ne comprennent aucune racine, soit de $f'(x) = 0$, soit de $f''(x) = 0$. Ces diverses hypothèses peuvent être énoncées ainsi :

L'arc AB (**), *dont les extrémités ont pour abscisses* α *et* β, *coupe une seule fois l'axe des* x ; *de plus, il ne contient ni point maximum ou minimum, ni point d'inflexion.*

Cela posé :

1° Appliquons la correction de Newton à celui des deux points donnés pour lequel *la tangente* AT *tombe dans l'intérieur du triangle formé par la courbe* AR, *l'ordonnée* AA' *et l'axe des abscisses : ce point* A *est celui dont l'abscisse* α *rend* f (x) *et* f'' (x) *de même signe.* A cause de OT = OA' + A'T, nous aurons

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad (1).$$

2° Menons la corde AB, qui laisse d'un même côté l'arc ARB, puisque celui-ci est convexe. Le point S, où AB coupe l'axe des abscisses, partage A'B' en deux segments proportionnels à AA', BB'; donc

$$SB' = A'B' \frac{BB'}{AA' + BB'} = (\beta - \alpha) \frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

(*) Note tirée du *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique.*

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

Par suite, si OS est désigné par β_1,

$$\beta_1 = \beta - (\beta - \alpha)\frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)} \qquad (2).$$

Les formules (2), (3) (*) résolvent complètement la question proposée : en effet, le *point-racine* R est compris entre les points T, S, et ceux-ci le sont entre A′ et B′.

II. *Limite de l'erreur commise.* La racine inconnue a étant comprise entre α_1 et β_1, la différence $\beta_1 - \alpha_1$ *est une limite de l'erreur à laquelle donne lieu la méthode de Newton.* Or,

$$\beta_1 - \alpha_1 = (\beta - \alpha)\left[1 - \frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}\right] + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

ou

$$\beta_1 - \alpha_1 = -(\beta - \alpha)\left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}\right] + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Pour simplifier cette expression, observons que

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(\alpha) + (\beta - \alpha)^2 \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2} + (\beta - \alpha)^3 \frac{f'''(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \text{ (**)};$$

donc, en posant

$$\beta - \alpha = \varepsilon, \quad \beta_1 - \alpha_1 = \varepsilon_1, \quad \varphi(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{1 \cdot 2} + \frac{\varepsilon f'''(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

nous aurons

$$\varepsilon_1 = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha) + \varepsilon\varphi(\alpha)};$$

(*) Elles sont connues depuis longtemps; mais je crois qu'il n'en est pas de même pour la relation (C).

(**) Le développement est limité, car $f(x)$ est un polynôme entier.

ou enfin, à cause de $h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon h \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha) + \varepsilon\varphi(\alpha)} \qquad (4).$$

III. La formule (4) permet de résumer, dans les termes suivants, la marche à suivre pour approcher indéfiniment d'une racine a de l'équation $f(x) = 0$, après que cette racine a été séparée :

Connaissant deux quantités α, β entre lesquelles tombe la racine a, *et qui ne comprennent aucune racine, soit de* $f'(x) = 0$, *soit de* $f''(x) = 0$, *on désignera par α celle de ces deux limites qui rend* $f(x)$ *et* $f''(x)$ *de même signe; et, pour avoir une valeur plus approchée α_1, on emploiera les formules*

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (A), \qquad \alpha_1 = \alpha + h \quad (B).$$

*En désignant par ε la différence positive ou négative $\beta - \alpha$, c'est-à-dire l'*APPROXIMATION *de α, et par ε_1 l'approximation de α_1, on aura*

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon h \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha) + \varepsilon\varphi(\alpha)} \quad (C).$$

Cette formule, dans laquelle $\varphi(\alpha)$ représente

$$\frac{f''(\alpha)}{1.2} + \varepsilon\frac{f'''(\alpha)}{1.2.3} + \varepsilon^2\frac{f^{\text{iv}}(\alpha)}{1.2.3.4} + \cdots,$$

indique aussi avec quel degré d'approximation on doit calculer h.

Opérant sur α_1 comme on a opéré sur α, on trouvera une valeur α_2, encore plus approchée de la racine a; *et ainsi de suite.*

IV. *Application.* L'équation de Lagrange :

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

a une racine comprise entre 1,35 et 1,36. D'ailleurs, quand x varie entre ces limites, $f'(x) = 3x^2 - 7$ reste constamment négative, et $f''(x) = 6x$ reste constamment positive : la méthode de Newton est donc applicable. En outre, la première limite, 1,35, rendant $f(x)$ et $f''(x)$ de même signe, nous prendrons $\alpha = 1{,}35$, d'où

$$\varepsilon = 0{,}01,\ f(\alpha) = 0{,}010\,375,\ f'(\alpha) = -\ 1{,}532\,5,\ (\alpha) = 4{,}06.$$

Substituant dans les formules (A) et (C), nous aurons donc

$$h = \frac{0{,}010\,375}{1{,}532\,5} = \frac{1{,}037\,5}{153{,}25},\quad \varepsilon_1 = \frac{1{,}037\,5}{15\,325}\cdot\frac{4{,}06}{1{,}491\,9}.$$

Le premier facteur de ε_1 est à peu près égal à $\frac{1}{15\,000}$, l'autre est moindre que 3; donc $\varepsilon_1 < 0{,}000\,2$. Ce résultat montre qu'il suffit, dans ce premier calcul, de déterminer les *trois* premières décimales de la valeur de h : si l'on en calculait *quatre*, on ne serait pas sûr de la dernière. Effectuant, on trouve $h = 0{,}006$; puis

$$\alpha_1 = 1{,}356,\quad \varepsilon_1 = 0{,}001.$$

Ces valeurs donnent

$$\alpha_1^3 = 1{,}838\,736,\quad \alpha_1^4 = 2{,}493\,326\,016,$$

$$f(\alpha_1) = 0{,}001\,326\,016,\quad f'(\alpha_1) = -\ 1{,}483\,792,\quad \varphi(\alpha_1) = 4{,}069.$$

Par suite,

$$h_1 = \frac{1{,}326\,016}{1\,483{,}792},\quad \varepsilon_2 = \frac{1{,}326\,016}{1{,}483\,792}\,\frac{4{,}069}{1{,}483\,792 - 0{,}004\,069} < 0{,}000\,003.$$

D'après ce nouveau résultat, on doit évaluer h_2 à moins de 0,000 01 : $h_3 = 0{,}000\,89$; puis

$$\alpha_2 = 1{,}356\,89,\quad \varepsilon_2 = 0{,}000\,01.$$

On trouve, de la même manière,

$$h_3 = 0{,}000\,005\,867,\quad \alpha_3 = 1{,}356\,895\,867,\quad \varepsilon_3 = 0{,}000\,000\,001;$$

$$h_4 = 0{,}000\,000\,000\,892\,209\,44,\quad \varepsilon_4 < 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,01;$$

$$\alpha_4 = 1{,}356\,895\,867\,892\,209\,44.$$

Cette valeur de la racine est exacte jusqu'à la dix-septième décimale.

XXXII. — AUTRE MODIFICATION A LA MÉTHODE DE NEWTON (1855).

I. Si, dans l'équation

$$f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(\alpha) + \cdot \cdot \cdot + \frac{h^m}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m} f^m(\alpha) = 0,$$

on conserve les trois premiers termes, on obtient

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} h^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

puis, en appliquant la *méthode des approximations successives* (*),

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{[f(\alpha)]^2 f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^3}.$$

La formule (2) de la page 105 peut donc être remplacée par celle-ci :

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f}{f'} - \frac{f''}{2f'}\left(\frac{f}{f'}\right)^2 \quad \text{(D)},$$

dans laquelle nous avons écrit f, f', f'' au lieu de $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$.

II. Cette nouvelle formule, qui donnera souvent une valeur fort approchée de la racine inconnue a, est susceptible, comme la formule de Newton, d'être interprétée géométriquement. En effet, *si l'on remplace la courbe dont l'ordonnée est* f (x), *par une parabole osculatrice, ayant son axe parallèle à l'axe des* x, *l'abscisse du point d'intersection de ces deux dernières lignes sera précisément* α_1. C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

(*) *Manuel des Candidats*, tome I, p. 25.

III. *Application.* $f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$.

Nous prendrons $\alpha = 1{,}357$. Cette valeur donne

$$f = -0{,}000\,153\,707, \quad f' = -1{,}475\,653, \quad f'' = 8{,}142;$$

puis

$$\alpha_1 = 1{,}357 - \frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653} + \frac{4{,}071}{1{,}475\,653}\left(\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}\right)^2.$$

La fraction $\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}$ est à peu près égale à 0,0001. De même, $\frac{4{,}071}{1{,}475\,653} = 3$, en valeur approchée. Par conséquent, le dernier terme de α_1 diffère peu de 0,000 000 03. Il suffit donc de calculer chacun des deux derniers termes avec neuf décimales exactes. A ce degré d'approximation,

$$\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653} = 0{,}000\,104\,162, \quad \left(\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}\right)^2 = 0{,}000\,000\,011,$$

$$\frac{4{,}071}{1{,}475\,653} \cdot \left(\frac{0{,}000\,153\,707}{1{,}475\,653}\right)^2 = 0{,}000\,000\,030;$$

puis

$$\alpha_1 = 1{,}357 - 0{,}000\,104\,162 + 0{,}000\,000\,030,$$

ou

$$\alpha_1 = 1{,}356\,895\,868.$$

Cette valeur est approchée à moins de 0,000 000 000 11 (*).

(*) Voyez p. 107.

XXXIII. — SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS (1855) (*).

La plupart des Traités d'Algèbre donnent la relation générale

$$(n+1)[(n+1)^p - 1] = \frac{p+1}{1} S_p + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} S_{p-1} + \cdot\cdot\cdot + \frac{p+1}{1} S_1,$$

dans laquelle S_p représente la somme des puissances p des n premiers nombres entiers. Cette relation permet de calculer, assez rapidement, les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4; mais elle devient presque illusoire dès que l'indice p surpasse 4. Il y a dix ans, M. Puiseux, probablement frappé de cet inconvénient, donna, dans le *Journal* de M. Liouville, la valeur de S_p en fonction explicite de n et de p. Malheureusement, la méthode employée par ce savant Géomètre est assez compliquée (**); en outre, les valeurs qu'il trouve pour les coefficients de S_p, très-satisfaisantes en théorie, le seraient fort peu s'il s'agissait de passer aux applications numériques (***).

La méthode suivante, dont le germe se trouve dans le grand ouvrage de Lacroix, sera peut-être, à cause de sa simplicité, capable d'intéresser les Géomètres.

(*) Les quatre Notes suivantes ont paru dans divers recueils. Si je les réimprime (avec quelques modifications), c'est parce qu'elles me semblent pouvoir être regardées comme les prolégomènes d'une théorie des *Nombres de Bernoulli*.

(**) Cette observation, qui n'est pas une critique, s'applique également au Mémoire de M. Pépin, inséré dans les *Nouvelles Annales* (janvier 1856). Du reste, l'auteur, dont je n'ai connu le travail qu'après avoir terminé le mien, dit expressément, en parlant de la formule trouvée par M. Puiseux : « l'expression » générale de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul.

(***) Par exemple, le coefficient 350 serait donné par ce calcul :

$$\frac{4^6 - 3 \cdot 3^6 + 3 \cdot 2^6 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4096 - 2187 + 192 - 1}{6} = \frac{2100}{6} = 350.$$

I. On a, identiquement

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

Eu multipliant les deux membres par

$$n = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on trouve

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + \left.\begin{array}{r} 2 \\ +1 \end{array}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Multipliant les deux membres de cette nouvelle égalité par

$$n = (n-3) + 3 = (n-2)) + 2 = (n-1) + 1,$$

on a encore

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + \left.\begin{array}{r} 3 \\ +3 \end{array}\right| n(n-1)(n-2) + \left.\begin{array}{r} 6 \\ +1 \end{array}\right| n(n-1) + n,$$

ou

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n.$$

La loi des résultats est actuellement évidente; de sorte qu'en désignant par $A_{n,p}$ le nombre des arrangements de n lettres prises p à p, et par B_p, C_p,... I_p, $(p-2)$ coefficients, indépendants de n, on peut écrire :

$$n^p = A_{n,p} + B_p A_{n,p-1} + C_p A_{n,p-2} + \cdot\cdot\cdot + L_p A_{n,2} + n \quad \text{(A)}.$$

II. Pour démontrer, par le raisonnement connu, la généralité de cette relation, et pour trouver la loi des coefficients, supposons

$$n^{p-1} = A_{n,p-1} + B_{p-1} A_{n,p-3} + C_{p-1} A_{n,p-3} + \ldots + K_{p-1} A_{n,2} + n,$$

et multiplions les deux membres de cette égalité par

$$n = (n - p + 1) + (p - 1) = (n - p + 2) + (p - 2) = \cdot \cdot \cdot = (n - 1) + 1;$$

nous aurons

$$n^p = A_{n,p} + \begin{array}{c|} (p-1) \\ + B_{p-1} \end{array} A_{n,p-1} + \begin{array}{c|} (p-2)B_{p-1} \\ + C_{p-1} \end{array} A_{n,p-2} + \cdots + \begin{array}{c|} 2K_{p-1} \\ + 1 \end{array} A_{n,2} + n;$$

et, par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} B_p = B_{p-1} + (p-1), \\ C_p = B_{p-1} + (p-2)\,B_{p-1}, \\ D_p = D_{p-1} + (p-3)\,C_{p-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_p = 1 + 2K_{p-1}. \end{array}\right\} \qquad (B)$$

III. Ainsi que l'a fait remarquer Lacroix (*), le calcul des coefficients B_p, C_p, . . . , L_p est fort simple. En effet, si l'on suppose, successivement

$$p = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

on trouve, par les formules (B) :

p	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	F_p	G_p	H_p	K_p	L_p
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	15	1					
6	1	15	65	90	31	1				
7	1	21	140	350	301	63	1			
8	1	28	266	1 050	1 701	966	127	1		
9	1	36	462	2 646	6 951	7 770	3 025	255	1	
10	1	45	750	5 880	22 827	42 525	34 105	9 330	511	1

(*) Et aussi M. Pepin.

Il résulte, de la formation de ce tableau, que *le* $l^{\text{ième}}$ *terme d'une colonne verticale quelconque est égal au terme écrit au-dessus, augmenté de* l *fois le terme placé à la gauche de celui-ci* (*). Par exemple,

$$1701 = 301 + 4 \,.\, 350.$$

IV. Si l'on écrit ainsi les nombres contenus dans le tableau précédent :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	7	15	31	63	127	225	511	
1	6	25	90	301	966	3 025	9 330		
1	10	65	350	1 701	7 770	34 105			
1	15	140	1 050	6 951	42 525				
1	21	266	2 646	22 827					
1	28	462	5 880						
1	36	750							
1	45								
1									

on voit que les termes de la première ligne horizontale sont tous égaux à l'unité, et que ceux de la deuxième sont égaux aux puissances successives de 2, diminuées de 1. En outre, *un terme quelconque* $N_{r,\,l}$, *occupant le rang* r *dans la* $l^{\text{ième}}$ *ligne horizontale, est égal à* l *fois le terme écrit à gauche,*

(*) Pour plus de régularité, on a représenté par A_p le coefficient de $A_{n,p}$, coefficient égal à l'unité. Le Mémoire de M. Pépin contient également le tableau ci-dessus.

augmenté du terme écrit au-dessus. Il n'est pas bien difficile de conclure de là :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (l-1)\, N_{r,l} = l^{r+l-2} - \frac{l-1}{1}(l-1)^{r+l-2} + \cdots \pm 1 \quad (C).$$

Cette formule générale, beaucoup moins commode que la règle précédente, a été trouvée par M. Puiseux.

V. Revenant à l'équation (A), nous aurons, en changeant n en $n-1$, $n-2$,... 3, 2, 1, et ajoutant :

$$S_p = \frac{1}{p+1} A_{n+1,p+1} + \frac{B_p}{p} A_{n+1,p} + \frac{C_p}{p-1} A_{n+1,p-1} + \cdots + \frac{L_p}{3} A_{n+1,3} + \frac{1}{2} A_{n+1,2} \quad (D),$$

ou

$$\left.\begin{aligned} S_p = {} & \frac{1}{p+1}(n+1)\,n\,(n-1) \cdots (n-p+1) \\ & + \frac{B_p}{p}(n+1)\,n \cdots (n-p+2) \\ & + \frac{C_p}{p-1}(n+1)\,n \cdots (n-p+3) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{L_p}{3}(n+1)\,n\,(n-1) \\ & + \frac{1}{2}(n+1)\,n \end{aligned}\right\} \quad (E).$$

Par exemple,

$$S_6 = \frac{1}{7} 11.10.9.8.7.6.5 + \frac{15}{6} 11.10.9.8.7.6 + \frac{65}{5} 11.10.9.8.7$$

$$+ \frac{90}{4} 11.10.9.8 + \frac{31}{3} 11.10.9 + \frac{1}{2} 11.10$$

$$= 110(2\,160 + 7\,560 + 6\,552 + 1\,620 + 93) + 55 = 1\,978\,405.$$

En effet,

$$1^6+2^6+\cdots+10^6 = 1+64+729+4\,096+15\,625+46\,656$$
$$+117\,649+262\,144+531\,441+1\,000\,000 = 1\,978\,405\ (^*).$$

XXXIV. — SUR LES DIFFÉRENCES DE 1^p, ET SUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI. — (JUILLET 1859.)

I. La formule

$$\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} u_{n-2} + \cdots \pm u_0$$

donne, en supposant $u_0 = 1^p$:

$$\Delta^n(1^p) = (n+1)^p - \frac{n}{1}.\, n^p + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-1)^p - \cdots \mp \frac{n}{1}.\, 2^p \pm 1^p,$$

$$\Delta^{n-1}(1^p) = n^p - \frac{n-1}{1}(n-1)^p + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}(n-2)^p - \cdots \pm \frac{n-1}{1} 2^p \mp 1^p.$$

On conclut, de ces deux équations,

$$(n+1)\Delta^n(1^p) + n\Delta^{n-1}(1^p) = (n+1)^{p+1} - \left[\frac{n+1}{1} - 1\right] n^{p+1}$$
$$+\left[\frac{(n+1)n}{1.\,2.} - \frac{n}{1}\right](n-1)^{p+1} - \cdots \mp [(n+1)n - n(n-1)]2^p \pm [(n+1)-n]1^p$$
$$= (n+1)^{p+1} - \frac{n}{1} n^{p+1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-1)^{p+1} - \cdots \mp \frac{n}{1} 2^{p+1} \pm 1^{p+1}.$$

Donc

$$\Delta^n(1^{p+1}) = (n+1)\Delta^n(1^p) + n\Delta^{n-1}(1^p) \qquad \text{(A).}$$

(*) On peut rapprocher le développement (E) de celui qui résulte d'une remarquable formule due à M. Prouhet (*Cours d'Analyse de Sturm*, t. II, p. 357) (octobre 1866).

II. La relation (A) donne le moyen d'obtenir, de proche en proche, et par un calcul assez simple, les différences successives de 1^2, 1^3, 1^4, 1^5, ...

En effet, si l'on prend les nombres naturels :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.\ 5,\ 6,\ldots .$$

dont les différences premières et secondes sont

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots .$$
$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots .$$

on en conclut que les quantités

$$1^1,\quad \Delta(1^1),\quad \Delta^2(1^1)$$

ont pour valeurs

$$1,\ 1,\ 0.$$

Multipliant ces derniers nombres, respectivement, par

$$1,\ 2,\ 3,$$

ce qui donne

$$1,\ 2,\ 0,$$

on a, par la formule (A)

$$\Delta(1^2) = 1 + 2 = 3,\quad \Delta^2(1^2) = 2 + 0 = 2,\quad \Delta^3(1^2) = 0.$$

Ainsi, la quantité 1^2, et ses différences successives, ont pour valeurs

$$1,\ 3,\ 2,\ 0.$$

En continuant, on forme le tableau suivant (*) :

(*) Ce tableau est tiré, en grande partie, d'une brochure intitulée *Table des quarrés et des cubes, par C. Séguin l'aîné* (1801). L'auteur, après avoir donné, sous forme empirique, la relation (A), indique le développement de

$$S_p = 1^p + 2^p + \cdot\ \cdot\ \cdot + n^p,$$

ordonné suivant les puissances de n. Je dois la connaissance de ce curieux opuscule, très-rare aujourd'hui, au savant M. Terquem.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1^1	1	1							
1^2	1	2							
	1	3	2						
1^3	1	6	6						
	1	7	12	6					
1^4	1	14	36	24					
	1	15	50	60	24				
1^5	1	30	150	240	120				
	1	31	180	390	360	120			
1^6	1	62	540	1 560	1 800	720			
	1	63	602	2 100	3 360	2 520	720		
1^7	1	126	1 806	8 400	16 800	15 120	5 040		
	1	127	1 932	10 206	25 200	3 1920	20 160	5 040	
1^8	4	254	5 796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320	
	1	255	6 050	46 620	166 824	317 520	332 640	181 440	40 320

III. Dans une *Note sur la somme des puissances semblables des nombres naturels*, insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*) j'ai démontré la formule

$$\left.\begin{aligned} S_p = {} & \frac{A_p}{p+1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1) \\ & + \frac{B_p}{p}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+2) \\ & + \frac{C_p}{p-1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+3)+\ldots \\ & + \frac{L_p}{3}(n+1)n(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)n. \end{aligned}\right\}(B)$$

(*) Tome XV, p. 230. — Cette Note est celle qu'on vient de lire (nov. 1866).

Les coefficients A_p, B_p, C_p, ... ont les valeurs contenues dans le tableau suivant :

p	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	F_p	G_p	H_p	K_p	L_p	M_p
1	1										
2	1	1									
3	1	3	1								
4	1	6	7	1							
5	1	10	25	15	1						
6	1	15	65	90	31	1					
7	1	21	140	350	301	63	1				
8	1	28	266	1 050	1 701	966	127	1			
9	1	36	462	2 646	6 951	7 770	3 025	255	1		
10	1	45	750	5 880	22 827	42 525	34 105	9 330	511	1	
11	1	55	1 155	25 980	162 687	179 687	246 430	145 750	28 501	1 023	1

Avec un peu d'attention, on reconnaît que les nombres placés *en diagonale*, dans ce second tableau, sont égaux à ceux qui constituent le tableau précédent, divisés par les produits 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4, ... Autrement dit :

$$3 = \Delta(1^2),\quad 7 = \Delta(1^3),\quad 15 = \Delta(1^4), \ldots .$$

$$6 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^3),\quad 25 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^4),\quad 90 = \frac{1}{2}\Delta^2(1^5), \ldots .$$

$$10 = \frac{1}{2\,.\,3}\Delta^3(1^4),\quad 65 = \frac{1}{2\,.\,3}\Delta^3(1^5),\quad 250 = \frac{1}{2\,.\,3}\Delta^3(1^6), \ldots$$

. . . .

De là résulte que l'on peut écrire ainsi la formule (B) :

$$\left.\begin{aligned} S_p &= \frac{1}{2}(n+1)n + \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)\Delta(1^{p-1}) \\ &+ \frac{1}{4.2}(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta^2(1^{p-1}) + \dots \\ &+ \frac{1}{(p+1).2.3\dots(p-1)}(n+1)n\dots(n-p+1)\Delta^{p-1}(1^{p-1}) \end{aligned}\right\}(C).$$

Cette seconde expression de S_p (trouvée par M. Puiseux) va nous donner les Nombres de Bernoulli sous une forme beaucoup plus commode, pour le calcul effectif, que toutes celles que l'on connaît jusqu'à présent.

En effet, *le* $(p-1)^e$ *Nombre de Bernoulli est égal au coefficient de* n, *dans le développement de* S_p, *ordonné suivant les puissances de* n (*). Donc, d'après l'équation (C) :

$$B_{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \dots \pm \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1});$$

ou, pour plus de régularité dans la notation,

$$B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^q) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^q) - \dots \pm \frac{1}{q+2}\Delta^q(1^q). \qquad \text{(D)}$$

IV. Cette relationg énérale donne successivement, d'après le premier tableau :

$$B_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$B_2 = \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{2}{4} = 0,$$

$$B_3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{3} + \frac{12}{4} - \frac{6}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30},$$

$$B_4 = \frac{1}{2} - \frac{15}{3} + \frac{50}{4} - \frac{60}{5} + \frac{24}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0;$$

etc. (**).

(*) *Lacroix*, tome 3e, p. 84.

(**) On sait que $B_q = 0$, si l'indice q est pair.

V. Le *Tableau des quarrés et des cubes* donne, sous forme empirique, une règle qui équivaut à la formule

$$B_q = 1 - \frac{1}{2}\Delta(1^{q+1}) + \frac{1}{3}\Delta^2(1^{q+1}) - \dots \pm \frac{1}{q+1}\Delta^q(1^{q+1}) \mp \frac{1}{q+2}\Delta^{q+1}(1^{q+1}) \quad \text{(E)},$$

laquelle est un peu moins simple que la nôtre. Pour en vérifier l'accord, il suffit de prouver que

$$1 - \frac{1}{2}[\Delta(1^{q+1}) + 1^q] + \frac{1}{3}[\Delta^2(1^{q+1}) + \Delta(1^q)] - \frac{1}{4}[\Delta^3(1^{q+1}) + \Delta^2(1^q)] + \dots$$

$$\mp \frac{1}{q+2}[\Delta^{q+1}(1^{q+1}) + \Delta^q(1^q)] = 0 \quad \text{(F)}.$$

Or, la relation (A) peut être écrite sous cette forme :

$$\Delta^n(1^{p+1}) + \Delta^{n-1}(1^p) = (n+1)[\Delta^n(1^p) + \Delta^{n-1}(1^p)],$$

puis sous celle-ci :

$$\frac{\Delta^n(1^{p+1}) + \Delta^{n-1}(1^p)}{n+1} = \Delta^{n-1}(2^p);$$

donc l'équation (F) équivaut à

$$1 - (2^q) + \Delta(2^q) - \Delta^2(2^q) + \dots \mp \Delta^q(2^q) = 0.$$

Enfin cette dernière relation est identique, si l'on a égard à la formule presque évidente :

$$u_1 - \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 - \dots \mp \Delta^p u_1 = u_0 \pm \Delta^{p+1}(u_0).$$

XXXV. — SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI, ET SUR QUELQUES FORMULES QUI EN DÉPENDENT. — (MAI 1862).

I. *Développement de* $\frac{x}{e^x - 1}$. — On peut, de bien des manières, prouver que, pour des valeurs réelles ou imaginaires de x dont le module soit suffisamment petit, l'on a

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots \qquad (A),$$

les coefficients A_2, A_4, A_6, ... étant donnés, en fonction des Nombres de Bernoulli, par les formules :

$$A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \; A_4 = \frac{B_4}{1.2.3.4}, \; A_6 = \frac{B_6}{1.2.3.4.5.6}, \ldots \qquad (1).$$

II. *Développement de* x *cot* x. — Si, dans l'équation (A), on change x en $x\sqrt{-1}$, on obtient, comme l'on sait,

$$x \cot x = 1 - 4\,A_2\,x^2 + 4^2\,A_4\,x^4 - 4^3\,A_6\,x^6 + \ldots \qquad (B).$$

III. *Développement de* $\frac{x}{\sin x}$. — On a, identiquement,

$$\cot \frac{1}{2}\,x - \cot x = \frac{1}{\sin x};$$

donc, à cause de la formule (B),

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + 2\,(2-1)\,A_2\,x^2 - 2\,(2^3-1)\,A_4\,x^4 + 2\,(2^5-1)\,A_6\,x^6 - \ldots (C).$$

IV. *Développement de tang* x. — On a aussi

$$\cot x - 2 \cot 2\,x = \tang x;$$

d'où l'on conclut

$$\tan x = 4(4-1)A_2 x - 4^2(4^2-1)A_4 x^3 + 4^3(4^3-1)A_6 x^5 \ldots \text{ (*)(D)}.$$

V. *Développement de* $\frac{1}{\cos x}$. — Parmi les différentes manières d'y parvenir, la plus simple (quant à présent) nous paraît consister à écrire

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{P_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

ou

$$1 = \left(1 + \frac{P_2 x^2}{1.2} + \frac{P_4 x^4}{1.2.3.4} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right).$$

Il résulte, de cette égalité :

$$P_2 - 1 = 0,\quad P_4 - \frac{4.3}{1.2}P_2 + 1 = 0,\quad P_6 - \frac{6.5}{1.2}P_4 + \frac{6.5}{1.2}P_2 - 1 = 0, \cdots;$$

et, en général,

$$P_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2}P_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}P_{2n-4} - \ldots \pm 1 = 0.$$

Conséquemment

$$P_2 = 1,\quad P_4 = 5,\quad P_6 = 61,\quad P_8 = 1\,385, \ldots;$$

puis

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{5}{1.2.3.4}x^4 + \frac{61}{1\ldots.6}x^6 + \frac{1\,385}{1\ldots.8}x^8 + \cdots \quad \text{(E)}.$$

VI. *Développement de tang* $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. — L'identité

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

(*) M. Schlömilch s'est occupé de cette série (*Archives mathématiques de Grunert*, tome XVI).

donne, au moyen des formules (D), (E), en mettant pour les coefficients A leurs valeurs :

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) &= 1+x+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{1.3}x^3+\frac{5}{1.2.3.4}x^4+\frac{4}{1.2.1.3.5}x^5 \\ &+\frac{61}{1.2.3.4.5.6}x^6+\frac{31}{1.2.3.\ 1.3.5.7}x^7+\frac{1\ 385}{1.2\ldots\ 8}x^8 \\ &+\frac{496}{1.2.3.4\ 1.3.5.7.9}x^9+\cdots\end{aligned}\right\}\ (\text{F}).$$

VII. *Développement de l.* tang $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. — De

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos x} = l.\ \text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$

on conclut

$$l.\ \text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = x+\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{5}{1.2.3.4.5}x^5+\frac{61}{1.2\ldots.7}x^7$$

$$+\frac{1385}{1.2\ldots.9}x^9+\ldots \qquad (\text{G}).$$

VIII. *Relation nouvelle entre les Nombres de Bernoulli.* — On a, identiquement,

$$x\cot x.\sin x = x\cos x;$$

donc, à cause de la formule (B) et des équations (1),

$$4^n\frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}+4^{n-1}\frac{1}{1.2.3}\frac{B_{2n-3}}{1.2\ldots(2n-2)}+\cdots$$

$$+4\frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}\frac{B_1}{1.2} = \frac{2n}{1.2.3\ldots(2n+1)},$$

ou

$$4^n \frac{2n+1}{1} B_{2n-1} + 4^{n-1} \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1.2.3} B_{2n-3} + \ldots$$

$$+ 4\,\frac{(2n+1)\,2n}{1.2} B_1 = 2n \qquad (H).$$

Cette relation générale diffère de celles qui sont indiquées dans Lacroix (*).

Si l'on suppose $B_{2n-1} = \frac{B'_{2n-1}}{2^{2n-1}}$, on remplace l'équation (H) par

$$B'_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2.3} B'_{2n-3} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2.3.4.5} B'_{2n-5} + \ldots$$

$$+ \frac{2n}{2} B'_1 = \frac{n}{2n+1} \qquad (H').$$

Celle-ci serait précisément la relation connue, si l'on supprimait les accents, et si l'on écrivait, au lieu du second membre, $\frac{2n-1}{2(2n+1)}$.

IX. *Détermination d'une intégrale définie.* — Dans les *Mémoires de l'Académie de Turin* (1810), M Plana démontre la formule

$$B_{2n-1} = \pm\, 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

(*) Tome III, p. 84 (1819). Celles-ci renferment une faute de signe : au lieu de $\left(+\frac{1}{2}\right)$, on doit lire, partout, $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Il en résulte, à cause de la relation générale dont il vient d'être question,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\left[\frac{2n}{2}t^{2n-1}-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}t^{2n-3}+\ldots\pm\frac{2n}{1}t\right]$$

$$=\pm\frac{2n-1}{4(2n+1)}.$$

La quantité entre parenthèses est égale à

$$\frac{(t+\sqrt{-1})^{2n}-(t-\sqrt{-1})^{2n}}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on suppose $t=\cot\alpha$, on arrive à la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\alpha\, d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^{2n+2}\alpha}=\pm\frac{2n-1}{4(2n+1)} \qquad \text{(L)},$$

dans laquelle on doit prendre le signe $+$ si n est *impair.*

X. *Autres intégrales.* — L'équation (H), traitée de la même manière, donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\alpha\, d\alpha}{(e^{\pi\cot\alpha}-1)\sin^{2n+2}\alpha}=\pm\frac{n}{2n+1} \qquad \text{(M)}.$$

De plus, la comparaison de cette seconde formule et de la précédente conduit à ce résultat remarquable :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2n\alpha\, d\alpha}{(e^{\pi\cot\alpha}-e^{-\pi\cot\alpha})\sin^{2n+2}\alpha}=\pm\frac{1}{4}.$$

XI. Si, dans la formule (L), on suppose $n = 1, 2, 3, \ldots 2p$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^2\alpha} \sum_1^{2p} \frac{\cos 2n\alpha}{\sin^{2n}\alpha} = \frac{1}{4}\sum_1^{p}\left(\frac{4n-3}{4n-1} - \frac{4n-1}{4n+1}\right).$$

La valeur du second membre est

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots - \frac{1}{4p+1}\right),$$

ou

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+\beta^{4p+2}}{1+\beta^2}\, d\beta\,.$$

D'un autre côté, à cause de la formule connue :

$$x\sin a + x^2 \sin 2a + \cdots + x^{2p}\sin 2pa = x\,\frac{\sin a - x^{2p}\sin(2p+1)a + x^{2p+1}\sin 2pa}{1 - 2x\cos a + x^2},$$

on a

$$\sum_1^{2p} \frac{\sin 2n\alpha}{\sin^{2n}\alpha} = \frac{1}{\sin^{4p}\alpha}\,\frac{\sin 2\alpha \sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha\sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(e^{2\pi\cot\alpha}-1)\sin^{4p+2}\alpha}\,\frac{\sin 2\alpha\sin^{4p+2}\alpha - \sin^2\alpha\sin(4p+2)\alpha + \sin 4p\alpha}{1 - 2\cos 2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha} \\ &\qquad = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+\beta^{4p+2}}{1+\beta^2}\, d\beta \end{aligned}\right\} \text{(N)}$$

On peut observer que, si le nombre entier p augmente indéfiniment, le second membre tend vers $\frac{\pi-4}{8}$. Il en est donc de même du premier membre, bien que la fonction contenue sous le signe $\int$ n'ait aucune limite déterminée.

XXXVI. — SUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI. — (JUIN 1864.)

Les relations nombreuses qui existent entre les Nombres de Bernoulli donnent lieu à des calculs pénibles, parce qu'il s'y introduit, nécessairement, des fractions de plus en plus compliquées. Dans la présente Note, j'établis les formules

$$B_1 = \frac{P_1}{2\,.\,3}\quad B_3 = -\frac{P_3}{2\,.\,15},\ldots\quad B_{2n-1} = \pm\frac{P_{2n-1}}{2(4^n-1)},$$

$$P_{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2\,.\,3}P_{2n-3} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}P_{2n-5} - \ldots \pm \frac{2n}{2}P_1 = 1\,;$$

où P_1, P_3 . . . , P_{2n-1} , . . . , sont des *nombres entiers impairs*.

I. En partant du développement de $\frac{x}{e^x-1}$, on trouve (*)

$$\operatorname{tang} x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - \ldots + \ldots \pm 4^n(4^n-1)\frac{B_{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}x^{2n-1} \mp \ldots \quad \text{(A).}$$

Pour développer directement tang x, il suffit de prendre l'équation

$$y \cos x = \sin x,$$

et d'employer ensuite la formule de Mac-Laurin. On obtient ainsi

$$\operatorname{tang} x = y_1 x + y_3 \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + y_{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{1\,.\,2\ldots(2n-1)} + \ldots \quad \text{(B),}$$

(*) P. 122.

$y_1, y_2, y_3, \ldots$, étant des *nombres entiers*, déterminés par la relation

$$\left.\begin{aligned} & y_{2n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)}{1\,.\,2} y_{2n-3} \\ & + \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} y_{2n-5} - \ldots \pm \frac{2n-1}{1} y_1 = \pm 1 \end{aligned}\right\} (C$$

II. La comparaison des formules (A), (B), donne

$$B_{2n-1} = \pm \frac{2n}{4^n(4^n-1)} y_{2n-1} \qquad (D).$$

D'un autre côté, à cause des deux relations :

$$4^n B_{2n-1} + 4^{n-1} \frac{2n(2n-1)}{2\,.\,3} B_{2n-3} + \ldots + 4 \frac{2n}{2} B_1 = \frac{2n}{2n+1},$$

$$B_{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{2\,.\,3} B_{2n-3} + \ldots + \frac{2n}{2} B_1 = \frac{2n-1}{2(2n+1)} \text{(*)},$$

on a

$$(4^n-1) B_{2n-1} + (4^{n-1}-1) \frac{2n(2n-1)}{2\,.\,3} B_{2n-3} + \ldots + (4-1)\frac{2n}{2} B_1 = \frac{1}{2};$$

d'où, en posant

$$B_{2n-1} = \pm \frac{P_{2n-1}}{2(4^n-1)} \qquad (E):$$

$$\left.\begin{aligned} & P_{2n-1} - \frac{2n(2n-1)}{2\,.\,3} P_{2n-3} \\ & + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} P_{2n-5} - \ldots \pm \frac{2n}{2} P_1 = 1 \end{aligned}\right\} (F).$$

(*) P. 124.

III. Si, dans la dernière équation, on suppose $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$,..., on trouve

$$P_1 = 1,\quad P_3 = 1,\quad P_5 = 3,\quad P_7 = 17,\quad P_9 = 155,\quad P_{11} = 2\,073, \ldots;$$

en sorte que les premières valeurs de P_{2n-1} sont entières. Pour démontrer que toutes le sont, je m'appuie sur les remarques suivantes :

1° A cause des formules (D), (E) :

$$y_{2n-1} = \frac{4^{n-1}}{n} P_{2n-1} \qquad (G).$$

Donc, *si* P_{2n-1} *est entier, ce nombre est divisible par tous les diviseurs impairs de* n (*).

2° $\frac{N}{D}$ *étant la fraction irréductible équivalente à*

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} = C\ (^{**}),$$

le dénominateur D *divise* a *et* b; d'où il résulte que C *se réduit à un nombre entier, lorsque* a *et* b *sont premiers entre eux.*

3° Le terme général de l'équation (F) est, abstraction faite du signe,

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+2)\Gamma(2n-2p+1)} P_{2n-2p-1} \qquad (H).$$

Le dénominateur de la fraction irréductible équivalente au coefficient de $P_{2n-2p-1}$ est un diviseur commun à $2p+1$ et $2n-2p$, ou commun à $2p+1$ et $n-p$ (2°); si donc $P_{2n-2p-1}$ est un nombre entier, ce dénominateur divise $P_{2n-2p-1}$ (1°).

4° Conséquemment, si $P_1, P_3, P_5, \ldots, P_{2n-3}$ sont des nombres entiers, P_{2n-1} est un nombre entier.

(*) Autrement dit, si $n = 2^k n'$, n' étant *impair*, P_{2n-1} est divisible par n'.

(**) a et b sont des nombres entiers.

IV. Les nombres entiers

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+2)\,\Gamma(2n-2p+1)}\,P_{2n-2p-1}, \qquad \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2p+1)\,\Gamma(2n-2p+1)}$$

sont tous deux pairs ou tous deux impairs, lorsque $P_{2n-2p-1}$ est impair. *Si donc* P_1, P_3 . . . . . , P_{2n-3} *sont impairs*,

$$P_{2n-1} \equiv \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2}$$

$$+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots+\frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2}+1 \pmod{2};$$

ou, d'après la formule du binôme,

$$P_{2n-1} \equiv 2^{2n-1}-1 \equiv -1 \pmod{2}:$$

P_{2n-1} *est impair*.

V. *Remarque*. — D'après la formule (D), on pourrait calculer les Nombres de Bernoulli au moyen des nombres entiers y_1, y_3, y_5, ...; mais ceux-ci croissent beaucoup plus rapidement que P_1, P_3, P_5...

Addition aux deux dernières Notes. — (*Novembre* 1866.)

I. *Développement de* $tg\,\frac{1}{2}\,x$. — La formule (D) (p. 122) équivaut à

$$\mathrm{tg}\,x = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - 4^2(4^2-1)\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3 + \ldots \pm 4^q(4^q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q-1} \mp \ldots$$

Soit, comme dans la Note XXXVI,

$$B_{2q-1} = \pm\frac{P_{2q-1}}{2(4^q-1)} \qquad (1);$$

la formule devient

$$\operatorname{tg} x = \frac{P_2}{1.2}(2x) + \frac{P_3}{1.2.3.4}(2x)^3 + \dots + \frac{P_{2q-1}}{1.2\dots.2q}(2x)^{2q-1} + \dots;$$

ou, par le changement de x en $\frac{1}{2}x$:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{P_1}{1.2}x + \frac{P_3}{1.2.3.4}x^3 + \dots + \frac{P_{2q-1}}{1.2\dots 2q}x^{2q-1} + \dots \quad \text{(A).}$$

II. *Développement de $tg^2 \frac{1}{2} x$.* — A cause de $P_1 = 1$, on conclut de l'équation (A), en prenant les dérivées des deux membres :

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x = \frac{P_3}{2.4}x^2 + \frac{P_5}{2.3.4.6}x^4 + \dots + \frac{P_{2q-1}}{2.3\dots(2q-2)2q}x^{2q-2} + \dots$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x = \frac{P_3}{4}x^2 + \frac{P_5}{3.4.6}x^4 + \dots + \frac{P_{2q-1}}{3.4\dots(2q-2)2q}x^{2q-2} + \dots \quad \text{(B).}$$

III. *Calcul des nombres* P. — Le calcul de ces nombres, tel qu'il résulte de la relation (F) (p. 128), exige des *additions* et des *soustractions*. Il serait abrégé si, pour déduire un de ces nombres de tous les précédents, on n'avait à faire que des *additions*. Une relation qui conduit à un tel calcul se tire de la comparaison des formules (A), (B). On trouve en effet

$$P_{2q+1} = \frac{q+1}{2}\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_3 P_{2q-3} + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{3.4.5.6}P_5 P_{2q-5} + \dots$$

$$+ \frac{2q(2q-1)}{3.4}P_{2q-3}P_3 + P_{2q-1}\Big] \quad \text{(C).}$$

Remarquons maintenant que le nombre des termes contenus dans la parenthèse est égal à q. Par conséquent, si q est *pair* :

$$P_{2q+1}=(q+1)\left[P_{2q-1}+\frac{2q(2q-1)}{3\,.\,4}P_3P_{2q-3}+\dots+\frac{2q(2q-1)\dots(q+3)}{3\,.\,4\,\dots\,q}P_{q-1}P_{q+1}\right] \text{(D)};$$

et, si q est *impair* :

$$P_{2q+1}=(q+1)\left[P_{2q-1}+\frac{2q(2q-1)}{3\,.\,4}P_3P_{2q-3}+\dots+\frac{2q(2q-1)\dots(q+4)}{3\,.\,4\,\dots\,(q-1)}P_{q-2}P_{q+2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,\frac{2q(2q-1)\dots(q+2)}{3\,.\,4\,\dots\,(q+1)}(P_q)^2\right] \qquad \text{(E)}.$$

En partant de

$$P_1=1,\quad P_3=1,\quad P_5=3,\quad P_7=17,\quad P_9=155,\quad P_{11}=2\,073,$$

on trouve, au moyen des formules (D), (E) :

$$P_{13}=38\,227,\quad P_{15}=929\,569,\quad P_{17}=28\,820\,619,\ (^*)\dots;$$

puis, par la relation (1) :

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_3=-\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{1}{42},\quad B_7=-\frac{1}{30},\quad B_9=\frac{5}{66},\quad B_{11}=-\frac{691}{2\,730},$$

$$B_{13}=\frac{7}{6},\quad B_{15}=-\frac{3\,617}{510},\quad B_{17}=\frac{43\,867}{798},\dots$$

(*) $3=2^2-1$, $17=2^4+1$, $155=5\,(2^5-1)$, $2\,073=691\,(2^2-1)$,
$38\,227=5\,461\,(2^3-1)$, $929\,569=3\,617\,(2^8+1)$,
$28\,820\,613=3\,202\,291\,(2^3+1)$;
ainsi, chacun des nombres considérés admet un diviseur *premier*, de la forme $2^k\pm1$. Cette propriété est-elle générale?

XXXVI. — SUR LA THÉORIE DES NOMBRES (1857).

I. PROBLÈME I. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés*, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi$?

Dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots, n \tag{1},$$

les multiples de α sont

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, \left(\frac{n}{\alpha}\right)\alpha\ (^*) \tag{2}:$$

il y en a $\left(\frac{n}{\alpha}\right)$. Conséquemment, le nombre des termes de la suite (1), non divisibles par α, est

$$N_1 = n - \left(\frac{n}{\alpha}\right) \tag{2}.$$

Supprimons maintenant les multiples de β, *premiers avec* α. D'après la formule (2), appliquée à $\frac{n}{\beta}$, ceux-ci sont au nombre de $\left(\frac{n}{\beta}\right) - \left(\frac{\left(\frac{n}{\alpha}\right)}{\beta}\right)$.

Mais, par un théorème relatif à la division,

$$\left(\frac{\left(\frac{n}{\beta}\right)}{\alpha}\right) = \left(\frac{\frac{n}{\alpha}}{\beta}\right) = \left(\frac{n}{\alpha\beta}\right).$$

Retranchant de N_1 la quantité $\left(\frac{n}{\beta}\right) - \left(\frac{n}{\alpha\beta}\right)$, nous trouvons

---

(*) Pour abréger, je représente généralement par $\left(\frac{a}{b}\right)$ le quotient entier de a par b, ce quotient étant pris *par défaut*. Cette notation équivaut à celle-ci : $E\left(\frac{a}{b}\right)$, adoptée par Legendre.

donc, pour le nombre des termes de la suite (1), premiers avec α et avec β :

$$N_2 = n - \left(\frac{n}{\alpha}\right) - \left(\frac{n}{\beta}\right) + \left(\frac{n}{\alpha\beta}\right) \qquad (3).$$

En continuant, on voit que le nombre demandé est

$$N = n - \Sigma\left(\frac{n}{\alpha}\right) + \Sigma\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right) - \Sigma\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right) + \cdots \pm \left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma\ldots\pi}\right) \qquad (A).$$

Soient, par exemple :

$$n = 60, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 13;$$

on aura

$$N = 60 - (12 + 8 + 4) + 1 = 37.$$

En effet, de 1 à 60, il y a 37 nombres premiers avec 5, 7 et 13, savoir :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 47, 48, 51, 53, 54, 57, 58, 59.

II. REMARQUES. — 1° *Si* α, β, γ, ... π *sont tous les nombres premiers qui ne surpassent pas* n, $N = 1$.

2° *Si* $n = \alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots \pi^p$, N *est le nombre des entiers inférieurs et premiers à* n : on trouve

$$N = \alpha^{a-1} \beta^{b-1} \gamma^{c-1} \ldots \pi^{p-1} (\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)(\pi - 1) \ldots \quad (*).$$

3° *Si* $n = 1 . 2 . 3 \ldots i$, *et que* π *soit le plus grand nombre premier qui ne surpasse pas* i,

---

(*) Cette démonstration d'un théorème connu ne diffère pas de celle que j'ai donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (tome I, p. 466). La *Théorie des Nombres* (tome I, p. 8) en contient une autre, peu satisfaisante.

$$N = n.\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdots\frac{\pi-1}{\pi}\ (*).$$

III. PROBLÈME II. — *De* n + 1 *à* n^2 (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres premiers?*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \pi$ les nombres premiers qui ne surpassent pas n. Les termes de la suite

$$1, 2, 3, 4, \ldots n^2,$$

non divisibles par ces facteurs premiers, sont ceux que l'on cherche (l'unité exceptée). Donc

$$N' = n^2 - 1 - \Sigma\left(\frac{n^2}{\alpha}\right) + \Sigma\left(\frac{n^2}{\alpha\beta}\right) - \Sigma\left(\frac{n^2}{\alpha\beta\gamma}\right) + \cdots \qquad (B)$$

Si, par exemple, $n = 12$:

$$N' = 143 - \left[\left(\frac{144}{2}\right)+\left(\frac{144}{3}\right)+\left(\frac{144}{5}\right)+\left(\frac{144}{7}\right)+\left(\frac{144}{11}\right)\right]$$

$$+\left[\left(\frac{144}{6}\right)+\left(\frac{144}{10}\right)+\left(\frac{144}{14}\right)+\left(\frac{144}{22}\right)+\left(\frac{144}{15}\right)+\left(\frac{144}{21}\right)+\left(\frac{144}{33}\right)+\left(\frac{144}{35}\right)+\left(\frac{144}{55}\right)+\left(\frac{144}{77}\right)\right]$$

$$-\left[\left(\frac{144}{30}\right)+\left(\frac{144}{42}\right)+\left(\frac{144}{66}\right)+\left(\frac{144}{70}\right)+\left(\frac{144}{110}\right)+\left(\frac{144}{105}\right)\right]$$

$$= 143 - (72 + 48 + 28 + 20 + 13)$$
$$+ (24 + 14 + 10 + 6 + 9 + 6 + 4 + 4 + 2 + 1)$$
$$- (4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1);$$

ou enfin

$$N' = 29.$$

(*) La fonction numérique $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{\pi-1}{\pi}$, que nous représenterons par $f(\pi)$, a été calculée, par Legendre, jusqu'à $\pi = 1\,229$. M. Tchébychef a prouvé que la valeur de $f(\pi)$ est, *sensiblement*,

$$\frac{C}{\log.\ \pi},$$

C étant une constante (*Journal de Liouville*, tome 17). On doit observer, à propos de la Table de Legendre, que cet illustre Géomètre ayant fait abstraction du facteur premier 2, les nombres de la Table sont égaux à $2\,f(\pi)$.

En effet, de 13 à 144, il y a 29 nombres premiers; savoir :

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139.

IV. Une question très-difficile, résolue seulement par M. Tchébychef (*), est celle qui consiste à déterminer *combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée.* Si, dans la formule (A), on remplace les *entiers*

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right), \left(\frac{n}{\alpha\beta}\right), \left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right), \ldots$$

par les valeurs *exactes* :

$$\frac{n}{\alpha}, \frac{n}{\alpha\beta}, \frac{n}{\alpha\beta\gamma}, \ldots$$

on a, comme *première approximation*,

$$\mathrm{N} = n\,f(\pi) \qquad (\mathrm{A}').$$

De même,

$$\mathrm{N}' = -1 + n^2 f(\pi) \qquad (\mathrm{B}').$$

V. Pour plus de régularité, représentons par P (n) la quotité des nombres premiers qui ne surpassent pas n. Alors la formule précédente devient, en négligeant le terme (— 1) :

$$\mathrm{P}(n^2) = \mathrm{P}(n) + n^2 f(\pi) \qquad (\mathrm{C}).$$

Cette relation, beaucoup moins approchée que la formule *empirique* de Legendre et que la formule *démontrée* de M. Tchébychef, a cependant quelque utilité, au moins jusqu'à une certaine limite. Si l'on prend les valeurs de P (n) dans une table de nombres premiers, elle conduit aux résultats suivants :

(*) M. Lebesgue, très-compétent sur tout ce qui tient à la Théorie des Nombres, ne paraît pas convaincu de ce point (*Exercices d'Analyse numérique*, p. 124).

n	n^2	P(n)	π	$f(\pi)$	P (n^2)
10	100	5	7	0,228 571	27,8
20	400	9	19	0,171 024	77,4
30	900	11	29	0,157 947	153,1
40	1 600	13	37	0,148 721	250,9
50	2 500	16	47	0,138 704	352,7
60	3 600	18	59	9,133 780	499,6
70	4 900	20	67	0,129 623	655,1
80	6 400	23	79	0,124 651	819,5
90	8 100	25	89	0,121 570	1 009,7
100	10 000	26	97	0,120 317	1 229,1
200	40 000	47	199	0,103 894	4 202,8
300	90 000	63	293	0,097 458	8 834,2
500	250 000	96	499	0,089 610	22 498,5
1000	1 000 000	169	997	0,080 965	81 134

Comme termes de comparaison, nous donnons ici les valeurs de P (n^2) qui résultent des Tables, de la formule de Legendre ou de la formule de M. Tchébychef (*).

(*) La formule de Legendre (Th. des Nombres, tome II, p. 65) est

$$\mathrm{P}(n) = \frac{n}{\log n - 1{,}08366};$$

et la formule de M. Tchébychef :

$$\mathrm{P}(n) = \frac{n}{\log n - 1}.$$

Il est assez curieux que celle-ci soit moins approximative que l'autre.

n^2	Tables	L	T
100	26	28	28
400	79	81	80
900	155	157	155
1 600	252	254	250
2 500	368	371	366
3 600	506	507	500
4 900	655	661	654
6 400	835	833	824
8 100	1 019	1 023	1 000
10 000	1 230	1 230	1 218
40 000	4 204	4 205	4 168
90 000	8 713	8 717	8 647
250 000	22 045	22 035	21 872
1 000 000	78 493	78 543	78 030

VI. PROBLÈME III. — *De* n + 1 *à* n + i (inclusivement), *combien de nombres non divisibles par les nombres premiers* α, β, γ, . . . π?

En nous reportant au Problème I, représentons par N (n) ce que nous avions simplement appelé N ; le nombre demandé sera

$$N'' = N(n+i) - N(n).$$

VII. PROBLÈME IV. — λ *et* μ *étant deux nombres premiers consécutifs, combien y a-t-il de nombres premiers entre* 2 λ *et* 2 μ? (On suppose 2 $\lambda > \mu$) (*).

(*) On sait qu'entre a et $2a - 2$, il y a au moins un nombre premier, a étant plus grand que 3.

De 1 à 2 μ, les termes non divisibles par 2, 3, 5, . . . λ, μ sont premiers ; car tout nombre non premier, compris entre ces limites, admet un facteur compris lui-même entre 2 et μ. Le nombre de ces termes est N (2 μ). Semblablement, entre 1 et 2 λ, il y a N (2 λ) nombres premiers, autres que 2, 3, 5,... λ, μ. La réponse à la question est donc

$$x = \mathrm{N}(2\mu) - \mathrm{N}(2\lambda),$$

les *diviseurs* étant 2, 3, 5, . . . λ, μ.

Soient, par exemple,

$$\lambda = 1\,327, \quad \mu = 1\,361, \quad 2\lambda = 2\,654, \quad 2\mu = 2\,722.$$

De 1 à 2 654, les nombres non divisibles par 2, 3, 5,...1 361 sont :

$$1, \quad 1\,367, \quad 1\,373, \quad 1\,381, \ldots \quad 2\,633, \quad 2\,647;$$

en tout, 166 nombres premiers. Ainsi, N (2 λ) = 166. De même, N (2 μ) = 180. Donc

$$x = 14.$$

En effet, les nombres premiers compris entre 2 654 et 2 722 sont

2 657, 2 659, 2 663, 2 671, 2 677, 2 683, 2 687, 2 689, 2 693, 2 699, 2 707, 2 711, 2 713, 2 719.

Soient encore

$$\lambda = 3\,203, \quad \mu = 3\,209, \quad 2\lambda = 6\,406, \quad 2\mu = 6\,418.$$

On trouve N (2 λ) = 381, N (2 μ) = 381 ; donc $x = 0$. En effet, entre 6 406 et 6 418, il n'y a aucun nombre premier.

VIII. PROBLÈME V. — *Dans une progression par différence donnée, trouver* n *termes consécutifs, respectivement divisibles par* n *nombres* *premiers donnés.* (On suppose que le premier terme et la raison sont des nombres entiers, premiers entre eux).

Soient les n termes inconnus :

$$a + (l + 1)\delta,\quad a + (l + 2)\delta,\quad a + (l + 3)\delta, \ldots\quad a + (l + n)\delta,$$

qui doivent être respectivement divisibles par les n nombres premiers :

$$p_1, \qquad p_2, \qquad p_3, \ldots \qquad p_n.$$

Dans chaque cas particulier, les n équations

$$a + (l + 1)\delta = p_1 x_1,\quad a + (l + 2)\delta = p_2 x_2, \ldots,\quad a + (l + n)\delta = p_n x_n \quad (1)$$

feront connaître la valeur générale du terme $a + (l + 1)\delta$.

IX. REMARQUES. — 1° Les équations (1) exigent que δ soit premier par rapport à tous les diviseurs donnés.

2° On trouve que le premier terme, $a + (l + 1)\delta$, doit avoir la forme

$$\alpha + \mathrm{M}\,\theta,$$

θ étant un entier quelconque, et M désignant le plus petit multiple des nombres premiers donnés (*).

3° Le nombre n est quelconque ; donc, *dans une progression donnée, on peut trouver autant de termes consécutifs qu'on le voudra, qui soient divisibles par des nombres premiers donnés.*

4° Par suite, *la différence entre deux nombres premiers consécutifs peut dépasser toute limite donnée.*

X. APPLICATIONS. — 1° Soient

$$a = 3,\quad \delta = 5,\quad n = 4,\quad p_1 = 2,\quad p_2 = 7,\quad p_3 = 11,\quad p_4 = 19.$$

(*) S'ils sont tous inégaux, $\mathrm{M} = p_1 p_2 \ldots p_n$.

Les équations (1) deviennent

$$3+5(l+1)=2x_1,\quad 3+5(l+2)=7x_2,\quad 3+5(l+3)=11x_3,\quad 3+5(l+4)=19x_4.$$

Si l'on résout celles-ci, on trouve, successivement :

$$l+1=1+2\theta_1,\quad \theta_1=-2+7\theta_2,\quad \theta_2=6+11\theta_3,\quad \theta_3=9+19\theta,$$
$$l+1=1\,467+2.7.11.19\theta,\quad a+(l+1)\delta=7\,338+2.7.11.19\theta.$$

Les termes cherchés sont donc, par exemple,

$$7\,338,\quad 7\,343,\quad 7\,348,\quad 7\,353.$$

En effet, ces quatre nombres sont, respectivement, divisibles par 2, 7, 11 et 19.

2° $a=1$, $\delta=1$, $n=6$, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$, $p_6=13$.

Opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve que les termes cherchés sont égaux aux nombres

$$60\,848,\quad 60\,849,\quad 60\,850,\quad 60\,851,\quad 60\,852,\quad 60\,853$$

augmentés d'un multiple quelconque de 180 180.

3° $a=1$, $\delta=1$, $n=6$, $p_1=13$, $p_2=11$, $p_3=7$, $p_4=5$, $p_5=3$, $p_6=2$.

En supposant la progression prolongée indéfiniment dans les deux sens, les termes cherchés sont, d'après l'exemple précédent :

$$-60\,853+180\,180\,\theta,\quad -60\,852+180\,180\,\theta,\ldots,$$

ou, en remplaçant θ par $\theta+1$:

$$119\,327+180\,180\,\theta,\quad 119\,328+180\,180\,\theta,\quad 119\,329+180\,180\,\theta,\ldots,$$

XI. REMARQUE. — Si le Problème V a été résolu pour le cas de la suite naturelle, il pourra l'être, immédiatement, pour toute autre progression. Soient, en effet, n nombres entiers consécutifs ;

$$N+1,\quad N+2,\ldots,\quad N+n \qquad (2),$$

respectivement divisibles par

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n.$$

Si l'on veut déterminer l de manière que les n termes

$$a + (l+1)\delta, \quad a + (l+2), \ldots \quad a + (l+n)\delta \qquad (3)$$

soient divisibles par les mêmes nombres premiers, pris dans le même ordre, on devra disposer de cette inconnue de manière que

$$a + (l - \mathrm{N})\delta$$

soit divisible par $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Désignant par M le plus petit multiple de ces diviseurs, on aura donc l'équation

$$\delta l - \mathrm{M}x = \mathrm{N}\delta - a \qquad (4),$$

à laquelle on peut toujours satisfaire, puisque δ et M sont premiers entre eux (XI, 1°).

Soient, par exemple, les nombres

$$2\,638, \quad 2\,639, \quad 2\,640, \quad 2\,641,$$

respectivement divisibles par 2, 7, 11, 19. Si l'on prend $a = 3$, $\delta = 5$, l'équation (4) devient

$$5l - 2926\,x = 13\,382.$$

Elle est vérifiée par $x = 2$, $l = 1466$: les nombres cherchés sont donc

$$7\,338, \quad 7\,343, \quad 7\,348, \quad 7\,353\,;$$

comme on l'a vu ci-dessus.

XII. PROBLÈME VI. — *Si la suite* (2) *a le nombre maximum de termes, la suite* (3) *peut-elle en avoir davantage?*

Nous disons que la suite (2) a le nombre *maximum* de termes, lorsque N ni $\mathrm{N} + n + i$ n'est divisible par aucun des nombres premiers p_1, p_2,... p_n. Cela posé, admettons que $a + l\delta$ soit divisible par l'un de ces nombres premiers, p, sans que N le soit. Le facteur p ne divisant pas δ, il ne divisera pas $N\delta$; donc $a + l\delta - N\delta$, ou $a + (l - N)\delta$, ne serait pas divisible par p; et nous venons d'établir le contraire. Ainsi *les suites* (2) et (3), *prolongées autant que possible, ont toujours le même nombre de termes.*

XIII. EXEMPLES. — 1° Les nombres consécutifs

$$62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66$$

étant divisibles par

$$2,\ 7,\ 2,\ 5,\ 3,$$

sans que 61 ou 67 soit divisible par aucun de ces facteurs premiers; prenons $a = 13$, $\delta = 11$. L'équation (3), qui devient

$$11l - 210x = 658,$$

donne

$$l = 98 + 210\,\theta.$$

La suite la plus simple, répondant à $\theta = 0$, est donc

$$1\,102,\ 1\,113,\ 1\,124,\ 1\,135,\ 1\,146.$$

Ces nombres sont divisibles par 2, 7, 2, 5; 3; mais 1 091 et 1 157 n'admettent aucun de ces diviseurs.

2° *Trouver sept nombres impairs consécutifs, respectivement divisibles par*

$$3,\ 5,\ 7,\ 3,\ 11,\ 13,\ 5.$$

Si l'on représente ces nombres par

$$x+3,\ x+5,\ x+7,\ x+9,\ x+11,\ x+13,\ x+15,$$

on devra prendre, pour x, un multiple pair des nombres premiers donnés. Les différentes suites qui satisfont à la question sont donc, à cause de $M = 3 . 5 . 7 . 11 . 13 = 15\,015$:

3,	5,	7,	9,	11,	13,	15;
30 033,	30 035,	30 037,	30 039,	30 041,	30 043,	30 045;
60 063,	60 065,	60 067,	60 969,	60 071,	60 073,	60 075;
90 093,	90 095,	90 097,	90 099,	90 101,	90 103,	90 105;

. . . .

De plus, chacune de ces suites a le nombre maximum de termes.

XIV. La solution précédente, et les exemples à l'appui, supposent que les diviseurs premiers donnés sont toujours pris dans l'ordre où ils l'étaient primitivement. Si cet ordre est arbitraire, la conclusion trouvée ci-dessus (XII) ne subsiste plus. Par exemple, les nombres impairs consécutifs

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

sont divisibles, chacun, par un des nombres premiers

3, 5, 7, 11, 13,

tandis que 1 et 17 ne le sont pas. Mais, si l'on suppose ces facteurs premiers rangés dans l'ordre suivant :

3, 7, 5, 3, 11, 13, 3, 5, 7, 3 (*),

le *nombre maximum des termes*, au lieu d'être 7, devient 10. Les suites cherchées sont alors, à cause de ce changement dans les conditions du problème :

9 441, 9 443, 9 445, 9 447, 9 449, 9 451, 9 453, 9 455, 9 457, 9 459;

309 741, 309 743, 309 745, 309 747, 309 749, 309 751, 309 753, 309 755, 309 757, 309 759;

(*) Cet ordre est admissible, parce que les multiples de 3 doivent revenir de trois en trois; ceux de 5, de cinq en cinq, etc.

610 041, 610 043, 610 045, 610 047, 610 049, 610 051, 610 053, 610 055, 630 057, 610 059;

. . . . (*)

XV. THÉORÈME I (Théorème de Jacobi). — *Toute progression par différence, dans laquelle le premier terme et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de termes non divisibles par un nombre premier donné.*

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants, qu'il suffit d'énoncer :

1° Le premier terme a et la raison δ étant premiers entre eux, deux termes consécutifs quelconques sont premiers entre eux ;

2° Sur deux termes consécutifs, il y en a au moins un non divisible par le nombre premier p.

XVI. REMARQUES. — 1° *Si* p *divise* δ, *aucun terme n'est divisible par* δ.

2° Si p divise a, les termes divisibles par p sont

$$a,\quad a+p\delta,\quad a+2p\delta,\quad a+3p\delta,\ldots$$

3° Si p ne divise ni a ni δ, un seul des p premiers termes est divisible par p. Soit $a+i\delta$ ce terme. Alors tous les termes divisibles par p sont compris dans la formule

$$x=a+(i+p\theta)\,\delta,$$

θ étant un entier quelconque.

XVII. LEMME. — *Soit une progression*

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\quad a+3\delta,\ldots$$

dans laquelle a *est premier avec* δ *et moindre que* δ. *Si l'on prend,*

(*) Ces exemples sont tirés d'un remarquable Mémoire de M. Desboves (*Nouvelles Annales*, tome XIV).

dans cette progression, les termes divisibles par un nombre premier p, *les quotients forment une seconde progression*

$$a',\quad a'+\delta,\quad a'+2\delta,\quad a'+3\delta,\ldots$$

dans laquelle a' *est premier avec* δ *et moindre que* δ.

D'après la dernière remarque,

$$a' = \frac{a+i\delta}{p},$$

i étant inférieur à p; donc

$$a' \overset{=}{<} \frac{a+(p-1)\delta}{p};$$

et, à plus forte raison,

$$a' < \delta.$$

D'un autre côté, si a' et δ avaient un facteur commun, ce facteur diviserait a; etc.

XVIII. THÉORÈME II. — *Si, en partant d'une progression*

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\ldots$$

on forme, comme il vient d'être dit, la progression

$$a',\quad a'+\delta,\quad a'+2\delta,\ldots$$

puis, qu'au moyen de celle-ci, on passe à une troisième progression

$$a'',\quad a''+\delta,\quad a''+2\delta,\ldots$$

et ainsi de suite, on finira par retomber sur la progression primitive. De plus, le nombre des progressions différentes divise le nombre des entiers inférieurs et premiers à δ.

1° On vient de voir que les termes initiaux a', a'', a''',... sont, comme a, inférieurs et premiers à δ; donc ils se reproduisent périodiquement, *en tout ou en partie*. Soit $a^{(m)} = a^{(n)}$. A cause de

$$a^{(m)} = \frac{a^{(m-1)} + i^{(m-1)}\delta}{p}, \quad a^{(n)} = \frac{a^{(n-1)} + i^{(n-1)}\delta}{p},$$

on a

$$a^{(m-1)} - a^{(n-1)} + \left(i^{(m-1)} - i^{(n-1)}\right)\delta = 0,$$

équation absurde, à moins que

$$a^{(m-1)} = a^{(n-1)}.$$

Ainsi, *quand deux quotients* $a^{(m)}$, $a^{(n)}$ *sont égaux, les quotients* $a^{(m-1)}$, $a^{(n-1)}$, *qui les précèdent respectivement, sont égaux* : a fait donc partie de la période des quotients.

2° Soient

$$pa' = a + i\delta, \quad pa'' = a' + i'\delta, \ldots \quad pa = a^{(n-1)} + i^{(n-1)}\delta \qquad (1),$$

n étant le nombre des termes de la période. On conclut, de ces égalités,

$$\frac{a}{\delta} = \frac{p^{n-1}i^{(n-1)} + \cdots + pi' + i}{p^n - 1}.$$

Si donc, dans le système de numération dont la base est p, on réduisait en DÉCIMALES (*) la fraction $\frac{a}{\delta}$, on trouverait

$$\frac{a}{\delta} = 0,\ i^{(n-1)}\, i^{(n-2)} \ldots i'\, i\, i^{(n-1)}\, i^{(n-2)} \ldots.$$

Or, on sait que le nombre n des termes de la période déci-

(*) C'est-à-dire en fractions de la forme $\frac{1}{p^k}$.

male est un diviseur de $\varphi(\delta)$, $\varphi(\delta)$ désignant le nombre des entiers inférieurs et premiers à δ (*).

XIX. REMARQUES. — 1° A cause des égalités (1),

$$a^{(n-1)},\quad a^{(n-2)},\dots, a'',\quad a'$$

sont les restes de la division, par δ, de

$$pa,\quad pa^{(n-1)},\dots, pa''',\quad pa'' :$$

les quotients correspondants sont

$$i^{(n-1)},\quad i^{(n-2)},\dots, i', i.$$

2° D'après la théorie des fractions périodiques, la période formée par les progressions a *un seul* terme si $\delta = p - 1$; et, si $\delta = p + 1$, elle en a *deux*.

XX. APPLICATIONS. — 1° $a = 4$, $\delta = 9$, $p = 11$. Les progressions sont

4,	13,	$\overline{22}$,	31,	40,	49,	58,	67,	76,	85,	94,...
2,	$\overline{11}$,	20,	29,	38,	47,	56,	65,	74,	83,	92,...
1,	10,	19,	28,	37,	46,	$\overline{55}$,	64,	73,	82,	91,...
5,	14,	23,	32,	41,	50,	59,	68,	$\overline{77}$,	86,	95,...
7,	16,	25,	34,	43,	52,	61,	70,	79,	$\overline{88}$,	97,...
8,	17,	26,	35,	$\overline{44}$,	53,	62,	71,	80,	89,	98,...
4,	13,	$\overline{22}$,	31,	40,	49,	58,	67,	76,	85,	94.....

. . . .

La période a 6 termes, et $6 = 9\,\frac{2}{3} = \varphi(9)$.

(*) *Nouvelles Annales*, tome I, p. 463.

2° $a = 7$, $\delta = 20$, $p = 3$. On trouve

$$\begin{array}{ccccc}
7, & \overline{27}, & 47, & 67, & \overline{87},\ldots \\
\overline{9}, & 29, & 49, & \overline{69}, & 89,\ldots \\
\overline{3}, & 23, & 43, & \overline{63}, & 83,\ldots \\
1, & \overline{21}, & 41, & 61, & 81,\ldots \\
7, & \overline{27}, & 47, & 67, & 87,\ldots
\end{array}$$

Ainsi, $n = 4$, $\varphi(\delta) = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 8.$

3° $a = 7$, $\delta = 10$, $p = 11$. La période doit avoir un seul terme (XIX, 2°). En effet, de

$$7,\ 17,\ 27,\ 37,\ 47,\ 57,\ 67,\ \overline{77},\ 87,\ldots$$

on tire la progression

$$7,\ 17,\ 27,\ 37,\ \ldots$$

4° $a = 7$, $\delta = 12$, $p = 11$. La première progression étant

$$7,\ 19,\ 31,\ 43,\ \overline{55},\ 67,\ 79,\ 91,\ldots$$

on en déduit

$$5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65,\ \overline{77},\ 89,\ldots$$

après quoi l'on retombe sur la première progression.

XXXVII. — SUR UNE APPLICATION DE LA FORMULE DU BINOME AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES (1858) (*).

I. Le coefficient de x^k, dans le produit des polynômes.

$$1+\frac{l}{1}x+\frac{l(l-1)}{1\,.\,2}x^2+\cdots+x^l$$

$$1+\frac{l'}{1}x^{-1}+\frac{l'(l'-1)}{1\,.\,2}x^{-2}+\cdots+x^{-l'},$$

est, en représentant par $C_{l,k}$ le nombre des combinaisons de l lettres prises k à k :

$$1\,.\,C_{l,k}+\frac{l'}{1}C_{l,k+1}+\frac{l'(l'-1)}{1\,.\,2}C_{l,k+2}+\cdots$$

D'un autre côté, ce coefficient est égal à celui de x^k, dans le développement de $(1+x)^{l+l'}x^{-l'}$; donc

$$C_{l+l',\,l'+k}=1\,.\,C_{l,k}+\frac{l'}{1}C_{l,k+1}+\frac{l'(l'-1)}{1\,.\,2}C_{l,k+2}+\cdots \qquad (1).$$

II. On a

$$C_{l,k+1}=\frac{l-k}{k+1}C_{l,k},\qquad C_{l,k+2}=\frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)}C_{l,k},\quad\ldots$$

De plus,

$$C_{l,k}=$$

$$\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l-k+1)}=\frac{1}{(l-k)\int_0^1\theta\,(1-\theta)^{l-k-1}d\theta}=\frac{1}{(l-k)B(k+1,l-k)},$$

$$C_{l+l',l'+k}=\frac{1}{(l-k)\,B\,(l'+k+1,\,l-k)}.$$

(*) Un extrait de cette Note a paru dans les *Comptes-Rendus* (tome XLVII).

Au moyen de ces valeurs, l'équation (1) devient

$$\frac{B(k+1, l-k)}{B(l'+k+1, l-k)} = 1 + \frac{l'}{1}\frac{l-k}{k+1} + \frac{l'(l'-1)}{1\,.\,2}\frac{(l-k)(l-k-1)}{(k+1)(k+2)} + \cdots \quad (2),$$

ou, en posant

$$k+1 = p, \quad l'+k+1 = q, \quad l-k = m:$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{B(p,m)}{B(q,m)} &= 1 - \frac{m}{1}\frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(p-q)(p-q+1)(p-q+2)}{p(p+1)(p+2)} + \cdots \end{aligned}\right\} (A).$$

III. L'égalité (A) a été trouvée en supposant l, l' et k entiers positifs. Par conséquent, elle paraît soumise à de nombreuses restrictions. Néanmoins elle est générale, c'est-à-dire qu'elle subsiste lorsque p, q, m étant des quantités *positives* quelconques, le second membre est un polynôme ou une série (*).

Pour démontrer cette proposition, évidente si $p = q$, nous distinguerons deux cas :

1° $p > q$. On a

$$\frac{p-q}{p} = \frac{B(p-q+1, q)}{B(p-q, q)}, \quad \frac{p-q+1}{p+1} = \frac{B(p-q+2, q)}{B(p-q+1, q)}, \text{ etc.};$$

(*) Cette série est toujours convergente. En effet, lorsque p surpasse q, les termes du second membre sont, en valeur absolue, respectivement moindres que ceux de la série

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots, \qquad (a)$$

laquelle est *convergente* (*Comptes-Rendus*, t. XLV); et, si q surpasse p, les mêmes termes, pris encore en valeur absolue, sont, à partir de *l'un d'eux*, respectivement moindres que ceux de la série (a), multipliés par un facteur constant.

donc le second membre de la formule (A) égale

$$\frac{1}{B(p-q,q)}\left[B(p-q,q)-\frac{m}{1}B(p-q+1,q)+\frac{m(m-1)}{1.2}B(p-q+2,q)-\dots\right]$$

$$=\frac{1}{B(p-q,q)}\int_0^1 \theta^{p-q-1}(1-\theta)^{q-1}(1-\theta)^m d\theta$$

$$=\frac{B(p-q,m+q)}{B(p-q,q)}=\frac{B(m+q,p-q)}{B(q,p-q)}.$$

Ainsi, l'équation (1) se réduit à

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)}=\frac{B(m+q,p-q)}{B(q,p-q)} \qquad (3).$$

Mais, en vertu d'un théorème d'Euler :

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)}=\frac{B(p,m+q)}{B(q,m+p)},$$

$$\frac{B(m+q,p-q)}{B(q,p-q)}=\frac{B(m+q,p)}{B(q,m+p)};$$

donc l'équation (3) est identique.

2° $p < q$. L'équation (A) étant démontrée pour les valeurs de q inférieures à p, il suffit de faire voir qu'elle subsiste quand on y change q en $q+1$. A cet effet, appelons $\varphi(m,p,q)$ le second membre : on trouve aisément

$$\varphi(m,p,q)-\varphi(m,p,q+1)=-\frac{m}{p}\varphi(m-1,p+1,q+1) \qquad (4).$$

D'autre part,

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)}-\frac{B(p,m)}{B(q+1,m)}=-\frac{m}{q}\frac{B(p,m)}{B(q,m)}=-\frac{m}{q}\varphi(m,p,q) \qquad (5).$$

Conséquemment, il reste à vérifier que

$$p\,\varphi(m, p, q) = q\varphi(m-1, p+1, q+1),$$

ou que

$$p\left[1 - \frac{m}{1}\frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)}{p}\frac{(p-q+1)}{(p+1)} - \ldots\right]$$

$$= q\left[1 - \frac{m-1}{p+1}\frac{p-q}{p+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{(p+1)(p+2)} - \ldots\right] \quad (6).$$

Le premier membre de cette égalité peut être écrit ainsi :

$$\begin{array}{c|c|c}
p \qquad -(p-q) & \dfrac{m-1}{1} + \dfrac{(p-q)(p-q+1)}{p+1} & \dfrac{(m-1)(m-1)}{1.2} - \ldots \\
-(p-q) + \dfrac{(p-q)(p-q+1)}{p+1} & -\dfrac{(p-q)(p-q+1)(p-q+2)}{(p+1)(p+2)} & + \cdots
\end{array}$$

Or,

$$p - (p-q) = q;$$

$$p - q - \frac{(p-q)(p-q+1)}{p+1} = q\,\frac{p-q}{p+1};$$

et, en général,

$$\frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+i)}{(p+1)(p+2)\ \ldots\ (p+i)} - \frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+i+1)}{(p+1)(p+2)\ \ldots\ (p+i+1)}$$

$$= q\,\frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+i)}{(p+1)(p+2)\ \ldots(p+i+1)};$$

ou

$$1 - \frac{p-q+i+1}{p+i+1} = \frac{q}{p+i+1}.$$

La relation (6) est donc identique.

IV. Dans son savant *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes*, Binet démontre une formule équivalente à :

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = 1 - \frac{p-q}{1}\frac{m}{m+q} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{1\,.\,2}\frac{m(m+1)}{(m+q)(m+q+1)} - \ldots \quad (A').$$

Par le changement de $p-q$ en m, de m en $p-q$, et de p en $m+q$, celle-ci devient

$$\frac{B(m+q,p-q)}{B(q,p-q)} = 1 - \frac{m}{1}\frac{p-q}{p} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} - \ldots;$$

d'où, à cause de la formule (A) :

$$\frac{B(m+q,p-q)}{B(q,p-q)} = \frac{B(p,m)}{B(q,m)};$$

ce qui est précisément l'équation (3). Ainsi, le Théorème d'Euler donne l'une des formules (A), (A′) au moyen de l'autre ; et, réciproquement, ce théorème est une conséquence des deux formules.

V. La formule (A) permet de développer, en séries convergentes, l'intégrale eulérienne de première espèce et son inverse. En effet, si l'on suppose q entier,

$$B(q,m) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(q-1)}{m(m+1)\ldots(m+q-1)};$$

donc, par le changement de m en q et de q en m :

$$B(p,q) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}{q(q+1)\ldots(q+m-1)}\left[1 - \frac{q}{1}\frac{p-m}{p} + \frac{q(q-1)(p-m)(p-m+1)}{1\,.\,2\quad p(p+1)} - \ldots\right] (B):$$

m est un nombre entier arbitraire. Si, par exemple, $m = 1$:

$$B(p,q) = \frac{p-1}{q}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{q}{1}\frac{1}{p} + \frac{q(q-1)}{1.2}\frac{1}{p+1} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\frac{1}{p+2} + \dots\right] \text{(C)}.$$

De même,

$$\frac{1}{B(p,q)} = \frac{p(p+1)\dots(p+m-1)}{1.2.3\dots(m-1)}\left[1 - \frac{p}{1}\frac{m-q}{m} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{(m-q)(m-q+1)}{m(m+1)} - \dots\right] \text{(D)}.$$

et

$$\frac{1}{B(p,q)} = p\left[1 + \frac{p}{1}\frac{q-1}{1} + \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{(q-1)(q-2)}{1.2} + \dots\right] \text{(E)}.$$

VI. Le premier membre de la formule (A) égale $\frac{\Gamma(p)\Gamma(m+q)}{\Gamma(q)\Gamma(m+p)}$. Si l'on suppose $p = q + i$, i étant un nombre entier, ce premier membre se réduit à

$$\frac{q(q+1)\dots(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1)\dots(m+q+i-1)}.$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q(q+1)\dots(q+i-1)}{(m+q)(m+q+1)\dots(m+q+i-1)} = \\ &1 - \frac{m}{1}\frac{i}{q+i} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{i(i+1)}{(q+i)(q+i+1)} - \dots\end{aligned}\right\} \text{(F)}.$$

Par exemple,

$$\frac{q}{m+q} = 1 - \frac{m}{q+1} + \frac{m(m-1)}{(q+1)(q+2)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \text{ (*) (G)}.$$

(*) Cette formule est due à Stirling.

VII. Parmi les applications de la formule (A), l'une des plus intéressantes me paraît être le développement de π ou de $\frac{1}{\pi}$, en séries convergentes. Pour obtenir une infinité d'expressions de la première transcendante, il suffit de supposer

$$q \text{ entier}, \quad p-q=i+\frac{1}{2}, \quad m+q=i'+\frac{1}{2},$$

i et i' étant des nombres *entiers*. On trouve, en effet,

$$\left.\begin{aligned}\pi = {} & \frac{1.2.3\ldots\quad(q-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{2q+2i-1}{2}\right)}\;\frac{1.2.3\;\ldots\;(i+i')}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)}\\ & \times\left[1-\frac{m}{1}\frac{p-q}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)}-\ldots\right]\end{aligned}\right\}\text{(H)}.$$

Soient, par exemple,

$$q=1, \quad i=0, \quad i'=1, \quad p=\frac{3}{2}, \quad m=\frac{1}{2};$$

on a

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.4.5}-\frac{1.3}{2.4.6.7}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}+\cdots\text{ (I)}.$$

De même, en prenant

$$p \text{ entier}, \quad q-p=i+\frac{1}{2}, \quad m+p=i'+\frac{1}{2},$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi} = {} & \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{2p+2i-1}{2}\right)}{1.2.3\ldots\quad(p-1)}\;\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{2i'-1}{2}\right)}{1.2.3\;\ldots\;(i+i')}\\ & \times\left[1-\frac{m}{1}\frac{p-q}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)}-\ldots\right]\end{aligned}\right\}\text{(K)}.$$

Soient

$$p = 1, \quad i = 0, \quad i' = 1, \quad q = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{1}{2};$$

alors

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \cdots \qquad \text{(L)}.$$

VIII. La formule (L) équivaut à la proposition suivante, que l'on pourrait interpréter géométriquement : *La somme des carrés des termes du développement de* $\sqrt{2} = (1 + 1)^{\frac{1}{2}}$, *égale* $\frac{1}{\pi}$.

IX. Plus généralement, puisque la formule (A) est la traduction de l'équation (1), celle-ci subsiste en même temps que la première. Par conséquent : soit k un nombre entier, positif ou nul ; soient $l > k$, $l' > -1$: le coefficient de x^k, dans le produit des deux séries

$$1 + \frac{l}{1} x + \frac{l(l-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

$$1 + \frac{l'}{1} x^{-1} + \frac{l'(l'-1)}{1 \cdot 2} x^{-2} + \frac{l'(l'-1)(l'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{-3} \pm \cdots \text{(*)},$$

est égal à

$$\frac{\Gamma(l + l' + 1)}{\Gamma(l' + k + 1)\,\Gamma(l - k + 1)}.$$

(*) Comme une de ces séries est nécessairement divergente, il est bien entendu que l'expression : *coefficient de* x^k *dans le produit*, signifie : *la somme des produits des termes dans lesquels la somme des exposants égale* k.

Par exemple,

$$1+\frac{l\,l'}{1\,1}+\frac{l\,(l-1)}{1\,.\,2}\,\frac{l'\,(l'-1)}{1\,.\,2}+\ldots=\frac{\Gamma\,(l+l'+1)}{\Gamma\,(l+1)\,\Gamma\,(l'+1)}\ (^*)$$

X. Considérons les deux séries :

$$y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1}{1\,.\,4}\right)x^4+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 x^6+\ldots \quad (6),$$

$$z=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 x^4+\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,,\,4\,.\,6}\right)^2 x^6+\ldots \quad (7):$$

pour $x=1$, la première se réduit au développement (L).

On trouve aisément les équations différentielles

$$xz=\left(x\,\frac{dy}{dx}\right)' \ (8),\quad xz=\left[x(1-x^2)\,\frac{dz}{dx}\right]' \quad (9),$$

dans lesquelles les accents indiquent des dérivées (**). Si donc la fonction z était connue, nous aurions

$$y=1+\int_0^x\frac{dx}{x}\int_0^x xz\,dx.$$

(*) Laplace avait remarqué l'équation

$$1+\left(\frac{l}{1}\right)^2+\left(\frac{l\,(l-1)}{1\,.\,2}\right)^2+\ldots=\frac{\Gamma\,(2\,l+1)}{[\,\Gamma\,(l+1)\,]^2}\,;$$

mais sa démonstration (rapportée par Lacroix) suppose l *entier positif.*

(**) L'intégrale générale de l'équation (9) est

$$z=\mathrm{A}\int_0^1\frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)\,(1-\alpha^2x^2)}}+\mathrm{B}\int_0^1\frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)\,(1-\alpha^2+\alpha^2x^2)}}$$

(*Journal de Mathématiques*, tome XIX); mais cette formule n'est pas nécessaire à l'objet que nous avons en vue.

On sait (*) que

$$z = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi}};$$

d'où résulte

$$\int_0^x xz\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_0^x \frac{x\sin^2\varphi\,dx}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}.$$

ou

$$\int_0^x xz\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left(1 - \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}\right),$$

puis

$$y = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\int_0^x \frac{dx}{x}\left(1 - \sqrt{1 - x^2\sin^2\varphi}\right) \quad (10).$$

Posant

$$x = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi},$$

j'obtiens

$$\int_0^x \frac{dx}{x}\left(1-\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}\right) = \int_0^\theta \sin\theta\,d\theta - \int_0^\theta \frac{\sin\frac{1}{2}\theta\,d\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

(*) Voir, par exemple, la *Mécanique* de Poisson, tome I, p. 346.

ou

$$\int_0^x \frac{dx}{x}\left(1-\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}\right)=1-\cos\theta+2l\cos\frac{1}{2}\theta.$$

Par suite,

$$y=1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}\left[1-\cos\theta+2l\cos\frac{1}{2}\theta\right];$$

et enfin, par un calcul plus long que difficile,

$$y=\frac{2}{\pi}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}-(1-x^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}\right] \quad (11).$$

Telle est, sous forme d'intégrale définie, la somme de la série (6). Pour $x = 1$, y se réduit à $\frac{4}{\pi}$; ce qui devait être.

XI. Dans la formule (B), changeons p en m et m en q : il en résulte

$$\left.\begin{aligned}&\left[1+\frac{m-p}{1}\frac{q}{p}+\frac{(m-p)(m-p-1)}{1\,.\,2}\frac{q(q-1)}{p(p+1)}+\cdots\right]\\&\left[1-\frac{m-p}{1}\frac{q}{m}+\frac{(m-p)(m-p+1)}{1\,.\,2}\frac{q(q-1)}{m(m-1)}-\cdots\right]\\&=1.\end{aligned}\right\} \text{(M)}.$$

Si, par exemple,

$$m=\frac{1}{2},\quad p=1,\quad q=\frac{1}{2};$$

alors

$$\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.1}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}-\ldots\right]$$

$$\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1.1}{1.3}+\ldots\ldots\ldots\right]=1,$$

ou

$$\left(1-\frac{1}{4}-\frac{3}{64}-\frac{5}{256}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{80}+\ldots\right)=1.$$

XII. Écrivons ainsi la formule (A) :

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)}=1+\frac{m}{1}\frac{q-p}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(q-p)(q-p-1)}{p(p+1)}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{(q-p)(q-p-1)(q-p-2)}{1.2.3}+\ldots \quad (A).$$

En y remplaçant p par q et q par p, puis en multipliant membre à membre, nous aurons

$$\left[1+\frac{m}{1}\frac{q-p}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(q-p)(q-p-1)}{p(p+1)}+\ldots\right]$$

$$\left[1+\frac{m}{1}\frac{p-q}{q}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q-1)}{q(q+1)}+\ldots\right]=1 \quad (N).$$

Cette relation remarquable, qui n'est peut-être pas nouvelle, peut être déduite de la formule (M) par un changement de lettres. Elle donne, par exemple,

$$\left(1-3\,\frac{4}{9}+3\,.\,\frac{4.5}{9.10}-\frac{4.5.6}{9.10.11}\right)\left(1+3\frac{4}{5}+3\,.\,\frac{4.3}{5.6}+\frac{4.3.2}{5.6.7}\right)=1.$$

XIII. Soient, dans la formule (A) :

$$p=1,\quad m=i+\frac{1}{2},\quad q=i+\frac{3}{2},$$

i étant un nombre entier. Le premier membre devient

$$\frac{B\left(1, i+\frac{1}{2}\right)}{B\left(i+\frac{3}{2}, i+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(i+2)}{\left[\Gamma\left(i+\frac{3}{2}\right)\right]^2} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+1)}{\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2i+1}{2}\right]^2} \frac{1}{\pi}$$

$$= 2^{2i+2} \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+1)}{[1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2i+1)]^2} \frac{1}{\pi};$$

et le second membre :

$$1 + \left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2i+1}{2} \cdot \frac{2i-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2i+1}{2} \cdot \frac{2i-2}{4} \cdot \frac{2i-3}{6}\right)^2 + \ldots;$$

donc

$$\frac{1}{\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+2} \frac{[1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2i+1)]^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+1)} \left[1 + \left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2i+1}{2} \cdot \frac{2i-1}{4}\right)^2 + \ldots\right] \text{(P)}.$$

On a ainsi une infinité de développements de la transcendante $\frac{1}{\pi}$: la formule (L) en donne un.

XXXVIII. — THÉORÈME D'ANALYSE (1858).

Soient

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots, \quad (1)$$

$$\varphi(x) = b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots \quad (2)$$

deux séries convergentes. Je dis que

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \varphi(x) dx \text{ (*)} \quad (3).$$

(*) Ce théorème, énoncé d'une manière un peu différente, est connu sous le nom de *Formule de Parseval*. Mais la démonstration donnée par ce géomètre est inadmissible ; car elle suppose l'emploi des deux séries

$$a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \cdots,$$

$$b_1 + b_2 t^{-1} + b_3 t^{-2} + \cdots;$$

et, si l'une est convergente, l'autre est ordinairement divergente.

En effet,

$$f(x)\,\varphi(x) = \sum a_n\, b_{n'} \cos nx \cos n'x + \sum a_n\, b_n \cos^2 nx\,;$$

donc

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)dx = \sum a_n b_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos n'x dx + \sum a_n b_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx\,;$$

ou, d'après les relations

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos n'x dx = 0\,, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{\pi}{2}\,:$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \sum a_n\, b_n\,.$$

Application. Si l'on part des deux formules connues :

$$\frac{1}{2a^2}\left[a\pi \frac{e^{a(\pi-x)} + e^{-a(\pi-x)}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} - 1\right] = \frac{\cos x}{1+a^2} + \frac{\cos 2x}{4+a^2} + \frac{\cos 3x}{9+a^2} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2a^2}\left[1 - a\pi \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}\right] = \frac{\cos x}{1+a^2} - \frac{\cos 2x}{4+a^2} + \frac{\cos 3x}{9+a^2} - \cdots (*);$$

on a

$$\frac{1}{(1+a^2)^2} - \frac{1}{(4+a^2)^2} + \frac{1}{(9+a^2)^2} - \cdots$$

$$= \frac{1}{2\pi a^4} \int_0^{2\pi} \left[a\pi \frac{e^{a(\pi-x)} + e^{-a(\pi-x)}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} - 1\right]\left[1 - a\pi \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a} - e^{-a\pi}}\right] dx\,,$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 115.

ou

$$\frac{1}{(1+a^2)^2}-\frac{1}{(4+a^2)^2}+\frac{1}{(9+a^2)^2}-\ldots$$

$$=\frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)^2-a\pi\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)-a^2\pi^2\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}\right)}{2a^4\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)^2}.$$

Lorsque $a=0$, le second membre se réduit à $\frac{7}{720}\pi^4$;

donc

$$\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{7}{720}\pi^4;$$

résultat connu.

XXXIX. — SUR LA SÉRIE HARMONIQUE (1856).

1. On sait que

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\mathrm{l}n-\varphi(n)+\mathrm{C} \qquad (1),$$

$\varphi(n)$ s'annulant quand n devient infini, et C représentant une constante dont la valeur, calculée par Euler et Mascheroni, est

$$\mathrm{C}=0,577\,215\,664\,901\,532\,860\ldots.$$

En remplaçant $\mathrm{l}n$ par

$$\mathrm{l}\frac{n}{n-1}+\mathrm{l}\frac{n-1}{n-2}+\ldots+\mathrm{l}\frac{2}{1}+\mathrm{l}1,$$

on a

$$\varphi(n)=\mathrm{C}-1+\left(\mathrm{l}\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\mathrm{l}\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\mathrm{l}\frac{n}{n-1}-\frac{2}{1}\right) \qquad (2).$$

Soit

$$u_n = \mathrm{l}\,\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n};$$

d'où

$$u_n = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\, e^{-n\alpha}\,(e^\alpha - 1 - \alpha),$$

et

$$\varphi(n) = C - 1 + \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{e^\alpha - 1}\right)(e^{-\alpha} - e^{-n\alpha}) \qquad (3).$$

Cela posé, en appliquant mot à mot la méthode employée par M. Liouville dans sa *Note sur l'évaluation du produit* $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, x$, on trouve

$$\varphi(n) > -\frac{1}{2n}, \quad \varphi(n) < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \qquad (4);$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \mathrm{l}n + \frac{1}{2n} + C \qquad (A),$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \mathrm{l}n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + C \qquad (B).$$

Les formules (A), (B) donnent ainsi deux limites entre lesquelles est comprise la somme S_n des n premiers termes de la série harmonique. Si l'on fait $n = 1000$, on trouve

$$S_{1000} < 7{,}485\,470\,95, \quad S_{1000} > 7{,}485\,470\,86.$$

Ce résultat est d'accord avec celui que donne Lacroix.

II. La série dont le terme général est u_n est convergente (*). D'après le § I, elle a pour *somme*

$$1 - C = 0{,}422\,784\,335\,098\,476\,139\,\ldots$$

III. La série harmonique est très-peu divergente, puisque la somme de ses mille premiers termes est à peu près 7, 5; mais la série dont le terme général est $\frac{1}{n\,\mathrm{l}n}$ diverge encore bien plus lentement. En effet, si l'on suppose

$$S_{n-1} = \frac{1}{2\,\mathrm{l}2} + \frac{1}{3\,\mathrm{l}3} + \cdots + \frac{1}{n\,\mathrm{l}n} \qquad (5),$$

et

$$n = 2^p,$$

on trouve facilement

$$S_{n-1} < \frac{1}{\mathrm{l}2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right),$$

$$S_{n-1} > \frac{1}{2\,\mathrm{l}2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}\right);$$

ou, par ce qui précède,

$$S_{n-1} < \frac{1}{\mathrm{l}2}\left[\mathrm{l}(p-1) + \frac{1}{2(1-p)} + C\right] \qquad (C),$$

$$S_{n-1} > \frac{1}{2\,\mathrm{l}2}\left[\mathrm{l}p + \frac{1}{2p} - \frac{1}{12p^2} + C\right] \qquad (D).$$

Soit

$$p = 1000,$$

auquel cas

$$n = 2^{1000},$$

(*) *Comptes-rendus*, tome XLIII, p. 627.

nombre de *trois cent deux chiffres*. Les formules (C), (D) donnent

$$S_{n-1} > 5{,}4\,, \qquad S_{n-1} < 10{,}8.$$

Ainsi, bien que la série considérée soit divergente, la somme de ses premiers termes, jusqu'à un rang marqué par un nombre de 302 chiffres, est *inférieure* à 11. On arriverait à des résultats encore plus curieux si l'on considérait la série divergente

$$\frac{1}{2\mathrm{l}2(\mathrm{l}\mathrm{l}2)} + \frac{1}{3\mathrm{l}3(\mathrm{l}\mathrm{l}3)} + \cdots + \frac{1}{n\mathrm{l}n(\mathrm{l}\mathrm{l}n)} + \cdots$$

IV. Écrivons ainsi les formules (A), (B) :

$$\mathrm{l}n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + C < S_n < \mathrm{l}n + \frac{1}{2n} + C.$$

Nous aurons, en changeant n en $2n$:

$$\mathrm{l}(2n) + \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^2} + C < S_{2n} < \mathrm{l}(2n) + \frac{1}{4n} + C;$$

et, par conséquent :

$$\mathrm{l}2 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^2} < S_{2n} - S_n < \mathrm{l}2 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2}.$$

Ainsi, la somme des n termes qui, dans la série harmonique, suivent les n premiers, est comprise entre

$$\mathrm{l}2 - \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{l}2 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2}.$$

De là résulte

$$\lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \mathrm{l}2\,(*).$$

(*) Voyez, sur ce point, le tome XV des *Nouvelles Annales de Mathématiques* et le *Traité élémentaire des Séries*.

XL. — SUR UNE FONCTION HOMOGÈNE ENTIÈRE (1858) (*).

Plusieurs géomètres, parmi lesquels il suffit de citer MM. Cauchy, Bertrand et Serret, ont indiqué divers procédés qui permettent d'évaluer la fonction

$$\frac{a^{n+p-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n+p-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n+p-1}}{f'(l)}$$

au moyen des coefficients de l'équation $f(x) = 0$, dont a, b, c, . . . , k, l sont les n racines (supposées inégales); mais personne, que je sache, n'a fait attention à l'identité de cette fonction symétrique *fractionnaire* avec la fonction homogène *entière*, du degré p :

$$\mathrm{H}_{n.p} = \sum a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \cdots l^{\lambda}.$$

Cette identité résulte de la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soient* a, b, c, ... , k, l *des quantités quelconques, inégales; et soit, pour abréger*,

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - k)(x - l).$$

La fonction, entière et homogène, des n *lettres* a, b, c, . . . k, l, *dont* p *est le degré, est égale à la somme des valeurs que prend la fraction* $\frac{\mathrm{x}^{n+p-1}}{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}$ *quand on y remplace* x *par* a, b, c, . . . , k, l. *En d'autres termes*,

$$\mathrm{H}_{n.p} = \sum a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \cdots l^{\lambda} = \frac{a^{n+p-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n+p-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n+p-1}}{f'(l)} \quad (1),$$

(*) Cette Note a paru dans les *Comptes-Rendus*.

les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, *entiers et non négatifs, étant déterminés par l'équation*

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda = p \qquad (2).$$

Pour démontrer l'équation (1), qui devient identique si n égale 1 ou 2, il suffit de faire attention que

$$H_{n,p} = H_{n-1,p} + lH_{n-1,p-1} + l^2 H_{n-1,p-2} + \cdots + l^p H_{n-1,0},$$

et d'avoir égard aux relations connues :

$$H_{n,0} = \frac{a^{n-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n-1}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n-1}}{f'(l)} = 1,$$

$$\frac{a^{n-2}}{f'(a)} + \frac{b^{n-2}}{f'(b)} + \cdots + \frac{l^{n-2}}{f'(l)} = 0.$$

COROLLAIRE.— *Si l'on multiplie la fonction* $H_{n,p}$, *qui renferme* $C_{p+n-1,\,n-1}$ *termes, par*

$$P = (a-b)(a-c)\ldots(a-l) \times (b-c)(b-d)\ldots(b-l) \times \ldots \times (k-l),$$

le produit contiendra seulement n *termes.*

Par exemple,

$$(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc)$$

$$\times (a-b)(a-c)(b-c) = a^5(b-c) + b^5(c-a) + c^5(a-b).$$

Remarques. — I. Le dernier énoncé suppose que l'on ne développe pas les produits qui multiplient a^{n+p-1}, b^{n+p-1}, $c^{n+p-1}, \ldots, l^{n+p-1}$. Dans le cas contraire, la fonction $H_{n,p}$ P prend la forme

$$\sum a^{n+p-1} \sum b^{n-2} c^{n-3} \ldots\ldots k^1 l^0,$$

d'après un théorème de Vandermonde ; et alors elle contient un nombre de termes égal à 1 . 2 . 3 . . . n.

II (*). Si l'on divise x^{n+p-1} par $f(x)$, et que l'on désigne par $\varphi(x)$ le reste, on a

$$\varphi(x) = f(x)\left[\frac{a^{n+p-1}}{(x-a)f'(a)} + \cdot \cdot \cdot + \frac{l^{n+p-1}}{(x-l)f'(l)}\right] (^{**});$$

donc le premier terme de ce reste est

$$\frac{a^{n+p-1}}{f'(a)} + \frac{b^{n+p-1}}{f'(b)} \cdot \cdot \cdot + \frac{l^{n+p-1}}{f'(l)} = H_{n,p}.$$

XLI. — SUR LES SURFACES CYCLOTOMIQUES (1859) (***).

I. DÉFINITION. — *La surface cyclotomique est engendrée par une circonférence de rayon variable, dont le centre* O *est fixe, et dont le plan passe par une droite fixe* Oz (****).

II. *Équation de la surface.* — Ox, Oy étant deux axes perpendiculaires à Oz, soit M un point quelconque de la surface, situé sur le *méridien* GMH (*****). Posons

$$OM = u, \quad MOG = \theta, \quad GOx = \omega.$$

Il est clair que u est une fonction de ω ; donc nous pouvons

(*) Cette remarque date de 1858 ; mais elle est inédite.

(**) En général, le reste de la division de F (x) par $f(x)$ est

$$\varphi(x) = f(x)\left[\frac{F(a)}{(x-a)f'(a)} + \cdot \cdot \cdot + \frac{F(l)}{(x-l)f'(l)}\right]$$

(***) Cette dénomination, très-bien choisie, m'a été proposée par M. de Saint-Venant.

(****) Le lecteur est prié de faire les figures.

(*****) Le point G est supposé dans le plan xOy, et le point H, sur Oz : GMH est donc un quadrans du cercle générateur.

prendre, pour équation de la surface, soit

$$u = f(\omega) \qquad (1),$$

soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2).$$

III. *Normale.* — Il est visible que la droite MN, normale en M à la surface, rencontre l'*axe* OI du méridien GMH : cet axe est d'ailleurs la perpendiculaire à OG, située dans le plan xOy.

IV. *Trajectoires orthogonales des sections méridiennes.* — Considérons le cône de révolution engendré par OM tournant autour de Oz, et projetons la figure sur le plan méridien GMH. La tangente MT, à cette section, est normale au cône. D'un autre côté, la normale à la cyclotomique est projetée suivant MO (IV). D'après un théorème connu, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles ; donc *le cône coupe orthogonalement la surface.* La tangente à l'intersection PMQ est perpendiculaire à MT, ou normale à GMH ; donc *les trajectoires orthogonales des sections méridiennes sont les sections de la cyclotomique par des cônes de révolution autour de* Ox (*).

V. *Équation des trajectoires.* — L'équation (1), qui représente la surface, représente aussi la *directrice*, supposée située dans le plan xy. Si nous appelons r la projection de OM sur ce même plan, nous aurons

$$r = u \cos\theta,$$

ou

$$r = \cos\theta\, f(\omega) \qquad (3).$$

Par conséquent, *les trajectoires orthogonales des sections*

(*) Démonstration nouvelle (février 1867).

méridiennes se projettent, sur le plan de la directrice, suivant des courbes semblables à celle-ci.

VI. *Relations entre les coordonnées d'un point.* — On a

$$x = u \cos\theta \cos\omega, \quad y = u \cos\theta \sin\omega, \quad z = u \sin\theta \tag{4}$$

On déduit, de ces formules

$$\frac{dx}{d\theta} = -u \sin\theta \cos\omega, \quad \frac{dy}{d\theta} = -u \sin\theta \sin\omega, \quad \frac{dz}{d\theta} = u \cos\theta \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{d\omega} = \cos\theta\left(\dfrac{du}{d\omega}\cos\omega - u\sin\omega\right), \quad \dfrac{dy}{d\omega} = \cos\theta\left(\dfrac{du}{d\omega}\sin\omega + u\cos\omega\right), \\ \qquad\qquad \dfrac{dz}{d\omega} = \dfrac{du}{d\omega}\sin\theta \end{array}\right\} \tag{6}$$

VII. *Élément de la génératrice.* — Il a pour valeur

$$ds = ud\theta \tag{7}$$

VIII. *Élément de la trajectoire.* — En désignant par σ la longueur de l'arc PM, comptée à partir d'une certaine origine, on a, par les relations (6) :

$$d\sigma = \sqrt{du^2 + u^2 \cos^2\theta d\omega^2} \text{ (*)} \tag{8}$$

IX. *Angle du rayon vecteur avec la tangente à la trajectoire.* — Soient α, β, γ les angles formés par cette tangente avec les trois axes ; soit λ son inclinaison sur le rayon OM. On a

$$\cos\lambda = \frac{x}{u}\cos\alpha + \frac{y}{u}\cos\beta + \frac{z}{u}\cos\gamma.$$

(*) Cette formule devient évidente, sans calcul, si l'on considère le développement du cône de révolution.

Mais

$$\cos\alpha = \frac{dx}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega};$$

donc, à cause des valeurs (4) et (6) :

$$\cos\lambda = \frac{du}{d\omega} : \frac{d\sigma}{d\omega},$$

ou, avec la notation de Lagrange,

$$\cos\lambda = \frac{u'}{\sigma'} \qquad (9);$$

et, par conséquent,

$$\sin\lambda = \frac{u\cos\theta}{\sigma'} \qquad (10).$$

X. *Distance de l'origine au plan tangent.* — Il est visible qu'elle ne diffère pas de la distance h comprise entre l'origine et la tangente à la trajectoire; donc

$$h = u\sin\lambda,$$

ou

$$h = \frac{u^2\cos\theta}{\sigma'} \qquad (11).$$

XI. *Aire de la surface.* — On peut prendre, pour élément de la surface, le rectangle infiniment petit déterminé par deux sections méridiennes et deux trajectoires. Ainsi

$$dA = ds\,d\sigma,$$

ou

$$dA = ud\theta d\omega\sqrt{u'^2 + u^2\cos^2\theta} \qquad (12).$$

L'aire totale est donc exprimée par la formule

$$A = 2\int_o^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_o^{2\pi} u d\omega \sqrt{u'^2 + u^2 \cos^2\theta} \qquad (13).$$

XII. *Volume.* — Le corps limité par la surface cyclotomique se compose de pyramides infiniment petites, ayant chacune pour base un élément de la surface, et pour hauteur, la perpendiculaire h. Par conséquent,

$$dV = \frac{1}{3} u^3 \cos\theta \, d\theta \, d\omega,$$

$$V = \frac{2}{3}\int_o^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_o^{2\pi} u \, d\omega,$$

ou, plus simplement,

$$V = \frac{2}{3}\int_o^{2\pi} u^3 d\omega \qquad (14).$$

XIII. *Remarque.* — D'après la dernière formule, l'*onglet* compris entre deux demi-méridiens consécutifs a pour volume $\frac{2}{3} u^3 \, d\omega$. Cette expression représente aussi le volume de l'onglet appartenant à la sphère dont le rayon serait u. En effet, la différence entre ces deux éléments est infiniment petite par rapport à l'un et à l'autre.

XIV. *Application.* — Supposons que la directrice soit une circonférence de diamètre a, située dans le plan des xy, et passant par l'origine. L'équation (1) devient

$$u = a \cos\omega \qquad (15),$$

et l'équation (2) :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = a^2x^2 \qquad (16).$$

Dans ce cas, la surface cyclotomique est donc du quatrième degré. Elle se compose de *deux nappes fermées*, *symétriques par rapport à la droite* Oz, *ligne de contact mutuel* (*).

Le volume de cette *cyclotomique circulaire* est, par la formule (14) :

$$V = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \cos^3\omega d\omega,$$

ou plutôt

$$V = \frac{8}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \omega d\omega \text{ (**)};$$

et enfin, par un calcul très-simple,

$$V = \frac{16}{9} a^3 \qquad (17).$$

Ainsi, chacun des *doubles-cornes* dont se compose le corps dont il s'agit, est les $\frac{8}{9}$ du cube ayant a pour arête.

(*) Jugeant qu'il ne serait pas facile, au moyen d'une figure, de représenter convenablement cette singulière surface, M. de Saint-Venant a eu l'obligeance de m'en faire exécuter un modèle.

(**) La trace de la surface, sur le plan xy, a pour équation

$$u = \pm a \cos \omega;$$

mais, si l'on adoptait la double valeur de u, on trouverait $V = 0$. On doit donc chercher le volume limité par l'un des nappes, et doubler le résultat.

XV. La formule (13) devient

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega d\omega \sqrt{\sin^2\omega + \cos^2\omega\cos^2\theta},$$

ou

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega d\omega \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\omega} \qquad (18).$$

Pour réduire celle-ci aux quadratures, il suffit de poser

$$\sin\omega = \cot\theta \operatorname{tg}\varphi\,;$$

d'où

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

En effet,

$$\int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + 1\,.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]\,;$$

donc

$$A = 4\,a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,1\,.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right],$$

ou

$$A = 2\pi a + 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta\,1.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \qquad (19).$$

Si l'on fait $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = t$, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta \,\mathrm{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^2\,dt}{(1+t^2)^2\,t}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+t}{1-t}\right);$$

ou encore, en remplaçant $\frac{1-t}{1+t}$ par β :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta \,\mathrm{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = -8\int_0^1 \frac{\beta^2\,d\beta}{(1+\beta^2)^2(1-\beta^2)}\,\mathrm{l}\beta.$$

La substitution dans la formule (19) donne enfin

$$A = 2\pi a^2 - 32a^2\int_0^1 \frac{\beta^2\,d\beta}{(1+\beta^2)^2(1-\beta^2)}\,\mathrm{l}\beta \qquad (20).$$

Addition. — (Février 1867).

XVI. *Détermination d'une intégrale définie.* — Soient

$$\mathrm{P} = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2(1-x^2)}\,\mathrm{l}x, \quad \mathrm{Q} = \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2(1-x^2)};$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{P} = \left(\mathrm{Q}\,\mathrm{l}\,x\right)_0^1 - \int_0^1 \mathrm{Q}\,\frac{dx}{x} \qquad (21).$$

On a identiquement

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2(1-x^2)} = \frac{1}{8}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{8}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

donc

$$Q = \frac{1}{8}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{4}\,arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}\ ;$$

puis, comme on peut le vérifier,

$$Q = \frac{1}{8}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{4}\,\frac{x}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$Q\,\mathrm{l}x = \frac{1}{8}\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}(1+x) - \frac{1}{8}\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}(1-x) - \frac{1}{4}\,\frac{x}{1+x}\,\mathrm{l}\,x \qquad (22),$$

$$\int_0^1 Q\frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\int_0^1\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{8}\int_0^1\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} - \frac{\pi}{16}.$$

En développant $\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x}$, on trouve aisément

$$\int_0^1\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi^2}{4}\ ;$$

ainsi

$$\int_0^1 Q\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{16} \qquad (23).$$

Il reste à déterminer la différence des valeurs que prend la fonction Qlx pour $x = 1$ et pour $x = 0$.

Les termes $lx\, l\,(1 + x)$ et $\frac{x}{x+1}\, lx$, nuls lorsque $x = 1$, s'annulent encore avec x : en effet, $xlx = 0$ pour $x = 0$. Quant au terme $lx\, l\,(1 - x)$, je dis qu'il est nul aussi aux deux limites : comme il est symétrique par rapport à x et $1 - x$, il suffit de vérifier qu'il s'annule avec x.

Or, si l'on fait $x = e^{-z}$, on a

$$\mathrm{l}x\,\mathrm{l}(1+x) = -z\,\mathrm{l}(1-e^{-z}) = z\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{1}{e^z - 1}\right) = \theta\,\frac{z}{e^z - 1},$$

θ étant compris entre 0 et 1. Lorsque z augmente indéfiniment, la fraction tend vers zéro, etc.

En résumé, la formule (21) se réduit à

$$\mathrm{P} = -\int_0^1 \mathrm{Q}\,\frac{dx}{x},$$

ou

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2(1-x^2)}\,\mathrm{l}x = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^2}{32} \qquad (24);$$

et, en conséquence,

$$\mathrm{A} = \pi^2 a^2 \qquad (25).$$

XVII. *Autre intégrale.* — D'après les formules (19) et (25) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta\,\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \ (*) \qquad (26).$$

(*) Cette valeur résulte aussi de deux intégrales rapportées dans les *Tables* de M. Bierens de Haan.

XVIII. *Remarque.* — Si nous écrivons ainsi la formule (18):

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - \cos^2\omega \sin^2\theta}\,,$$

et si nous employons la notation de Legendre, nous aurons ce résultat curieux :

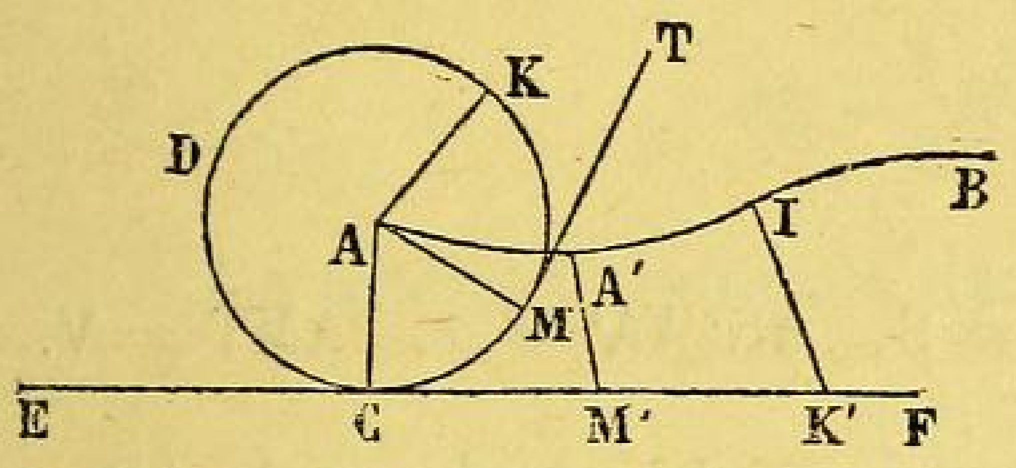
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} E^1(\cos\omega) \cos\omega\, d\omega = \frac{\pi^2}{8} \qquad (27).$$

XIX. *Cyclotomique à directrice rectiligne.* — Si la surface coupe le plan des xy suivant une ligne droite, les trajectoires orthogonales des sections méridiennes se projettent, sur le même plan, suivant des parallèles à cette droite (§ V). Conséquemment, *ces trajectoires sont des hyperboles.*

XX. *Remarque.* — Les deux surfaces que nous venons de prendre comme exemples sont *réciproques* l'une de l'autre. En effet, leurs équations sont

$$u = \frac{a}{\cos\omega}\,, \quad u_1 = a\cos\omega.$$

LXII. — SUR LA THÉORIE DES ROULETTES (1858) (*).



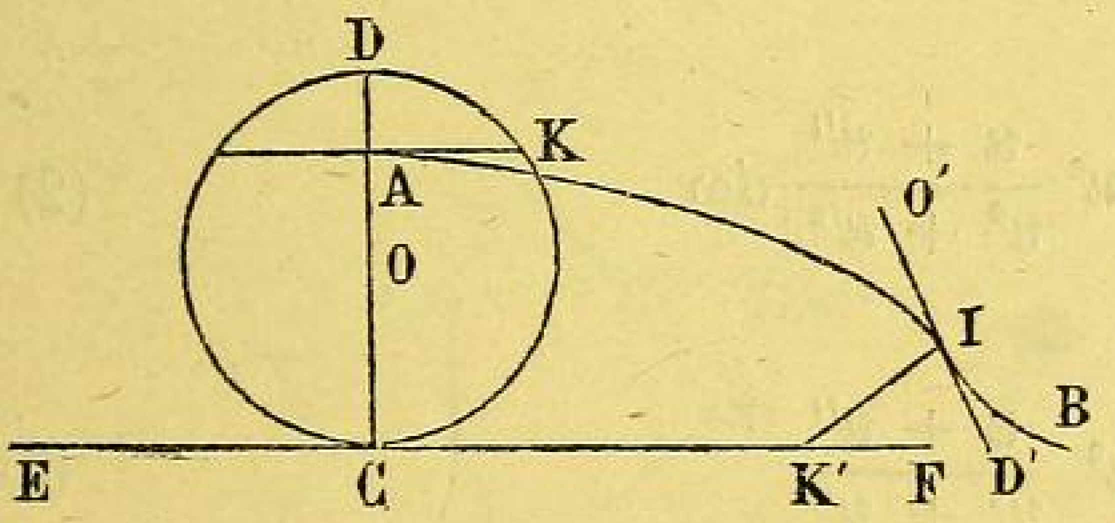
I. Soit une courbe DCM, roulant sur une droite fixe EF. Pendant le mouvement, un point quelconque A, invariablement lié à la courbe roulante, décrit une *roulette* AA'B. On sait que, pour tracer cette courbe par points, il suffit de construire la tangente MT en un point quelconque M de DC, et de prendre

$$\mathrm{CM}' = arc\ \mathrm{CM},\quad \mathrm{FM'A'} = \mathrm{TMA},\quad \mathrm{M'A'} = \mathrm{MA}:$$

A' est la nouvelle position du point A. De plus, M'A' est la normale, en A', à la roulette.

Cela posé, au point d'inflexion I de cette courbe, l'angle A'M'F devient maximum ou minimum; donc il en est de même pour son égal AMT. Ainsi :

Pour trouver le point d'inflexion I *de la roulette décrite par le point* A, *cherchez, sur la courbe roulante* DCM, *le point* K *pour lequel* AMF *est maximum ou minimum :* I *correspond à* K.



II. Dans le cas où la courbe roulante est une circonférence O, le point K, comme on le voit aisément, est situé sur la parallèle à EF, menée par le point A. Par suite, la tangente en I est la nouvelle position D'O' du rayon DO.

III. Si le point A se déplace sur OD, le point d'inflexion I se déplace aussi : *le lieu de ce point est l'enveloppe du*

(*) Cette Note peut être considérée comme faisant suite à celle qui a paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (tome XV, p. 102).

diamètre CD, *c'est-à-dire la cycloïde décrite par le point* C, *considéré comme appartenant au cercle dont* CO *serait le diamètre* (*). *Cette courbe enveloppe les cycloïdes engendrées par tous les points de* CD.

IV. Soient

$$\mathrm{AM} = u,\quad \mathrm{CAM} = \omega,\quad arc\,\mathrm{CM} = \mathrm{S},\quad arc\,\mathrm{AA'} = \sigma,\quad \mathrm{AMT} = \mathrm{V}.$$

Représentons encore par ρ le rayon de courbure de AB, au point A'. On a (**)

$$ds\cos \mathrm{V} = du,\quad ds\sin \mathrm{V} = u d\omega = \left(1 + \frac{u}{\rho}\right) d\sigma,\quad \operatorname{tg} \mathrm{V} = \frac{u d\omega}{du},\quad \frac{d\sigma}{\rho} = d\mathrm{V}.$$

De là résulte

$$d\sigma = u\,(d\omega - d\mathrm{V}).$$

Or,

$$\mathrm{V} = arc\operatorname{tg} \frac{u}{u'};$$

donc

$$d\mathrm{V} = \frac{u'^2 - uu''}{u^2 + u'^2}\, d\omega \qquad (1),$$

puis

$$d\sigma = u^2\, \frac{u + u''}{u^2 + u'^2}\, d\omega \qquad (2),$$

$$\rho = u^2\, \frac{u + u''}{u^2 + u'^2} \qquad (3).$$

V. Soit A l'aire de la figure CAA'M'. A cause de

$$\mathrm{A'M'} = \mathrm{AM} = u,\quad \mathrm{A'M'F} = \mathrm{AMT} = \mathrm{V},$$

(*) *Géométrie descriptive de Leroy*, p. 391.

(**) Voir la Note citée.

on a

$$dA = \frac{1}{2}\left[(\rho + u)^2 - \rho^2\right],$$

ou, par les formules (1), (3) :

$$dA = \frac{1}{2} u^2 \frac{2u^2 + u'^2 + uu''}{u^2 + u'^2} d\omega. \tag{4}$$

La fraction contenue dans le second membre égale

$$2 - \frac{u'^2 - uu''}{u^2 + u'^2};$$

donc

$$dA = u^2 d\omega - \frac{1}{2} u^2 \, dV. \tag{5}$$

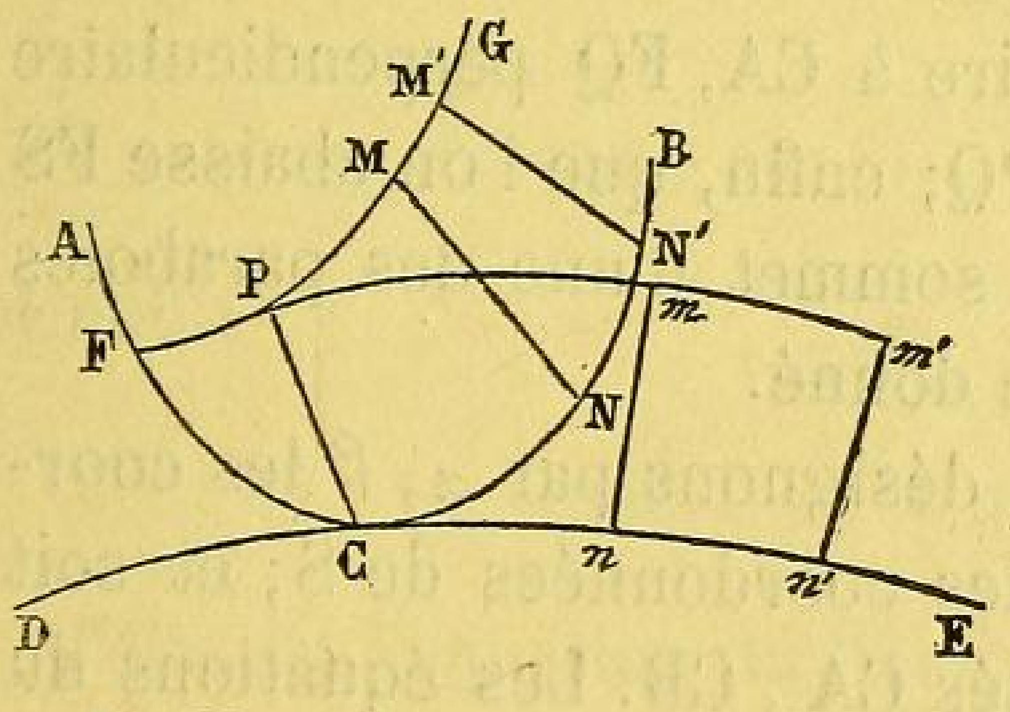
Par conséquent, si l'on fait

$$\frac{1}{2}\int u^2 d\omega = B, \quad \frac{1}{2}\int u^2 dV = C, \tag{6}$$

on a

$$A = 2B - C: \tag{7}$$

B est l'aire du secteur ACM. Quant à l'intégrale C, elle représente l'aire de la courbe obtenue en menant, par A, des droites égales et parallèles aux normales A'M' (*).



VI. Considérons le cas général d'une courbe ACB roulant sur une courbe DCE et entraînant une ligne FPG. Soient PC, MN, M'N' des normales à FPG; soient mn, $m'n'$ les nouvelles positions de ces droites.

La ligne mn, normale à la trajectoire du point M (§ I), est

(*) Il semble, d'après la formule (7), que A ne peut surpasser 2B ; et le contraire a lieu sur la figure. Mais, comme l'angle V augmente ou diminue avec u, les éléments de l'intégrale C peuvent être négatifs aussi bien que positifs : dans le cas actuel, ils sont négatifs ; et la soustraction indiquée devient une addition.

normale encore à la nouvelle position de FPG. Donc cette ligne FPG, quand elle est entraînée par ACB, touche successivement, en P, m, m',... les trajectoires de ses différents points P, M, M,... Ainsi, non-seulement la courbe Pmm' est l'enveloppe de FPG (théorème connu), mais encore *cette courbe* Pmm' *est l'enveloppe des trajectoires de tous les points appartenant à* FPG. Autrement dit : *Quand une courbe* ACB *roule sur une courbe* DCE, *en entraînant une ligne* FPG, *l'enveloppe de celle-ci coïncide avec l'enveloppe des trajectoires de tous ses points.*

VII. Si, rendant la courbe ACB immobile, on fait rouler DCE sur ACB, FPG deviendra l'enveloppe de Pmm' et des trajectoires des points P, m, m',... En particulier, lorsque la ligne FPG se réduit à un point P, la ligne Pmm', dans toutes ses positions, passe par ce point P.

XLIII. — LIEU GÉOMÉTRIQUE (1859).

PROBLÈME. — *Quel est le lieu des sommets des paraboles tangentes aux côtés d'un triangle rectangle isoscèle* ACB (*) ?

D'après le Théorème de Simpson, si l'on décrit, sur l'hypoténuse AB comme diamètre, une circonférence ACBD ; que l'on prenne un point quelconque F de cette circonférence ; que l'on mène FP perpendiculaire à CA, FQ perpendiculaire à CB; que l'on trace la droite PQ; enfin, que l'on abaisse FS perpendiculaire à PQ : S est le sommet d'une des paraboles tangentes aux côtes du triangle donné.

Prenons CA, CB pour axes ; désignons par α, β les coordonnées du foyer F, par x, y les coordonnées de S; et soit a la longueur commune des côtés CA, CB. Les équations du problème sont

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \qquad (1),$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$$\frac{y-\beta}{\alpha}=\frac{x-\alpha}{\beta} \qquad (2),$$

$$\alpha^2+\beta^2-a(\alpha+\beta)=0 \qquad (3).$$

Afin de les simplifier, posons

$$\alpha=\lambda\cos\theta,\quad \beta=\lambda\sin\theta:$$

l'équation (3) donne, immédiatement

$$\lambda=a(\cos\theta+\sin\theta).$$

Par suite, les équations (1), (2) deviennent

$$x\sin\theta+y\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta),$$

$$x\cos\theta-y\sin\theta=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos\theta+\sin\theta).$$

On tire, de ces dernières,

$$x=a(\cos\theta+\sin\theta)\cos^3\theta,$$

$$y=a(\cos\theta+\sin\theta)\sin^3\theta;$$

puis

$$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)^{\frac{4}{3}},\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)^{\frac{2}{3}};$$

et enfin

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2=a\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right) \qquad (\mathrm{A}).$$

Telle est l'équation du lieu. L'emploi des coordonnées polaires la transforme en

$$u=a\,\frac{\cos^{\frac{1}{3}}\omega+\sin^{\frac{1}{3}}\omega}{\left(\cos^{\frac{2}{3}}\omega+\sin^{\frac{2}{3}}\omega\right)^2} \qquad (\mathrm{B}).$$

XLIV. — SUR UN PRODUIT CONVERGENT (1859).

I. Pour établir établir la convergence du produit

$$P = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots(1+q^n)\ldots \qquad (1),$$

composé d'un nombre indéfini de facteurs, il suffit de prouver que la série

$$\mathrm{l}(1+q) + \mathrm{l}(1+q^2) + \ldots + \mathrm{l}(1+q^n) + \ldots \qquad (2),$$

est convergente (*).

Or, la somme S_n des n premiers termes est comprise entre

$$q + q^2 + \ldots\ldots + q^n = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

et

$$\left(q - \frac{1}{2}q^2\right) + \left(q^2 - \frac{1}{2}q^4\right) + \ldots + \left(q^n - \frac{1}{2}q^{2n}\right) = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - \frac{1}{2}\frac{q^2(1-q^{2n})}{1-q^2};$$

donc la série (2) est convergente. De plus, S étant la limite de S_n, on a

$$S < \frac{q}{1-q}, \quad S > \frac{q}{1-q} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{1-q^2} \qquad (3).$$

II. A cause de

$$\mathrm{l}(1+q^n) = q^n - \frac{1}{2}q^{2n} + \frac{1}{3}q^{3n} - \frac{1}{4}q^{4n} + \ldots\ldots,$$

$$S = \sum_1^\infty q^n - \frac{1}{2}\sum_1^\infty q^{2n} + \frac{1}{3}\sum_1^\infty q^{3n} - \frac{1}{4}\sum_1^\infty q^{4n} + \ldots\ldots$$

(*) On suppose q compris entre 0 et + 1. Lorsque q est négatif, le développement de P suivant les puissances de q forme une série très-remarquable, étudiée par Euler, Jacobi et d'autres géomètres.

ou

$$S = \frac{q}{1-q} - \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1-q^3} - \frac{1}{4}\,\frac{q^4}{1-q^4} + \cdots \qquad (4).$$

On reconnaît encore que la somme S est comprise entre les limites indiquées ci-dessus.

III. Si on développe chacun des termes de la série (4), on trouve

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
S = q + 1 & q^2 + 1 & q^3 + 1 & q^4 + 1 & q^5 + 1 & q^6 + \cdots \\
-\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \\
 & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{3} & \\
 & & & & -\frac{1}{6} &
\end{array}$$

Il est visible que *le coefficient de* q^N *est égal à la somme des inverses des diviseurs impairs de* N, *diminuée de la somme des inverses de ses diviseurs pairs* (*).

(*) 1° Si N est *impair*, le coefficient de q^N a pour valeur

$$C_N = \frac{1}{N}\int N,$$

$\int N$ désignant, suivant la notation de M. Liouville, la somme des diviseurs de N.

2° Soit $N = 2^\alpha N'$, N' étant *impair*. On trouve aisément

$$C_N = \frac{2^{\alpha+1}-3}{N}\int N'.$$

Dans les deux cas, C_N est positif. — (Mars 1867.)

XLV. — REMARQUES SUR UN MÉMOIRE DE POISSON (1859).

I. Dans le 18e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, Poisson donne l'importante formule

$$\frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}} - \frac{2}{p} = 4\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x}-1} \qquad \text{(A)};$$

mais il y parvient au moyen des deux intégrales *indéterminées*

$$\int_0^\infty \sin px\,dx\,, \quad \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \sin px\,dx\,:$$

Poisson les suppose, respectivement, égales à $\frac{1}{p}$ et à $\frac{1}{2}\,\dfrac{e^{\frac{p}{2}}+e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}}$.

Il y a plus : ce grand géomètre obtient la première valeur en faisant $b=0$ dans une formule qui suppose $b>0$, et la seconde, en faisant $\theta=\pi$ dans une intégrale qui exclut cette valeur-limite. La formule (A) n'est donc pas rigoureusement démontrée. Mais il est facile de rectifier la méthode employée par Poisson.

En effet, à cause de

$$\frac{1}{e^{2\pi x}-1} = \sum_1^\infty e^{-2n\pi x},$$

on a d'abord

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \sum_1^\infty \int_0^\infty e^{-2n\pi x} \sin px\,dx = \sum_1^\infty \frac{p}{p^2+4n^2\pi^2},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{p}{4\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{p^2}{4\pi^2}+n^2}.$$

Mais, d'après une formule connue (*),

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{p^2}{4\pi^2}+n^2} = \frac{2\pi^2}{p^2}\left[\frac{p}{2}\,\frac{e^{\frac{p}{2}}+e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}}-1\right];$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{2p}\left[\frac{p}{2}\,\frac{e^{\frac{p}{2}}+e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}}-1\right];$$

ce qui est précisément la relation (A).

II. Cette formule (A) peut être considérée comme un cas-*limite* d'une formule plus générale, à laquelle on parvient aisément en partant de l'équation

$$\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}} = 2\int_0^\infty \frac{e^{\theta x}+e^{-\theta x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin px\,dx \qquad (1),$$

démontrée par Poisson (**).

En effet, le second membre est la même chose que

(*) *Traité élémentaire des Séries*, p. 115.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, 18e Cahier, p. 297.

$$2\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{(\pi-2\theta)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\, e^{-(\pi-\theta)x}\sin px\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty \left[1+\frac{e^{(\pi-2\theta)x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\right] e^{-(\pi-\theta)x}\sin px\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-(\pi-\theta)x}\sin px\,dx + 2\int_0^\infty \frac{e^{-\theta x}+e^{-(2\pi-\theta)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin px\,dx.$$

Lorsque θ est inférieur à π, chacune de ces intégrales est finie et déterminée : la première a pour valeur (*) $\frac{p}{p^2+(\pi-\theta)^2}$; donc

$$\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+2\cos\theta+e^{-p}} = \frac{2p}{p^2+(\pi-\theta)^2} + 2\int_0^\infty \frac{e^{-\theta x}+e^{-(2\pi-\theta)x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\sin px\,dx;$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-\theta)x}+e^{-(\pi-\theta)x}}{e^{2\pi x}-1}\sin px\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+2\cos\theta+e^{-p}} - \frac{p}{p^2+(\pi-\theta)^2}. \quad \text{(B)}$$

III. Si, dans cette relation générale, on suppose successivement

$$\theta = 0,\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \theta = \pi,$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 16e Cahier, p. 219.

on trouve

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{2\pi x} - 1} \sin px\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{e^p - 1}{e^p + 1} - \frac{p}{p^2 + \pi^2} \qquad \text{(C)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\, dx}{e^{\frac{\pi}{2} x}\left(e^{\pi x} - 1\right)} = \frac{1}{2}\, \frac{e^{2p} - 1}{e^{2p} + 1} - \frac{p}{p^2 + \frac{\pi^2}{4}} \qquad \text{(D)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin px\, dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{4}\, \frac{e^p - 1}{e^p + 1} - \frac{1}{2p}.$$

La dernière formule ne diffère pas de (A). Elle est, comme nous l'avons annoncé, comprise dans la relation (B) (*); mais, à cause de l'hypothèse $\theta < \pi$, d'où l'on est parti, une démonstration directe était nécessaire.

IV. Multiplions les deux membres de l'équation (B) par $d\theta$, et intégrons à partir de $\theta = 0$. A cause des formules

$$\int_0^\theta e^{-\theta x}\, dx = \frac{1 - e^{-\theta x}}{x}, \qquad \int_0^\theta e^{\theta x}\, dx = \frac{e^{\theta x} - 1}{x},$$

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{e^p + 2\cos\theta + e^{-p}} = \frac{2}{e^p - e^{-p}}\, \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta\right],$$

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{p^2 + (\pi - \theta)^2} = \frac{1}{p} \operatorname{arc\,tg} \frac{p\theta}{p^2 + \pi(\pi - \theta)},$$

(*) Celle-ci est due aussi à Poisson (Mars 1867).

que l'on vérifie aisément, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}\left(1-e^{-\theta x}\right)+e^{-\pi x}\left(e^{\theta x}-1\right)}{e^{2\pi x}-1}\,\frac{\sin px}{x}\,dx$$

$$=\operatorname{arctg}\left[\frac{e^{\frac{p}{2}}-e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}}+e^{-\frac{p}{2}}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right]-\operatorname{arctg}\frac{p\theta}{p^2+\pi(\pi-\theta)},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{\theta}{2}x}-e^{-\frac{\theta}{2}x}\right)\left[e^{\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)x}+e^{-\left(\pi-\frac{\theta}{2}x\right)}\right]}{e^{2\pi x}-1}\,\frac{\sin px}{x}\,dx$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{e^p-1}{e^p+1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right)-\operatorname{arctg}\frac{p\theta}{p^2+\pi(\pi-\theta)} \qquad \text{(E).}$$

V. Soit, comme cas particulier, $\theta=\frac{\pi}{2}$: la dernière formule devient, après quelques simplifications,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}-e^{\frac{\pi}{2}x}+1}{e^{\pi x}+1}\,e^{-\pi x}\,\frac{\sin px}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\left(\frac{e^p-1}{e^p+1}\right)-\operatorname{arctg}\frac{p\pi}{2p^2+\pi^2}.$$

Le premier membre se décompose en

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\,\frac{\sin px}{x}\,dx-\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x}+1}\,\frac{\sin px}{x}\,dx.$$

D'ailleurs (*),

$$\int_0^\infty e^{-\pi x}\,\frac{\sin px}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\frac{p}{\pi};$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 16e Cahier, p. 220.

donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\pi x}+1}\,\frac{\sin px}{x}\,dx = arc\,\mathrm{tg}\,\frac{2p}{\pi} - arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{e^p-1}{e^p+1}\right) \qquad (\mathrm{F}).$$

VI. Si l'on prend les dérivées des deux membres, par rapport au paramètre p, on a encore

$$\int^\infty \frac{\cos px\,dx}{e^{\frac{\pi}{2}x}\left(e^{\pi x}+1\right)} = \frac{2\pi}{\pi^2+4p^2} - \frac{e^p}{e^{2p}+1} \qquad (\mathrm{G});$$

et, en supposant $p = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\frac{\pi}{2}x}\left(e^{\pi x}+1\right)} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2};$$

formule presque évidente.

XLVI. — SUR LA SOMMATION DE CERTAINS COEFFICIENTS BINOMIAUX (1861) (*).

I. *Problème. — Dans le développement de* $(1+z)^m$, *on prend les termes de* p *en* p. *Quelle est la somme de leurs coefficients?* (L'exposant m est supposé entier positif) (**).

Représentons par S_0, S_1,..., S_{p-1} les sommes dont les premiers termes sont $1, \frac{m}{1}, \ldots, \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}$.

(*) Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XX.

(**) Un jeune géomètre, M. Haton de la Goupillière, a résolu la même question pour le cas d'une fonction quelconque. Néanmoins, à cause de la simplicité du résultat exprimé par la formule (C), j'ai cru pouvoir le faire connaître.

Soit θ une racine *primitive* de l'équation

$$\theta^p - 1 = 0. \qquad (1).$$

En remplaçant z, successivement, par θ, θ^2, . . . , θ^p, nous aurons, en vertu de cette équation,

$$\left.\begin{array}{llll}
(1+\theta)^m & = S_0 + S_1\theta & + \cdot \cdot \cdot + S_{p-1} & \theta^{p-1}, \\
(1+\theta^2)^m & = S_0 + S_1\theta^2 & + \cdot \cdot \cdot + S_{p-1} & \theta^{2(p-1)}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(1+\theta^{p-1})^m & = S_0 + S_1\theta^{p-1} & + \cdot \cdot \cdot + S_{p-1} & \theta^{(p-1)(p-1)}, \\
(1+1)^m & = S_0 + S_1 & + \cdot \cdot \cdot + S_{p-1}. &
\end{array}\right\} (2).$$

II. Pour tirer, des équations (2), la valeur de S_k, il suffit de les ajouter membre à membre, après avoir multiplié par θ^{-k} les deux membres de la première, par θ^{-2k} les deux membres de la deuxième, etc. En effet, le coefficient de $S_{k'}$, dans l'équation résultante, est

$$\theta^{k'-k} + \theta^{2(k'-k)} + \cdot \cdot \cdot + \theta^{p(k'-k)} = 0,$$

attendu que k' et k, étant inégaux et inférieurs à p, $\theta^{k'-k}$ est une racine primitive de l'équation (1).

Par suite,

$$pS_k = (1+\theta)^m\,\theta^{-k} + (1+\theta^2)^m\,\theta^{-2k} + \cdot \cdot \cdot + (1+\theta^p)^m\,\theta^{-pk} \qquad (3).$$

III. Soit maintenant

$$\theta = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi \qquad (4);$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}
1+\theta = 2\cos\frac{1}{2}\varphi \,.\, e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}\,, \\
1+\theta^2 = 2\cos\frac{2}{2}\varphi \,.\, e^{\frac{2}{2}\varphi\sqrt{-1}}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1+\theta^p = 2\cos\frac{p}{2}\varphi \,.\, e^{\frac{p}{2}\varphi\sqrt{-1}}\,.
\end{array}\right\}$$

La formule (3) devient

$$pS_k = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2}\varphi \,.\, e^{\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} + \cos^m \frac{2}{2}\varphi \,.\, e^{2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} \\ + \dots \qquad + \cos^m \frac{p}{2}\varphi \,.\, e^{p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} \end{array} \right\}.$$

Par conséquent

$$pS_k' = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2}\varphi \cos\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \cos^m \frac{2}{2}\varphi \cos 2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi \\ + \dots \qquad + \cos^m \frac{p}{2}\varphi \cos p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi \end{array} \right\} \text{(A)},$$

et

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \cos^m \frac{1}{2}\varphi \sin\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \cos^m \frac{2}{2}\varphi \sin 2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi \\ + \dots \qquad + \cos^m \frac{p}{2}\varphi \sin p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi. \end{array} \right\} \text{(B)}.$$

IV. Très-souvent l'évaluation de la quantité entre parenthèses, dans la formule (A), est plus compliquée que la détermination *directe* de S_k. Mais, par cela même, l'équation (A) peut être regardée comme donnant la sommation de cette quantité. Pour plus de simplicité, posons

$$m - 2k = q,$$

et rappelons-nous que

$$\varphi = \frac{2\pi}{p};$$

nous aurons

$$\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \dots + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} = \frac{p}{2^m} S_k \text{ (C).}$$

Par exemple,

$$\cos^7\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{3}+\cos^7\frac{2\pi}{3}\cos\frac{10\pi}{3}+\cos^7\pi\cos 5\pi=\frac{3}{2^7}(7+35+1).$$

V. Si $k+p$ surpasse $m+1$, la somme S_k est composée d'un seul terme, égal à $C_{m,k}$; donc alors

$$\left.\begin{aligned}&\cos^m\frac{\pi}{p}\cos q\frac{\pi}{p}+\cos^m\frac{2\pi}{p}\cos 2q\frac{\pi}{p}+\cdots+\cos^m\frac{p\pi}{p}.\cos pq\frac{\pi}{p}\\&=\frac{p}{2^m}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\end{aligned}\right\}\text{(D)}.$$

Soient, pour fixer les idées,

$$m=13,\quad p=11,\quad k=3,\quad q=7:$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos^{13}\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}+\cos^{13}\frac{2\pi}{11}\cos\frac{14\pi}{11}+\cos^{13}\frac{3\pi}{11}\cos\frac{21\pi}{11}+\cdots\\&\qquad+\cos^{13}\pi\cos 7\pi=\frac{11}{2^{13}}.286.\end{aligned}\right\}$$

XLVII. — SUR LE THÉORÈME DE FERMAT (1861).

I. A la page 4 du Mémoire de Legendre (*Académie des Sciences*, 1863), on lit :

« p est divisible par $x+y$. Par une semblable raison p^n est
» divisible par $y+z$ et par $z+x$. Donc n étant un nombre
» impair quelconque, p^n sera divisible par le produit

» $(x+y)(y+z)(z+x)$ (*). »

Dans sa démonstration, Legendre a égard à l'équation

$$x^n+y^n+z^n=0 \qquad (1),$$

(*) Le Mémoire roule sur l'équation $x^n+y^n+z^n=0$; p représente $x+y+z$.

dont il s'agit de prouver l'impossibilité, x, y, z étant des entiers, positifs ou négatifs; donc il ne peut être question que de divisibilité *numérique*. Or, rien ne prouve que les *nombres* $x+y$, $y+z$, $z+x$ soient premiers entre eux, deux à deux; et, par conséquent, la démonstration laisse à désirer. On peut la compléter comme il suit :

$$p^n - x^n - y^n - z^n = \mathrm{P}$$

est divisible, *algébriquement*, par les binômes $x+y$, $y+z$, $z+x$. Donc, ceux-ci étant des quantités premières, P est divisible, *algébriquement aussi*, par le produit $(x+y)(y+z)(z+x)$. Si l'on remplace x, y, z par des nombres entiers quelconques, le quotient Q deviendra un *nombre entier*; et, *si l'équation* (1) *est vérifiée par les valeurs attribuées à* x, y, z, p^n *sera divisible, numériquement, par* $(x+y)(y+z)(z+x)$. D'après le Théorème de Fermat, non encore démontré, l'équation (1) est impossible en nombres entiers; donc a, b, c *étant des nombres entiers*, $(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})^n$ *n'est peut-être jamais divisible* par

$$(b+c)(c+a)(a+b).$$

II. On peut se proposer de connaître le quotient de P par

$$(x+y)(y+z)(z+x)\,(^*).$$

Soient

$$\mathrm{P} = (x+y)\,\mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q} = (y+z)\,\mathrm{Q}', \quad \mathrm{Q}' = (z+x)\,\mathrm{Q}''.$$

$$1^\circ\ \mathrm{Q} = \frac{p^n - x^n - y^n - z^n}{x+y} = \frac{p^n - z^n}{p-z} - \frac{x^n + y^n}{x+y},$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Q} = {} & p^{n-1} + zp^{n-2} + z^2p^{n-3} + \cdots + z^{n-1} \\ & - \left(x^{n-1} - yx^{n-2} + y^2x^{n-3} - \cdots + y^{n-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

(*) Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons n *impair et plus grand que* 3.

2° La première ligne, divisée par $y+z=p-x$, donne pour quotient

$$p^{n-2}+(x+z)p^{n-3}+(x^2+zx+z^2)p^{n-4}+\cdots+(x^{n-2}+zx^{n-3}+\cdots+z^{n-2}),$$

et, pour reste,

$$x^{n-1}+zx^{n-2}+z^2x^{n-3}+\cdots+x^{n-1}.$$

Par conséquent, si nous représentons par $H_q(x, z)$ la fonction homogène

$$x^q+zx^{q-1}+z^2x^{q-2}+\cdots+z^q,$$

nous aurons

$$Q'=p^{n-2}+H_1(x,z)p^{n-3}+H_2(x,z)p^{n-4}+\cdots+H_{n-2}(x,z)$$
$$+\frac{1}{y+z}\Big[(y+z)x^{n-2}-(y^2-z^2)x^{n-3}+(y^3+z^3)x^{n-4}-\cdots-(y^{n-1}-z^{n-1})\Big],$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} Q'=p^{n-2}+H_1(x,z)p^{n-3}+H_2(x,z)p^{n-4}+\cdots+H_{n-2}(x,z) \\ +x^{n-2}-(y-z)x^{n-3}+(y^2-yz+z^2)x^{n-4}-(y^3-y^2z+yz^2-z^3)x^{n-5}+\cdots \\ -(y^{n-2}-zy^{n-3}+z^2y^{n-4}-z^3y^{n-5}+\cdots-z^{n-2}) \end{array}\right\}(3).$$

3° Le quotient de la première ligne, par $x+z=p-y$, est

$$p^{n-3}+H_1p^{n-4}+H_2p^{n-5}+\cdots+H_{n-3}\ (*);$$

et le reste :

$$y^{n-2}+H_1(x,z)y^{n-3}+H_2(x,z)y^{n-4}+\cdots+H_{n-2}(x,z).$$

(*) Ici, $H_1=x+y+z$, $H_2=x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy$, etc. Voyez, sur ce point, la Note XL, p. 169.

Donc

$$Q'' = p^{n-3} + H_1 p^{n-4} + H_2 p^{n-5} + \cdot \cdot \cdot + H_{n-3}$$

$$+ \frac{1}{x+z}\Big[y^{n-2} + H_1(x, z)\, y^{n-3} + H_2(x, z)\, y^{n-4} + \dots + H_{n-2}(x, z)$$

$$+ x^{n-2} - (y-z)\, x^{n-3} + (y^2 - yz + z^2)\, x^{n-4} - \dots.$$

$$-(y^{n-2} - zy^{n-3} + z^2 y^{n-4} - \cdot \cdot \cdot \cdot - z^{n-2})\Big].$$

Les fonctions

$$H_1(x, z) = x + z, \quad H_3(x, z) = x^3 + zx^2 + z^2 x + z^3,$$

$$H_5(x, z) = x^5 + zx^4 + z^2 x^3 + z^3 x^2 + z^4 x + z^5, \dots,$$

sont divisibles par $x + z$: les quotients

$$1, \quad x^2 + z^2, \quad x^4 + x^2 z^2 + z^4, \dots$$

sont des fonctions homogènes de x^2, z^2; par conséquent

$$Q'' = p^{n-3} + H_1 p^{n-4} + H_2 p^{n-5} + \cdot \cdot \cdot + H_{n-3}$$

$$+ y^{n-3} + H_1(x^2, z^2)\, y^{n-5} + H_2(x^2, z^2)\, y^{n-7} + \cdot \cdot \cdot + H_{\frac{n-3}{2}}(x^2, z^2)$$

$$\frac{1}{x+z}\Big[y^{n-2} + H_2(x, z)\, y^{n-4} + H_4(x, z)\, y^{n-6} + \dots + H_{n-3}(x, z)\, y$$

$$+ x^{n-2} - (y-z)\, x^{n-3} + (y^2 - yz + z^2)\, x^{n-4} - \dots$$

$$-(y^{n-2} - zy^{n-3} + z^2 y^{n-4} - \dots - z^{n-2})\Big].$$

La première ligne entre parenthèses, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, devient

$$yx^{n-3}+yzx^{n-4}+(yz^2+y^3)x^{n-5}+(yz^3+y^3z)x^{n-6}+(yz^4+y^3z^2+y^5)x^{n-7}+\cdots$$
$$+yz^{n-3}+y^3z^{n-5}+\cdot\cdot\cdot+y^{n-4}z^2+y^{n-2}\,;$$

donc la quantité entre parenthèses égale

$$x^{n-2}+zx^{n-3}+(y^2+z^2)x^{n-4}+(y^2z+z^3)x^{n-5}+(y^4+y^2z^2+z^4)x^{n-6}$$
$$+(y^4z+y^2z^3+z^5)x^{n-7}+\cdots+y^{n-3}z+y^{n-5}z^3+\cdots+z^{n-4}\,;$$

c'est-à-dire

$$x^{n-2}+zx^{n-3}+\mathrm{H}_1(y^2,z^2)x^{n-4}+\mathrm{H}_1(y^2,z^2)zx^{n-5}+\mathrm{H}_2(y^2,z^2)x^{n-6}$$
$$+\mathrm{H}_2(y^2,z^2)zx^{n-7}+\cdot\cdot\cdot\;+z\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(y^2,z^2).$$

De là résulte

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Q}''=p^{n-3}&+\mathrm{H}_1p^{n-4}+\mathrm{H}_2p^{n-5}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{H}_{n-3}\\ &+y^{n-3}+\mathrm{H}_1(x^2,z^2)y^{n-5}+\mathrm{H}_2(x^2,z^2)y^{n-7}+\cdots+\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(x^2,z^2)\\ &+x^{n-3}+\mathrm{H}_1(y^2,z^2)x^{n-5}+\mathrm{H}_2(y^2,z^2)x^{n-7}+\cdots+\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(y^2,z^2)\end{aligned}\right\}(4);$$

ou, plus simplement

$$\mathrm{Q}''=p^{n-3}+\mathrm{H}_1p^{n-4}+\mathrm{H}_2p^{n-5}+\cdot\cdot\cdot+\mathrm{H}_{n-3}+2\mathrm{H}_{\frac{n-3}{2}}(x^2,y^2,z^2)\ (5).$$

En effet, chacune des deux dernières lignes de la formule (4) représente la fonction homogène de x^2, y^2, z^2, du degré $n-3$.

III. Comme application, prenons $n = 7$; nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(x+y+z)^7-x^7-y^7-z^7}{(y+z)(z+x)(x+y)} = (x+y+z)^4 + (x+y+z)(x+y+z)^3 \\
&+ (x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)(x+y+z)^2 \\
&+ (x^3+y^3+z^3+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2+xyz)(x+y+z) \\
&+ x^4+y^4+z^4+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3+x^3y+xy^3 \\
&+ x^2yz+y^2zx+z^2xy+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2 \\
&+ 2(x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)
\end{aligned}\right\} (6).$$

IV. Divisons par $y + z$ le polynôme entier Q''; représentons par A le quotient et par a le reste, de manière que

$$\frac{(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n}{(y+z)(z+x)(x+y)} = A(y+z) + a.$$

La règle ordinaire donne

$$a = n\frac{x^{n-1} - z^{n-1}}{x^2 - z^2}.$$

Conséquemment

$$Q''(x^2 - z^2) = A(y+z)(x^2 - z^2) + n(x^{n-1} - z^{n-1});$$

et, par une permentation tournante,

$$Q''(y^2 - x^2) = B(z+x)(y^2 - x^2) + n(y^{n-1} - x^{n-1}),$$

$$Q''(z^2 - x^2) = C(x+y)(z^2 - y^2) + n(z^{n-1} - y^{n-1}).$$

Ajoutant ces trois égalités, nous trouvons

$$A(y+z)(x^2-z^2) + B(z+x)(y^2-x^2) + C(x+y)(z^2-y^2) = 0.$$

Les deux derniers termes sont divisibles par $x + y$; donc A est également divisible par ce binôme. Autrement dit :

Le polynôme Q″ *n'est généralement pas divisible par* y + z; *mais*, A *désignant le quotient entier de* Q″ *par* y + z, A *est divisible par* y + x. De même, le quotient de Q″ par $z + y$ est divisible par $z + x$; le quotient de Q″ par $z + x$ est divisible par $z + y$; etc.

V. Si x, y, z sont remplacés par des nombres entiers, la propriété précédente peut être formulée ainsi :

$$\frac{(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n}{(y+z)(z+x)(x+y)} - n\,\frac{x^{n-1} - z^{n-1}}{x^2 - z^2}$$

$$= \mathcal{M}\,.\,(y+z)(y+x) = \mathcal{M}\,(y+z)(z+x) \qquad (7).$$

Par exemple,

$$\frac{9^5 - 3^5 - 4^5 - 2^5}{6\,.\,5\,.\,7} - 5\,.\,\frac{3^4 - 2^4}{3^2 - 2^2} = \frac{59\,049 - 243 - 1024 - 32}{210} - 5(9+4)$$

$$= 210 = \mathcal{M}\,.\,42 = \mathcal{M}\,.\,30.$$

De même, quand $x = z = 1$, et $y = 3$:

$$\frac{5^5 - 3^5 - 2}{2\,.\,4^2} - \frac{5\,.\,4}{2} = \frac{3\,125 - 243 - 2}{32} - 10 = 80 = \mathcal{M}\,.\,16.$$

XLVIII. — SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ (1861) (*).

I. En désignant par A_n la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de l'équation

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1),$$

on a, comme l'on sait,

$$A_n = -pA_{n-2} - qA_{n-3},$$

(*) *Comptes-Rendus*, tome LIV, p. 659.

à partir de $n = 3$. En même temps,

$$A_0 = 3, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -2p.$$

II. Si l'on forme successivement les valeurs de A_3, A_4, A_5, . . . , on trouve bientôt qu'elles sont comprises dans les deux formules

$$\left.\begin{aligned} \mp A_{2k+1} = (2k+1)\Big[& p^{k-1}q - \frac{(k-2)(k-3)}{2\,.\,3}p^{k-4}q^3 \\ & + \frac{(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}p^{k-7}q^5 \\ & - \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}p^{k-10}q^7 + \ldots \Big] \end{aligned}\right\} (3),$$

$$\left.\begin{aligned} \pm A_{2k} = 2p^k - (2k)\Big[& \frac{k-2}{2}p^{k-3}q^2 - \frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{2\,.\,3\,.\,4}p^{k-6}q^4 \\ & + \frac{(k-4)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}p^{k-9}q^6 - \ldots \Big] \end{aligned}\right\} (4);$$

dont la vérification est facile (*).

III. Le cas particulier de $p = 1$, $q = -1$ conduit à un résultat curieux.

On trouve, en effet, à cause de

$$A_n = -A_{n-2} + A_{n-3} \qquad (5):$$

$A_2 = -2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2$, $A_5 = -5$, $A_6 = 1$, $A_7 = 7$, $A_8 = 6$, $A_9 = -6$, $A_{10} = 13$, $A_{11} = 0$, $A_{12} = -19$, . . .

Ainsi, au moins jusqu'à une certaine valeur de n, *le nombre entier* A_n *est ou n'est pas divisible par* n, *suivant que* n *est ou n'est pas premier*. Au moyen de la formule (3), on démontre aisément la première partie de cette proposition.

(*) On doit prendre les signes supérieurs si k est *pair*.

Si la seconde partie était également démontrée, on aurait un *criterium* analogue au Théorème de Wilson (mais incomparablement plus simple (*)), pour reconnaître si un nombre est premier ou non premier.

IV. Si l'on suppose $p = -1$, $q = -1$, on trouve des résultats analogues à ceux qui viennent d'être indiqués :

$$A_3 = 2,\quad A_3 = 3,\quad A_4 = 2,\quad A_5 = 5,\quad A_6 = 5,\quad A_7 = 7,\quad A_8 = 10,$$
$$A_9 = 12,\quad A_{11} = 22 = 11 \,.\, 2,\quad A_{12} = 29,\quad A_{13} = 39 = 13 \,.\, 3, \ldots$$

Addition. — (*Juillet* 1866).

V. Quelque temps après la publication de la Note précédente, M. *Eisenlohr* (**) démontra l'inexactitude de la proposition que j'avais énoncée *sous forme dubitative*. Malheureusement, M. Eisenlohr prend, pour point de départ, l'équation

$$0 = A_n - A_m \,.\, A_{n-m} + \left(\frac{A_m^2 - A_{2m}}{2}\right) A_{n-2m} - A_{n-3m},$$

qui n'est nullement évidente : la démonstration proposée est donc incomplète (***).

Les choses étant ainsi, j'ai cru nécessaire de continuer, beaucoup plus loin que je ne l'avais fait, le calcul des sommes désignées par A_n. On verra, par le tableau suivant, que A_{121} est divisible par 121 ; donc A_n ***peut être divisible par*** n, ***sans que*** n ***soit premier.***

(*) Les valeurs de A_n croissent très-lentement : $A_{33} = 3$, $A_{33} = -26\,924$.

(**) *Comptes-Rendus*, tome LV, p. 64.

(***) Je n'affirme point qu'elle soit fausse.

Sommes des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

n	A_n	n	A_n	n	A_n	n	A_n
1	0	31	31 . 13	61	61 . 3 751	91	54 392 631
2	— 2	32	— 870	62	— 117 647	92	35 359 466
3	3	33	3	63	— 255 065	93	— 103 843 022
4	2	34	1 273	64	346 458	94	19 033 165
5	— 5	35	— 873	65	137 418	95	139 202 488
6	1	36	— 1 270	66	— 601 523	96	— 122 876 187
7	7	37	37 . 58	67	67 . 3 120	97	— 97 . 1 238 859
8	— 6	38	398	68	738 941	98	262 078 675
9	— 6	39	— 3 416	69	— 810 563	99	— 2 706 864
10	13	40	1 749	70	— 529 901	100	— 382 247 998
11	0	41	41 . 93	71	71 . 21 284	101	101 . 2 621 639
12	— 19	42	— 5 165	72	— 280 662	102	379 541 134
13	13	43	— 43 . 48	73	— 73 . 28 485	103	— 103 . 6 281 879
14	19	44	8 978	74	1 830 166	104	— 114 755 595
15	— 32	45	— 3 101	75	1 798 743	105	1 026 574 671
16	— 6	46	— 11 042	76	— 3 909 571	106	— 532 277 942
17	17 . 3	47	47 . 257	77	31 423	107	— 107 . 10 666 638
18	— 26	48	7 941	78	5 708 314	108	1 558 852 613
19	— 19 . 3	49	— 23 121	79	— 79 . 49 886	109	109 . 5 587 636
20	77	50	4 138	80	— 5 676 891	110	— 2 700 182 879
21	31	51	31 062	81	9 649 308	111	949 800 289
22	— 134	52	— 27 259	82	1 735 897	112	3 309 235 203
23	46	53	— 53 . 508	83	— 83 . 184 653	113	— 113 . 32 300 736
24	165	54	58 321	84	7 913 411	114	— 2 359 434 914
25	— 180	55	— 335	85	17 062 096	115	6 959 218 371
26	— 119	56	— 85 245	86	— 23 239 610	116	— 1 290 548 254
27	345	57	58 656	87	— 9 148 685	117	— 9 318 653 285
28	— 61	58	84 910	88	40 301 706	118	8 249 766 625
29	— 29 . 16	59	— 59 . 2 439	89	— 89 . 158 325	119	8 028 105 031
30	406	60	— 26 254	90	— 49 450 391	120	— 17 568 419 910
						121	121 . 1 831 914

XLIX. — RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE A UN POLYÈDRE SEMI-RÉGULIER. (MARS 1862) (*).

Le centre O de la sphère, les centres C, C' de deux faces adjacentes, et le milieu P de l'arète c commune à ces deux faces, sont les sommets d'un quadrilatère OCPC', dans lequel les angles C, C' sont droits : ce quadrilatère est donc inscrit à la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

Représentons par p, q les diagonales OP, CC'; par α l'angle CPC'; par a, a' les *apothèmes* CP, C'P des faces dont C, C' sont les centres. Soient, en outre, n, n' les nombres de côtés de ces faces, et n'' le nombre des côtés de la face qui, avec les deux premières, constitue un angle trièdre du polyèdre (**).

La diagonale $OP = p$ est perpendiculaire au milieu de c; donc, R étant le rayon de la sphère circonscrite,

$$R^2 = p^2 + \frac{c^2}{4} \qquad (1).$$

La corde CC' sous-tendant un arc *capable* de l'angle α, dans une circonférence dont le diamètre est p,

$$q = p \sin \alpha \qquad (2).$$

De plus,

$$q^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \alpha \qquad (3).$$

La formule fondamentale de trigonométrie sphérique donne ensuite, comme on le voit aisément,

(*) Question résolue à l'occasion de mon *Mémoire sur la Théorie des Polyèdres* (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, 41e cahier).

(**) Voir le Mémoire cité. Voir aussi la brochure intitulée : *Histoire d'un Concours*.

$$\cos\alpha = -\frac{\cos\dfrac{2\pi}{n''} + \cos\dfrac{2\pi}{n}\cos\dfrac{2\pi}{n'}}{\sin\dfrac{2\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n'}} \qquad (4).$$

Enfin (*)

$$a = \frac{c}{2}\cot\frac{\pi}{n} \quad (5), \qquad a' = \frac{c}{2}\cot\frac{\pi}{n'} \qquad (6).$$

Il s'agit donc d'éliminer p, q, α, a, a' entre ces six équations.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{\pi}{n} = \lambda, \quad \frac{\pi}{n'} = \mu, \quad \frac{\pi}{n''} = \nu; \qquad (7)$$

et nous aurons d'abord, en éliminant a, a' :

$$q^2 = \frac{c^2}{4}(\cot^2\lambda + \cot^2\mu - 2\cot\lambda\cot\mu\cos\alpha) \qquad (8),$$

$$\cos\alpha = -\frac{\cos 2\nu + \cos 2\lambda\cos 2\mu}{\sin 2\lambda\sin 2\mu} \qquad (9).$$

On conclut, de la dernière formule,

$$\sin^2\alpha = -4\frac{\cos(\lambda+\mu+\nu)\cos(\mu+\nu-\lambda)\cos(\nu+\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu-\nu)}{(\sin 2\lambda\sin 2\mu)^2},$$

$$\cot^2\lambda + \cot^2\mu - 2\cot\lambda\cot\mu\cos\alpha = \left(\frac{\cos\nu}{\sin\lambda\sin\mu}\right)^2;$$

donc

$$q = \frac{c}{2}\,\frac{\cos\nu}{\sin\lambda\sin\mu},$$

(*) Voir le Mémoire.

et

$$p^2 = -c^2 \frac{\cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu}{\cos(\lambda+\mu+\nu)\cos(\mu+\nu-\lambda)\cos(\nu+\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu-\nu)}.$$

La substitution dans (1) donne ensuite

$$R^2 = \frac{c^2}{4}\left[1 - 4\frac{\cos^2\lambda\cos^2\mu\cos^2\nu}{\cos(\lambda+\mu+\nu)\cos(\mu+\nu-\lambda)\cos(\nu+\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu-\nu)}\right] \quad \text{(A)},$$

ou, par un calcul que nous omettons (*),

$$R^2 = -\frac{c^2}{4}\frac{(\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu)(-\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu)(\cos\lambda-\cos\mu+\cos\nu)(\cos\lambda+\cos\mu-\cos\nu)}{\cos(\lambda+\mu+\nu)\cos(\mu+\nu-\lambda)\cos(\nu+\lambda-\mu)\cos(\lambda+\mu-\nu)} \quad \text{(B)}.$$

L. — SUR UNE FRACTION RATIONNELLE (DÉCEMBRE 1862).

I. Soit

$$y = \frac{(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}} \quad (1).$$

A cause de

$$\frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} : \frac{1-x^2}{1-x^{2n+2}} = \frac{1+x}{1+x^{n+1}},$$

$$y = \frac{(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x)}{1+x^{n+1}},$$

ou

$$y = 1 + 2\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{1+x^{n+1}} \quad (2).$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1863), p. 275 et 456.

II. Quand x est compris $+1$ et -1, on a

$$\frac{1}{1+x^{n+1}} = 1 - x^{n+1} + x^{2n+2} - x^{3n+3} + \ldots\ldots ;$$

donc

$$y = 1 + 2\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \left[x^{p(n+1)+1} + x^{p(n+1)+2} + \ldots + x^{p(n+1)+n}\right] \quad (3).$$

Par exemple,

$$\frac{(1+x+x^2+x^3)^2}{1+x^2+x^4+x^6} = 1 + 2\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \left[x^{4p+1} + x^{4p+2} + x^{4p+3}\right],$$

ou

$$\frac{(1+x)^2(1+x^2)}{1+x^4} = 1+2\left[x+x^2+x^3-x^5-x^6-x^7+x^9+x^{10}+x^{11}-\ldots\right] \quad (4);$$

ce qui est exact.

III. Si, après avoir multiplié par dx les deux membres de l'équation (3), on intègre entre 0 et 1, on trouve

$$\int_0^1 y\,dx = 1+2\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\left[\frac{1}{p(n+1)+2}+\frac{1}{p(n+1)+3}+\cdots+\frac{1}{(p+1)(n+1)}\right] (5).$$

D'un autre côté, l'égalité (2) peut être écrite ainsi :

$$y = 1 + 2\,\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}{1+x^{n+1}} + 2\,\frac{x^n}{1+x^{n+1}} - \frac{2}{1+x^{n+1}};$$

donc

$$\int_0^1 y\,dx = 1+2\int_0^1 \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{1+x^{n+1}}dx + \frac{2}{n+1}\,\mathrm{l}.2 - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^{n+1}}.$$

14

En vertu de la formule

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}+x^{a-b-1}}{1+x^a}dx = \frac{\pi}{a}\frac{1}{\sin\frac{b}{a}\pi},$$

due à Euler, on a

$$2\int_0^1 \frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{1+x^{n+1}}dx = \frac{\pi}{n+1}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{n+1}}\right].$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^{n+1}} = \sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\frac{1}{p(n+1)+1}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 y\,dx = 1+\frac{\pi}{n+1}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{n+1}}\right] \\ \displaystyle\qquad +\frac{2}{n+1}\,\mathrm{l}.2-2\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\frac{1}{p(n+1)+1}\end{array}\right\}(6).$$

Égalant les valeurs (5) et (6), nous trouvons

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p\left[\frac{1}{p(n+1)+1}+\frac{1}{p(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(p+1)(n+1)}\right] \\ \displaystyle=\frac{\pi}{2(n+1)}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n+1}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{n\pi}{n+1}}\right]+\frac{1}{n+1}\,\mathrm{l}.2\end{array}\right\}(7).$$

Par exemple,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\ldots$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{4}}\right]+\frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,2\,,$$

ou

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\pi}{8}(2\sqrt{2}+1)+\frac{1}{4}\mathrm{l}2 \qquad (8).$$

IV. Si, après avoir mis la fonction y sous la forme

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2\frac{1-x^2}{1-x^{2n+2}}=\frac{1-x^{n+1}}{1+x^{n+1}}\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+x-x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x+x^{n+1}-x^{n+2}}\,,$$

on prend la dérivée, on trouve

$$y'=2\frac{(1+x)\left[1+x^2+x^4+\cdot\cdot\cdot+x^{2n}-(n+1)x^n\right]}{(1-x)(1+x^{n+1})}.$$

Le polynôme entre parenthèses est divisible par $1-x$; donc, Q représentant le quotient,

$$y'=2\frac{(1+x)\,Q}{1+x^{n+1}} \qquad (9).$$

Ecrivant ainsi le polynôme dividende :

$$(n+1)(1-x^n)-(1-x^2)-(1-x^4)-\cdot\cdot\cdot-(1-x^{2n}),$$

on a, immédiatement,

$$Q=(n+1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})-(1+x)-(1+x+x^2+x^3)$$
$$-(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)-\ldots-(1+x+x^2+\ldots+x^{2n-1}) \qquad (10),$$

ou

$$Q=(1+x)+2(x^2+x^3)+3(x^4+x^5)+\ldots-2(x^{2n-4}+x^{2n-3})-(x^{2n-2}+x^{2n-1})(^*)\ (11).$$

V. Malgré la complication du polynôme Q, on s'assure aisément qu'il ne peut admettre, comme diviseurs réels, que $1 - x$ et $1 + x$ (**).

En effet, de

$$(1-x)\,Q = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} - (n+1)\,x^n,$$

résulte

$$(1-x)(1-x^2)\,Q = 1 - x^{2n+2} - (n+1)\,x^n + (n+1)\,x^{n+2}\,;$$

et l'équation

$$\varphi(x) = x^{2n+2} - (n+1)\,x^{n+2} + (n+1)\,x^n - 1 = 0 \qquad (12)$$

n'a pas plus de *quatre* ou de *six* racines réelles, suivant que n est *impair* ou *pair*. Or, dans le premier cas, $\varphi(x)$ est divisible par $(1-x)^3\,(1+x)$; et, dans le second, $\varphi(x)$ est divisible par $(1-x)^3\,(1+x)^3$; etc.

VI. D'après cette discussion sommaire, la fonction y a un seul maximum, répondant à $x = 1$, et dont la valeur est $n + 1$; elle a aussi un seul minimum, répondant à $x = -1$, minimum dont la valeur est 0 ou $\dfrac{1}{n+1}$, suivant que n est *impair* ou *pair*.

(*) Suivant que n est *impair* ou *pair*, la *partie centrale* du polynôme est $\dfrac{n+1}{2}\left(x^{n-1} - x^n\right)$ ou $\dfrac{n}{2}\left(x^{n-2} + x^{n-1}\right) - \dfrac{n}{2}\left(x^n + x^{n+1}\right)$. Dans ce dernier cas, le polynôme est divisible par $1 + x$.

(**) D'après la formule (10) : 1° Q *est toujours divisible par* $1 - x$; 2° Q *est divisible par* $1 + x$ *quand* n *est pair*.

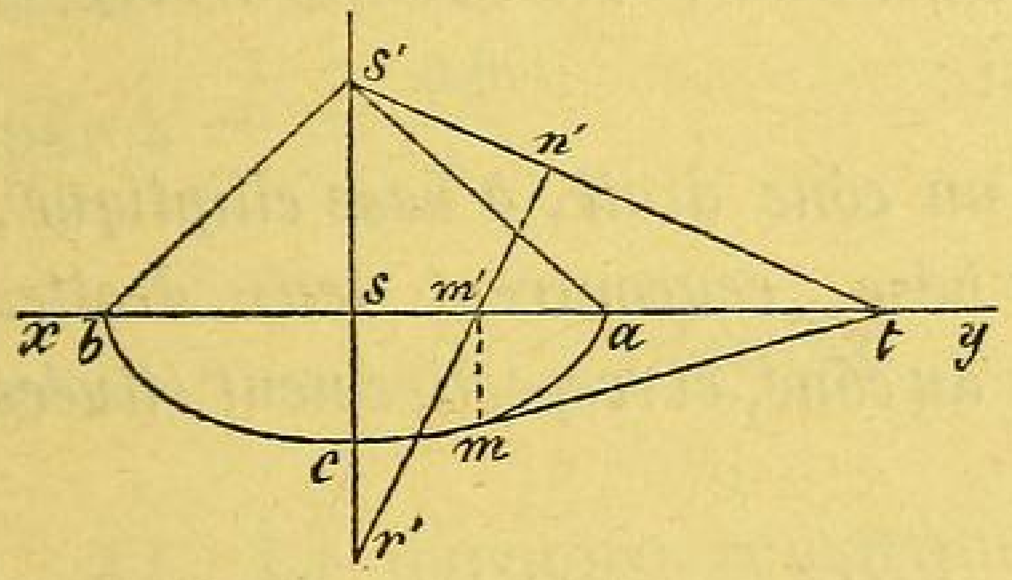
LI. — SUR LES NORMALES A UNE SURFACE (JANVIER 1863).

I. Dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique* (38e Cahier), M. Abel Transon démontre ce remarquable théorème, dû à Sturm (*) :

« *Soit* AN *la normale d'une surface au point* A; *toutes les normales, relatives aux points voisins* (**) *de* A, *rencontrent les deux droites élevées perpendiculairement à* AN *dans les plans des deux sections principales et par les centres de courbure de ces deux sections respectivement.* »

Si l'on remplace la surface S par l'ellipsoïde osculateur en A, et si l'on considère la section s de cet ellipsoïde par un plan parallèle au plan tangent en A, et infiniment voisin de celui-ci (***), les normales en tous les points de s rencontrent les droites dont il vient d'être question. On peut se demander si, la section s étant située à une distance *finie* de A, la même propriété subsisterait. Et comme on peut substituer, à l'ellipsoïde, le cône droit circonscrit suivant s (****), la question revient à celle-ci :

Les normales à un cône droit, à base elliptique, menées en tous les points de cette base, rencontrent-elles deux droites fixes?



II. Prenons, pour plan horizontal de projection, le plan même de la base du cône; et, pour plan vertical, celui de la section principale $as'b$. Les traces du plan tangent en un point quelconque (m, m') de la base sont la tangente mt et la

(*) *Comptes-Rendus*, tome XX, p. 1241.

(**) Lisez : *infiniment voisins*.

(***) La courbe s est *l'indicatrice* de S, pour le point A.

(****) La courbe s est dans un plan parallèle au plan d'une section principale de l'ellipsoïde.

droite ts'. Par suite, la projection verticale de la normale est $m'n'$ perpendiculaire à ts'.

Les triangles $sm'r'$, $ss't$, sont semblables ; donc

$$\frac{m's}{ss'} = \frac{r's}{st},$$

ou

$$m's \,.\, st = ss' \,.\, r's.$$

Mais, par une propriété de l'ellipse,

$$m's \,.\, st = \overline{as}^2 = a^2;$$

donc

$$r's = \frac{a^2}{ss'},$$

ou

$$r's = \frac{a^2}{h}, \qquad (1)$$

h étant la hauteur du cône.

La distance $r's$ étant constante, il s'ensuit que les normales rencontrent une droite fixe, projetée en r'. Si l'on avait projeté sur le *plan de profil* $s'sr'$, on serait arrivé à une conclusion semblable. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Les normales à un cône droit, à base elliptique, menées en tous les points de cette base, rencontrent deux droites fixes* A, B, *perpendiculaires à l'axe du cône, et respectivement situées dans les deux plans principaux.*

III. D'après ce précède (§ I), cette proposition peut être généralisée en ces termes :

THÉORÈME II. — *Les normales à une surface du second degré, en tous les points d'une section parallèle à l'un des plans principaux, rencontrent deux droites fixes, perpendiculaires à l'axe principal correspondant, et respectivement situées dans les deux autres plans principaux.*

IV. Revenons au cas du cône; appelons α, β les distances des droites A, B au plan de la base. Nous avons, d'après l'équation (1) :

$$\alpha = \frac{a^2}{h}, \qquad \beta = \frac{b^2}{h}.$$

Si α est pris arbitrairement, il en résulte

$$h = \frac{a^2}{\alpha}, \quad \beta = \frac{b^2}{a^2}\alpha;$$

et, par conséquent :

THÉORÈME III. — *Si les normales à une ellipse rencontrent une droite fixe* A, *parallèle à l'un des axes, et située dans le plan passant par cet axe, perpendiculairement au plan de la courbe, elles rencontrent aussi une droite fixe* B, *parallèle au second axe, et située dans le plan passant par cet axe, perpendiculairement au plan de la courbe.*

V. L'équation du *lieu des normales à la base du cône* est

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - hz)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - hz)^2} = 1.$$

Cette surface *gauche*, qui admet *deux directrices rectilignes*, admet aussi deux *sections circulaires*, déterminées par $z = \pm \frac{ab}{h}$.

Addition. — (*Avril* 1867).

VI. La dernière remarque démontre les propriétés suivantes :

THÉORÈME IV. — *Les normales à un cône droit, à base elliptique, menées en tous les points de cette base, rencontrent deux circonférences fixes, ayant pour axe commun l'axe du cône.*

THÉORÈME V. — *Les normales à une surface du second degré, en tous les points d'une section parallèle à l'un des plans principaux,* *rencontrent deux circonférences fixes, ayant pour axe commun celui qui correspond au plan principal considéré* (*).

LII. — LIEU GÉOMÉTRIQUE (MARS 1863).

En un point quelconque M *d'une ellipse donnée, on mène la tangente* TMT′, *la normale* MN, *puis les cordes* MP, MQ, *bissectrices des angles* NMT, NMT′; *puis encore les tangentes* PS, QS *en* P, Q.

Quel est le lieu du point S?

I. Supposons, pour un instant, que le point M soit fixe; prenons MT pour axe des abscisses, MN pour axe des ordonnées : l'équation de l'ellipse sera

$$Ay^2 + Bxy + x^2 + Dy = 0 \qquad (1).$$

Le système des droites MP, MQ est représenté par

$$y^2 - x^2 = 0 \qquad (2).$$

Ajoutant, et supprimant le facteur y, on trouve l'équation de la corde PQ :

$$(A + 1)\, y + Bx - D = 0 \;(^{**}) \qquad (3).$$

Soit R le point où PQ rencontre MN : d'après l'équation (3)

$$MR = \frac{D}{A+1}.$$

(*) Ce dernier énoncé, *pris à la lettre*, est en défaut dans certains cas, dont le lecteur fera aisément la discussion. Par exemple, *les normales à un paraboloïde, en tous les points d'une section parallèle à l'une des paraboles principales*, *rencontrent* une *droite fixe*.

(**) C'est ainsi que Terquem démontrait le théorème de Frégier : *Si un triangle rectangle* PMQ *est inscrit à une conique, et que le sommet* M *de l'angle droit soit fixe*, *l'hypoténuse* PQ *passe par un point fixe R, situé sur la normale en* M (*Nouvelles Annales*, tome II, p. 186).

II. Pour trouver les équations des tangentes PS, QS, il suffit de combiner successivement l'équation (1) avec

$$(y-x)^2=0\,,\quad (y+x)^2=0.$$

On obtient ainsi

$$(A-1)\,y+(B+2)\,x-D=0 \;(4),\quad (A-1)\,y+(B-2)\,x-D=0 \;(5).$$

Ces deux équations sont vérifiées par $x=0$, $y=\frac{D}{A-1}$; donc *les tangentes* PS, QS *se coupent sur la normale* MN.

De plus,

$$MS=\frac{D}{A-1};$$

et conséquemment,

$$\frac{1}{MR}+\frac{1}{MS}=\frac{2}{MN}.$$

Cette relation prouve que *les points* R, S *divisent harmoniquement la corde* MN. En effet, PQ *est la polaire de* S.

III. Rapportons l'ellipse à son centre et à ses axes; puis cherchons le lieu du point R. Il est facile de voir, par le théorème de Frégier, que ce point est situé sur le diamètre M'M'' conjugué de OM. On a donc, simultanément,

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \;(6),\quad \frac{y'}{x'}=-\frac{y}{x} \;(7),$$

$$a^2x'y-b^2xy'=c^2xy \qquad (8).$$

D'après l'équation (7), *le lieu du point* R *est une ellipse sem-*

blable à l'ellipse donnée. Éliminant x et y, on trouve

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \qquad (9).$$

IV. Le point S étant l'intersection de la normale en M avec la polaire de R, il faut, pour trouver l'équation du lieu cherché, éliminer x, y, x', y' entre les équations (6), (8), (9) jointes à

$$a^2\alpha y - b^2\beta x = c^2 xy \qquad (10),$$

$$a^2 y'\beta + b^2 x'\alpha = a^2 b^2 \qquad (11):$$

dans celles-ci, α, β représentent les coordonnées de S.

On satisfait aux équations (6), (8), (9) en prenant

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \quad x' = \frac{ac^2}{a^2 + b^2}\cos\varphi, \quad y' = -\frac{bc^2}{a^2 + b^2}\sin\varphi.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (10), (11), les transforment en

$$a\alpha\sin\varphi - b\beta\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi \qquad (10'),$$

$$b\alpha\cos\varphi - a\beta\sin\varphi = \frac{ab(a^2 + b^2)}{c^2} \qquad (11');$$

et il ne reste plus qu'à éliminer φ.

V. Soient, généralement, les équations

$$A\sin\varphi + B\cos\varphi = C\sin\varphi\cos\varphi \qquad (12),$$

$$A'\sin\varphi + B'\cos\varphi = C' \qquad (13).$$

On peut les remplacer par

$$\frac{C' - B'\cos\varphi}{A'} = \frac{B\cos\varphi}{C\cos\varphi - A}, \quad \frac{C' - A'\sin\varphi}{B'} = \frac{A\sin\varphi}{C\sin\varphi - B};$$

ou

$$CB' \cos^2 \varphi + (BA' - AB' - CC') \cos \varphi + AC' = 0\,,$$

$$CA' \sin^2 \varphi + (AB' - BA' - CC') \sin \varphi + BC' = 0.$$

On conclut, de ces deux-ci,

$$-B'(AB'-BA'-CC')\sin\varphi + A'(AB'-BA'+CC')\cos\varphi = (AA'+BB')C' + CA'B';$$

ou, pour abréger,

$$P \sin\varphi + Q \cos\varphi = R \qquad (14).$$

Les équations (13), (14) donnent immédiatement

$$(B'R - C'Q)^2 + (C'P - A'R)^2 = (A'Q - B'P)^2\,;$$

c'est-à-dire, après quelques réductions,

$$\left.\begin{aligned} &(A'^2 + B'^2)\Big[(A^2 + B^2)\,C'^2 - (AB' - BA')^2\Big] \\ &+ 2CC'\Big[AB'\,(B'^2 - C'^2) + BA'\,(A'^2 - C'^2)\Big] \\ &+ C^2\,(A'^2 - C'^2)\,(B'^2 - C'^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (15).$$

VI. Dans la question proposée,

$$A = a\alpha, \quad B = -b\beta, \quad C = c^2,$$

$$A' = b\alpha, \quad B' = -a\beta, \quad C' = \frac{ab\,(a^2 + b^2)}{c^2}\,;$$

en sorte que l'équation du lieu décrit par le point S est :

$$\left.\begin{aligned}&(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)\Big[(a^2+b^2)^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)-c^4(\alpha^2-\beta^2)^2\Big]\\&+2(a^2+b^2)\Big[c^4(a^2\beta^4+b^2\alpha^4)-a^2b^2(a^2+b^2)^2(\alpha^2+\beta^2)\Big]\\&+\Big[c^4\beta^2-b^2(a^2+b^2)^2\Big]\Big[c^4\alpha^2-a^2(a^2+b^2)^2\Big]=0\end{aligned}\right\}\quad(16).$$

VII. Si l'on veut construire la courbe par points, ou en faire la discussion, il est plus simple de résoudre les équations (10′), (11′) par rapport à α, β. On trouve ainsi

$$\alpha=\frac{a\cos\varphi}{c^2}\,\frac{(a^2+b^2)\,b^2-c^4\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi},$$

$$\beta=\frac{b\sin\varphi}{c^2}\,\frac{(a^2+b^2)\,a^2-c^4\cos^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi}.$$

LIII. — QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES (MAI 1865).

I. a étant une variable dont le module est inférieur à l'unité, soit

$$\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{2^2-a^2}+\frac{1}{3^2-a^2}-\frac{1}{4^2-a^2}+\cdots=\varphi(a)\qquad(1);$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3+a}\right)-\ldots=2\varphi(a)\;(2).$$

Soient ensuite

$$y=\frac{x^{1-a}}{1-a}-\frac{1}{2}\,\frac{x^{2-a}}{2-a}+\frac{1}{3}\,\frac{x^{3-a}}{3-a}-\cdots,$$

$$z=\frac{x^{1+a}}{1+a}-\frac{1}{2}\,\frac{x^{2+a}}{2+a}+\frac{1}{3}\,\frac{x^{3+a}}{3+a}-\cdots$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{-a-1}\,\mathrm{l}\,(1+x), \quad \frac{dz}{dx} = x^{a-1}\,\mathrm{l}\,(1+x);$$

et, par conséquent,

$$\varphi\,(a) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^a + x^{-a})\,\mathrm{l}(1+x)\frac{dx}{x} \tag{3}$$

On a d'ailleurs, par une formule connue (*),

$$\varphi\,(a) = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi} - 1\right) \tag{4}$$

donc

$$\int_0^1 (x^a + x^{-a})\,\mathrm{l}(1+x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi} - 1\right) \tag{A}$$

II. Multiplions par $a da$ les deux membres de l'équation (A), et intégrons à partir de $a = 0$. A cause de

$$\int_0^a \left(e^{al x} + e^{-al x}\right) a\,da = \frac{a}{\mathrm{l}x}\left(e^{al x} - e^{-al x}\right) - \frac{1}{(\mathrm{l}x)^2}\left(e^{al x} + e^{-al x} - 2\right)$$

$$= \frac{a}{\mathrm{l}x}\left(x^a - x^{-a}\right) - \frac{1}{(\mathrm{l}x)^2}\left(x^a + x^{-a} - 2\right),$$

et de

$$\int_0^a \left(\frac{\pi da}{\sin a\pi} - \frac{da}{a}\right) = \mathrm{l}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}}{\frac{a\pi}{2}},$$

(*) *Traité élémentaire des Séries*, p. 115.

nous aurons

$$\int_0^1 \frac{a\,\mathrm{l}x\left(x^a - x^{-a}\right) - \left(x^a + x^{-a} - 2\right)}{(\mathrm{l}x)^2}\,\mathrm{l}\,(1+x)\frac{dx}{x} = \mathrm{l}\,\frac{\mathrm{tg}\frac{a\pi}{2}}{\frac{a\pi}{2}} \qquad \text{(B).}$$

III. Si, dans les relations générales (A), (B), on suppose $a = \frac{1}{2}$, on trouve, en changeant x en x^2 :

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{l}\,(1+x^2)\,dx = \pi - 2 \qquad \text{(C),}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)\left[(x+1)\,\mathrm{l}\,x + (1-x)\right]}{(x\,\mathrm{l}\,x)^2}\,\mathrm{l}\,(1+x^2)\,dx = 2\,\mathrm{l}\,\frac{\pi}{4} \qquad \text{(D).}$$

IV. Ces mêmes relations deviennent, si l'on y remplace a par $a\sqrt{-1}$:

$$\int_0^1 \cos(a\,\mathrm{l}x)\,\mathrm{l}\,(1+x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2a^2}\left[1 - \frac{2a\pi}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}\right] \qquad \text{(E),}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\,\mathrm{l}x\right) - a\,\mathrm{l}x\cos\left(\frac{a}{2}\,\mathrm{l}x\right)}{(\mathrm{l}x)^2}\,\sin\left(\frac{a}{2}\mathrm{l}x\right)\mathrm{l}\,(1+x)\frac{dx}{x} \\ &\qquad = \frac{1}{4}\,\mathrm{l}\,\frac{e^{\frac{a\pi}{2}} - e^{-\frac{a\pi}{2}}}{\frac{a\pi}{2}\left(e^{\frac{a\pi}{2}} + e^{-\frac{a\pi}{2}}\right)} \end{aligned}\right\} \text{(F).}$$

Donc, en particulier,

$$\int_0^1 \frac{2\sin\frac{\mathrm{l}x}{4} - \mathrm{l}x\cos\frac{\mathrm{l}x}{4}}{(\mathrm{l}x)^2}\sin\frac{\mathrm{l}x}{4}\,\mathrm{l}(1+x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}{\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}\right)} \quad \text{(G)}.$$

V. Enfin, la combinaison des formules (D), (G) conduit aisément à celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{4x\left(\sin\frac{\mathrm{l}x}{2} - \mathrm{l}x\cos\frac{\mathrm{l}x}{2}\right)\sin\frac{\mathrm{l}x}{2} + (1-x)\left[(x+1)\mathrm{l}x + 1 - x\right]}{(x\,\mathrm{l}x)^2}\,\mathrm{l}(1+x^2)\,dx \\ &= 2\,\mathrm{l}\frac{e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}} \end{aligned}\right\} \text{(H)}.$$

VI. L'équation

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4+a^2} + \frac{1}{9+a^2} + \cdots = \frac{1}{2a^2}\left[a\pi\,\frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} - 1\right]$$

donnerait des résultats analogues aux précédents.

LIV. — SUR UNE TRANSFORMATION DE SÉRIE (JUIN 1864).

I. Dans un *Mémoire sur les Séries des nombres aux puissances harmoniques* (?), imprimé à Kasan, en 1832, M. Simonoff se propose la question suivante :

Connaissant

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \quad (1)$$

trouver

$$P = \quad A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \cdots \tag{2}$$

et

$$Q = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots \tag{3}.$$

L'emploi des exponentielles imaginaires le conduit aux formules :

$$Q = \frac{\varphi\left(e^{x\sqrt{-1}}\right) + \varphi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2} \tag{A},$$

$$P = \frac{\varphi\left(e^{x\sqrt{-1}}\right) - \varphi\left(e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} \tag{B}.$$

Prenant $\varphi(x) = \mathrm{l}(1 + x)$, ce qui lui donne

$$Q = \mathrm{l}\left(2 \cos \frac{1}{2} x\right),$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{-1}} \mathrm{l} \frac{1 + \sqrt{-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1 - \sqrt{-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x} = x,$$

l'auteur arrive enfin aux relations connues :

$$\frac{1}{2} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \cdots \quad (4)\,(^*),$$

$$\mathrm{l}\left(2 \cos \frac{1}{2} x\right) = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos 4x + \ldots \quad (5)\,(^{**}).$$

(*) Celle-ci a été donnée par Fourier (*Théorie de la Chaleur*, p. 238).

(**) Rapportée dans mon *Traité élémentaire des Séries.*

II. De ce développement, M. Simonoff en veut déduire un autre, ordonné suivant les puissances de x ; mais la méthode qu'il emploie est inadmissible (pour ne rien dire de plus) ; en effet, il s'énonce ainsi :

« La dernière série nous donnera

$$\log\cos\frac{1}{2}x = -(1-2+3-4+\text{etc})\frac{x^2}{1.2}$$

$$+(1-2^3+3^3-4^3+\ldots)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$-(1-2^5+3^5-4^5+\cdots)\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}$$

$+$ etc » (*).

Il est facile de trouver, rigoureusement, la série demandée. En effet, de

$$y = \mathrm{l}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right), \tag{6}$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x.$$

(*) Le Mémoire est plein de résultats de ce genre. Dans son préambule, l'auteur, après avoir dit que *l'équation*

$$1-2+4-8+\cdots = \frac{1}{3}$$

a l'apparence d'un paradoxe, ajoute « *Tous les analystes cependant ne conviennent point de ce paradoxe;* » c'est-à-dire, probablement : *Tous les analystes n'admettent pas les Séries divergentes.* Il ne faut pas oublier que M. Simonoff écrivait en 1832 : à cette époque, un célèbre Géomètre allemand (cité par M. Simonoff) *cherchait les sommes des Séries*

$$1-2^n+3^n-4^n+\ldots$$

$$1-3^n+5^n-7^n+\ldots !$$

Or (*)

$$\operatorname{tg} x = 4(4-1)A_2 x - 4^2(4^2-1)A_4 x^3 + 4^3(4^3-1)A_6 x^5 - \cdots,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = (4-1)A_2 x - (4^2-1)A_4 x^3 + (4^3-1)A_6 x^5 - \cdots;$$

et, par conséquent,

$$y = C - (4-1)A_2\frac{x^2}{2} + (4^2-1)A_4\frac{x^4}{4} - (4^3-1)A_6\frac{x^6}{6} + \cdots$$

D'après l'équation (6), $C = l\,2$; donc

$$-l\left(\cos\frac{1}{2}x\right) = (4-1)A_2\frac{x^2}{2} - (4^2-1)A_4\frac{x^4}{4} + (4^3-1)A_6\frac{x^6}{6} - \cdots \quad (7),$$

pour des valeurs de x *suffisamment petites.*

III. Si l'on combine l'équation (5) avec celle-ci :

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

et que l'on change ensuite x en $2x$, on trouve cet autre développement :

$$-\frac{1}{2}l(\cos x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{3}\sin^2 3x - \frac{1}{4}\sin^2 4x + \cdots \quad (8).$$

IV. La série (5) peut être rattachée à l'intégrale définie

$$C = \int_0^\infty \frac{l(1+x)}{1+x^2}dx = 2\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}dx - \int_0 \frac{lx}{1+x^2}dx,$$

(*) *Comptes-rendus*, tome LIV, p. 1031. Les coefficients A_2, A_4, A_6, sont égaux aux Nombres de Bernoulli, B_1, B_3, B_5 . . . , divisés par 2, 24, 720...

ou

$$C = \frac{\pi}{4} \, l\, 2 - \int_0^1 \frac{lx}{1+x^2} \, dx \; (^*) \qquad (9),$$

ou encore

$$C = \frac{\pi}{2} \, l\, 2 + G \qquad (10),$$

en supposant

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = 0{,}915\,695\,594 \ldots$$

En effet, si l'on remplace x par tg φ, on a

$$G = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\,(\mathrm{tg}\,\varphi)\, d\varphi \qquad (11).$$

Mais

$$l\,(\mathrm{tg}\,\varphi) = l\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) + l\varphi - l\cos\varphi \qquad (12).$$

Pour développer $l\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$, représentons par z cette fonction ; nous aurons

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\varphi\cot\varphi - 1}{\varphi};$$

ou, à cause de (**)

(*) *Mémoire sur la transformation des Séries (Académie de Belgique*, tome XXXIII, p. 32). Les formules rapportées ci-dessus datent de 1859.

(**) *Comptes-Rendus*, t. LIV, P. 1031.

$$\varphi \cot\varphi - 1 = -4 A_2 \varphi^2 + 4^2 A_4 \varphi^4 - 4^3 A_6 \varphi^6 + \cdots ;$$

$$z = \mathrm{l}\,\frac{\sin\varphi}{\varphi} = -4 A_2 \frac{\varphi^2}{2} + 4^2 A_4 \frac{\varphi}{4} - 4^3 A_6 \frac{\varphi^6}{6} + \cdots .$$

Et comme

$$\mathrm{l}\,(\cos\varphi) = -\mathrm{l}\,2 + \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi + \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{4}\cos 8\varphi + \cdots (5),$$

l'équation (12) devient

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{l}\,(\mathrm{tg}\,\varphi) = -4 A_2 \frac{\varphi^2}{2} + 4^2 A_4 \frac{\varphi^4}{4} - 4^3 A_6 \frac{\varphi^6}{6} + \cdots + \mathrm{l}\,(2\varphi) \\ - \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi + \frac{1}{4}\cos 8\varphi - \cdots \end{aligned}\right\} (13).$$

Multipliant par $d\varphi$ les deux membres, et intégrant, nous trouvons

$$-G = -\frac{4 A_2}{2.3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{4^2 A_4}{4.5}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \frac{4^3 A_6}{6.7}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \frac{\pi}{4}\mathrm{l}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3.6} - \frac{1}{5.10} + \frac{1}{7.14} - \cdots$$

La dernière ligne a pour valeur $-\frac{G}{2}$; donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{G}{2} = \frac{A_2}{2.3}\frac{\pi^3}{4^2} - \frac{A_4}{4.5}\frac{\pi^5}{4^3} + \frac{A_6}{6.7}\frac{\pi^7}{4^4} - \frac{A_8}{8.9}\frac{\pi^9}{4^5} + \cdots \\ - \frac{\pi}{4}\left[\mathrm{l}\,\pi - \mathrm{l}\,2 - 1\right] \end{aligned}\right\} (14).$$

V. On a

$$A_2 = \frac{B_1}{1.2},\quad A_4 = \frac{B_3}{1.2.3.4},\quad A_6 = \frac{B_5}{1.2.3.4.5.6},\quad \cdots,$$

et, d'un autre côté, si l'on représente par S_2, S_4, S_6, . . . les sommes des puissances $2^{\text{ièmes}}$, $4^{\text{ièmes}}$, $6^{\text{ièmes}}$, . . . des inverses des nombres naturels :

$$B_1 = \frac{1\,.\,2}{2}\,\frac{S_2}{\pi^2}, \quad B_3 = -\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{2^3}\,\frac{S_4}{\pi^4}, \quad B_5 = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{2^5}\,\frac{S_6}{\pi^6}, \ldots;$$

donc

$$A_2 = \frac{S_2}{2\pi^2}, \quad A_4 = -\frac{S_4}{2^3\pi^4}, \quad A_6 = \frac{S_6}{2^5\pi^6}, \quad A_8 = -\frac{S_8}{2^7\pi^8}, \ldots$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (14) devient

$$G = \frac{\pi}{16}\left[\frac{S_2}{2.3} + \frac{S_4}{4.5.16} + \frac{S_6}{6.7.16^2} + \frac{S_8}{8.9.16^3} + \cdots\right] - \frac{\pi}{2}(\mathrm{l}\pi - \mathrm{l}2 - 1) \quad (15).$$

Addition. — (*Mai* 1867).

VI. Dans mon *Mémoire sur la Transformation des Séries et sur quelques intégrales définies*, j'ai donné diverses expressions de la constante G. En partant de la formule (12), on peut exprimer cette constante par de nouvelles intégrales définies, assez remarquables.

A cet effet, j'observe d'abord que, de la relation connue

$$\frac{1}{\cos x} = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}\,d\alpha\ (*),$$

résulte

$$\mathrm{l}\,.\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\,\frac{d\alpha}{\alpha},$$

(*) Poisson, *Journal de l'École Polytechnique*, 18e Cahier, p. 298.

ou

$$1 . \operatorname{tg}\varphi = \int_0^\infty \frac{e^{4\alpha(\varphi - \frac{\pi}{4})} - e^{-4\alpha(\varphi - \frac{\pi}{4})}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

D'ailleurs :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{4\alpha(\varphi - \frac{\pi}{4})} d\varphi = \frac{1}{4\alpha}(1 - e^{-\pi\alpha}),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-4\alpha(\varphi - \frac{\pi}{4})} d\varphi = -\frac{1}{4\alpha}(1 - e^{\pi\alpha});$$

donc, à cause de la formule (11) :

$$G = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha} - 2}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha^2};$$

ou, par le changement de $\pi\alpha$ en α :

$$G = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2}{e^{\alpha} + e^{-}} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \tag{16}$$

VII. Si l'on intègre par parties, la fonction $\dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} \dfrac{1}{\alpha}$

s'annulle aux deux limites ; donc

$$G = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{\left(e^\alpha + e^{-\alpha}\right)^2} \frac{d\alpha}{\alpha} \tag{17}$$

VIII. La constante G étant connue, il en est de même des intégrales (16) et (17), ainsi que de toutes celles qu'on peut déduire de ces deux-ci. Il paraît difficile d'en tirer des développements en séries, plus convergents que ceux auxquels je suis parvenu dans le Mémoire cité.

LV. — SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE LÉGALE ET SUR UNE TRANSFORMATION DE SÉRIE (*) (MARS 1862).

I. D'après le Code civil (art. 757), *le droit de l'enfant naturel est d'un tiers de la portion héréditaire qu'il aurait eue, s'il eût été légitime* (**).

Soient : l le nombre des enfants légitimes; n le nombre des enfants naturels ; $x_{l,n}$ la part d'un enfant légitime; $y_{l,n}$ la part d'un enfant naturel.

On a d'abord, en prenant pour unité la somme à partager entre les $l + n$ enfants ,

$$lx_{l,n} + ny_{l,n} = 1 \tag{1}$$

D'un autre côté, conformément à la prescription ci-dessus,

$$y_{l,n} = \frac{1}{3} x_{l+1,n-1} \tag{2}$$

(*) Note extraite des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(**) Cette partie de l'article 757 se rapporte au cas du partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Lorsque des enfants naturels concourent avec des ascendants ou des collatéraux , la loi a des conséquences bizarres et même absurdes, dont je ne parlerai pas ici. (*Voyez* une brochure intitulée : *l'Article* 757 — *Application de l'Algèbre au Code civil.*)

De ces deux relations, on conclut aisément la formule suivante, connue depuis longtemps (*),

$$x_{l,n} = \frac{1}{l} - \frac{n}{3l(l+1)} + \frac{n(n-1)}{3^2 l(l+1)(l+2)} - \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{3^n l(l+1)\dots(l+n)} \quad (3).$$

II. La complication de cette formule est peut-être ce qui empêche les jurisconsultes d'obéir, sinon à l'esprit, du moins au texte de la loi, quand il s'agit pour eux d'effectuer un partage entre enfants légitimes et enfants naturels. Mais on peut la remplacer par une autre expression beaucoup plus commode.

On a en effet

$$\frac{1}{l(l+1)(l+2)\dots(l+p)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}\int_0^1 (1-\theta)^p \theta^{l-1} d\theta;$$

donc

$$x_{l,n} =$$

$$\int_0^1 \theta^{l-1} d\theta \left[1 - \frac{1}{3}\frac{n}{1}(1-\theta) + \frac{1}{3^2}\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(1-\theta)^2 - \dots \pm \frac{1}{3^n}(1-\theta)^n \right]$$

$$= \frac{1}{3^n}\int_0^1 \theta^{l-1}(2+\theta)^n d\theta;$$

d'où enfin

$$x_{l,n} = \frac{1}{3^n}\left[2^n \frac{1}{l} + \frac{n}{1} 2^{n-1} \frac{1}{1+l} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} 2^{n-2} \frac{1}{l+2} + \dots + \frac{1}{l+n} \right] (4).$$

(*) Elle a été donnée d'abord par M. Cournot (*Bulletin de Férussac*, t. XVI, p. 3.)

Il est visible que, pour former la quantité entre parenthèses, il suffit de développer $(2+1)^n$ et de diviser par l, $l+1$, $l+2, \ldots, l+n$ les termes du développement. Du reste, il est facile de vérifier, par un procédé purement algébrique, l'équivalence des deux expressions de $x_{l,n}$.

III. Cette équivalence étant démontrée, il en résulte que l'on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{l}-\frac{n}{l(l+1)}z+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}z^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{l(l+1)(l+2)(l+3)}z^3+\cdots \\ &=(1-z)^n\frac{1}{l}+\left[\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}\left(\frac{z}{1-z}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\cdots\right] \end{aligned}\right\}(5),$$

même quand les deux membres, au lieu d'être composés d'un nombre fini de termes, deviennent des séries *convergentes*. Par exemple, en supposant

$$l=1,\quad n=-1,\quad z=\frac{1}{2},$$

on trouve

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right);$$

ce qui est exact.

IV. Si l'on pose

$$\frac{z}{1-z}=-t,$$

d'où résulte

$$z=\frac{-t}{1-t},$$

l'équation (5) devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{l}-\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}t+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}t^2-\cdots \\ &=(1-t)^n\left[\frac{1}{l}+\frac{n}{l(l+1)}\frac{t}{1-t}+\frac{n(n-1}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^2+\cdots\right] \end{aligned}\right\}$$

ou plutôt, *par le changement de* t *en* z :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{l}-\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}z^2-\dots\\&=(1-z)^n\left[\frac{1}{l}+\frac{n}{l(l+1)}\frac{z}{1-z}+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\dots\right]\end{aligned}\right\}\quad(6).$$

Cette seconde transformation est, pour ainsi dire, *conjuguée* de la première. On peut les renfermer dans la *double* formule :

$$\left.\begin{aligned}(1-z)^n&=\frac{\frac{1}{l}-\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}z^2-\dots}{\frac{1}{l}+\frac{n}{l(l+1)}\frac{z}{1-z}+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\dots}\\&=\frac{\frac{1}{l}-\frac{n}{l(l+1)}z+\frac{n(n-1)}{l(l+1)(l+2)}z^2+\dots}{\frac{1}{l}+\frac{n}{1}\frac{1}{l+1}\frac{z}{1-z}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{l+2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\dots}\end{aligned}\right\}\quad(7).$$

Celle-ci a d'assez nombreuses conséquences, sur lesquelles je pourrai revenir dans une autre occasion.

LVI. — UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS (OCTOBRE 1863).

I. Soient les équations

$$\left.\begin{aligned}A_1x_1+B_1x_2+C_1x_3&=0,\\A_2x_1+B_2x_2+C_2x_3&=0,\\A_3x_1+B_3x_2+C_3x_3&=\Delta,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned}&A_1=b_2c_3-c_2b_3,\quad B_1=a_2c_3-c_2a_3,\quad C_1=a_2b_3-b_2a_3,\\&A_2=b_1c_3-c_1b_3,\quad B_2=a_1c_3-c_1a_3,\quad C_2=a_1b_3-b_1a_3,\\&A_3=b_1c_2-c_1b_2,\quad B_3=a_1c_2-c_1a_2,\quad C_3=a_1b_2-b_1a_2,\\&\Delta=a_1b_2c_3-a_1c_2b_3+c_1a_2b_3-b_1a_2c_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3.\end{aligned}$$

On y satisfait en prenant

$$x_1 = a_3, \qquad x_2 = -b_3, \qquad x_3 = c_3.$$

Mais, par l'application des formules de Cramer, on trouve

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{N_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{N_3}{D},$$

en supposant

$$D = A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_2B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3,$$

$$N_1 = (B_1C_2 - C_1B_2)\Delta, \quad N_2 = -(A_1C_2 - C_1A_2)\Delta, \quad N_3 = (A_1B_2 - B_1A_2)\Delta;$$

donc

$$\frac{B_1C_2 - C_1B_2}{a_3} = \frac{A_1C_2 - C_1A_2}{b_3} = \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{c_3} = \frac{D}{\Delta} = \lambda \qquad (2).$$

Ainsi : 1° *les déterminants de déterminants*,

$$B_1C_2 - C_1B_2, \quad A_1C_2 - C_1A_2, \quad A_1B_2 - B_1A_2,$$

$$A_1B_2C_3 - A_1C_2B_3 + C_1A_3B_3 - B_1A_2C_3 + B_1C_2A_3 - C_1B_2A_3$$

sont proportionnels aux quantités

$$a_3, \qquad b_3, \qquad c_3,$$

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3.$$

De plus, comme le calcul direct donne

$$\lambda = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{a_3} = A:$$

2° *le déterminant de déterminant*, D, *est égal au carré du déterminant* Δ.

II. Soient maintenant les équations

$$\left.\begin{aligned} A_1x_1 + B_1x_2 + Q_1x_3 + D_1x_4 &= 0\,, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 &= 0\,, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 &= 0\,, \\ A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 &= A\,, \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

dans lesquelles :

$$A_1 = \sum b_2c_3d_1\,, \quad B_1 = \sum a_2c_3d_4, \quad C_1 = \sum a_2b_3d_4, \quad D_1 = \sum a_2b_3c_4\,,$$

$$A_2 = \sum b_1c_3d_4\,, \quad B_2 = \sum a_1c_3d_4\,, \quad C_2 = \sum a_1b_3d_4\,, \quad D_2 = \sum a_1b_3c_4\,,$$

$$A_3 = \sum b_1c_2d_4\,, \quad B_3 = \sum a_1c_2d_4\,, \quad C_3 = \sum a_1b_2d_4\,, \quad D_3 = \sum a_1b_2c_4\,,$$

$$A_4 = \sum b\,c_2d_3, \quad B_4 = \sum a_1c_2d_3\,, \quad C_4 = \sum a_1b_2d_3, \quad D_4 = \sum a_1b_2c_3\,,$$

$$A = \sum a_1b_2c_3d_4\,,$$

suivant la notation de Cauchy (*).

On reconnaît facilement que les équations (3) sont vérifiées par

$$x_1 = -a_4 \quad x_2 = +b_4\,, \quad x_3 = -c_4, \quad x_4 = +d_4\,,$$

d'où l'on conclut, comme dans le premier cas,

$$\frac{\sum B_1C_2D_3}{a_4} = \frac{\sum A_1C_2D_3}{b_4} = \frac{\sum A_1B_2D_3}{c_4} = \frac{\sum A_1B_2C_3}{d_4} = \frac{D}{A} = \lambda \quad (4) :$$

(*) Dans chacun de ces déterminants, un terme a le signe + ou le signe — suivant qu'il contient un nombre pair ou un nombre impair d'inversions alphabétiques.

cette fois,

$$D = \sum A_1B_2C_3D_4.$$

III. 1° Considérons, par exemple, l'égalité

$$\sum B_1C_2D_3 = \frac{a_4 \sum A_1C_2D_3}{b_4}.$$

Le premier membre est entier; b_4 est premier avec a_4; donc b_4 divise $\sum A_1C_2D_3$. Autrement dit, *le rapport commun* λ *est un polynôme entier.*

2° Le déterminant A_1 contient les lettres b, c, d et les indices 2, 3, 4. De même, B_2 est composé des lettres a, c, d, affectées des indices 1, 3, 4. Enfin, C_3 renferme les lettres a, b, d et les indices 1, 2, 4. De là résulte que *chaque terme de* λ (abstraction faite du coefficient numérique) *a la forme*

$$p_1q_2r_3s_4 \times p'_1q'_2r'_3s'_4,$$

p, q, r, s, *et* p', q', r', s', *tenant lieu des lettres* a, b, c, d.

3° D'après le mode de formation des quantités A_1, B_2, C_3, chacun des facteurs $p_1q_2r_3s_4$, $p'_1q'_2r'_3s'_4$ a le signe + ou le — 1, suivant qu'il renferme un nombre pair ou un nombre impair d'inversions alphabétiques; conséquemment, *ce facteur est un terme du déterminant* Δ.

4° Ces remarques tendent à faire croire que $\lambda = \Delta^2$ (*).

(*) C'est là une simple induction, qui aurait grand besoin d'être justifiée, au cas qu'elle le puisse être. Si je me décide à faire paraître cette ébauche de démonstration, c'est afin de provoquer des recherches sur une question intéressante (mai 1867).

IV. Dans le cas de cinq équations à cinq inconnues,

$$\lambda = \frac{\sum A_1B_2C_3D_4}{e^5}.$$

Cette fonction, du *quinzième degré*, serait probablement $\left(\sum a_1b_2c_3d_4e_5\right)^3$. Et ainsi de suite.

LVII. — DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STIRLING (NOVEMBRE 1866) (*).

I. Si l'on suppose

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = \mathrm{F}(x) \qquad (1),$$

on trouve

$$\mathrm{F}(0) = 0, \quad \mathrm{F}'(0) = 0, \quad \mathrm{F}''(0) = \frac{1}{6},$$

puis

$$\frac{p-1}{2(p+1)} = \mathrm{F}^{(p)}(0) + \frac{p}{2}\mathrm{F}^{(p-1)}(0) + \frac{p(p-1)}{2.3}\mathrm{F}^{(p-2)}(0) + \dots + \frac{p}{2}\mathrm{F}''(0) (2).$$

Cette relation générale ne diffère pas de celle qui existe entre les Nombres de Bernoulli (**); donc, à cause de

$$\mathrm{F}''(0) = \frac{1}{6} = \mathrm{B}_1,$$

on a

$$\mathrm{F}^{(p)}(0) = \mathrm{B}_{p-1} \qquad (3);$$

(*) Cette démonstration a quelque analogie avec celle qui a été donnée par M. Serret (*Calcul différentiel de Lacroix*, 6e édition). Cependant, si je ne me trompe, elle est plus simple et plus directe que celle-ci (mai 1867).

(**) Voyez *Note* XXXVI, p. 128.

et, pour des valeurs réelles ou imaginaires de x, dont le module soit suffisamment petit :

$$F(x) = \frac{B_1}{1.2}x^2 + \frac{B_3}{1.2.3.4}x^4 + \ldots + \frac{B_{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}x^{2n} + \ldots \text{ (*) } (4).$$

II. De l'identité

$$\frac{1}{e^{2\pi\alpha}-1} = \sum_1^\infty e^{-2n\pi\alpha},$$

on tire

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha}-1}\,d\alpha = \sum_1^\infty \int_0^\infty e^{-2n\pi\alpha} \sin \alpha x \, d\alpha\,;$$

ou, par une formule connue (**),

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha}-1}\,d\alpha = \frac{x}{4\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+n^2} \qquad (5).$$

D'un autre côté,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+n^2} = \frac{2\pi^2}{x^2}\left[\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} - 1\right] \text{ (***)},$$

ou

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{x^2}{4\pi^2}+n^2} = \frac{2\pi^2}{x^2}\,F(x) \qquad (6).$$

(*) La fonction F (x) est *paire* ; donc $F^{2n-1}(0) = B_{2n-2} = 0$.

(**) Sturm, *Cours d'Analyse*, tome II, p. 15.

(***) *Traité élémentaire des Séries*, p. 115.

Conséquemment

$$F(x) = 2x \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha} - 1} d\alpha \text{ (*)} \qquad (7).$$

III. αx étant un arc positif, de grandeur quelconque, et θ désignant un nombre compris entre 0 et + 1, on a

$$\sin \alpha x = \frac{\alpha x}{1} - \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} + \dots \pm \frac{\alpha^{2n-1} x^{2n-1}}{1.2.3\dots\overline{2n-1}} \mp \theta \frac{\alpha^{2n+1} x^{2n+1}}{1.2.3\dots\overline{2n+1}} \text{ (**)}.$$

La formule (7) équivaut donc a

$$\frac{1}{2} F(x) = \frac{x^2}{1} \int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} - \frac{x^4}{1.2.3} \int_0^\infty \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} + \dots$$

$$\mp \frac{x^{nn}}{1.2.3\dots\overline{2n-1}} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} \mp \frac{x^{2n+2}}{1.2.3\dots\overline{2n+1}} \int_0^\infty \theta \frac{\alpha^{2n+1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1} (8).$$

Chacun des éléments de la dernière intégrale est moindre que $\frac{\alpha^{2n+1} d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}$; donc

(*) *Note* XLV, p. 189.

(**) Quand on développe $\sin \alpha x$ par la formule de Mac-Laurin, on vérifie seulement que θ est compris entre — 1 et + 1 (*Sturm*, *Cours d'Analyse*, tome I, p. 98). Mais, par des considérations très-simples, on prouve les inégalités

$$\sin \alpha x < \alpha x, \quad \sin \alpha x > \alpha x - \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3}, \quad \sin \alpha x < \alpha x - \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5 x^5}{1.2.3.4.5}, \text{ etc. ;}$$

d'où résulte

$$0 < \theta < 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x)=\frac{x^2}{1}\int_0^\infty\frac{\alpha d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}-\frac{x}{1.2.3}\int_0^\infty\frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}+\cdots\\ \pm\frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots\overline{2n-1}}\int_0^\infty\frac{\alpha^{2n-1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\mp\theta_1\frac{x^{2n+2}}{1.2.3\ldots\overline{2n+1}}\int_0^\infty\frac{\alpha^{2n+1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\end{array}\right\}\quad(9);$$

θ_1 désignant, comme θ, un nombre compris entre 0 et 1.

IV. Si l'on compare les développements (4) et (9), on trouve d'abord la *formule de Plana* :

$$B_{2n-1}=\pm 4n\int_0^\infty\frac{\alpha^{2n-1}d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\quad(10);$$

puis l'équation

$$\mathrm{F}(x)=\frac{B_1}{1.2}x^2+\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4+\ldots+\frac{B_{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}x^{2n}+\theta_1\frac{B_{2n+1}}{1.2.3\ldots\overline{2n+2}}x^{2n+2}\quad(11),$$

due à Cauchy, et qui subsiste pour des valeurs *quelconques* de x, réelles ou imaginaires.

V. A cause de

$$\mathrm{l}x=\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha}-e^{-\alpha x}}{\alpha}d\alpha\quad(12),$$

on a, comme l'on sait, pour toute valeur entière et positive de x,

$$\mathrm{l}\,(1.2.3\ldots x)=\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha}\left[e^{-\alpha}x-\frac{1-e^{-\alpha x}}{e^{\alpha}-1}\right]\text{(*)}\quad(13).$$

(*) *Journal de Mathématiques*, tome IV, p. 318.

Si donc, comme l'a fait M. Liouville, on représente par u la fonction de x contenue dans le second membre, on aura

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left[e^{-\alpha} - \frac{\alpha}{e^\alpha - 1} e^{-\alpha x}\right] \qquad (14).$$

La fraction

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + \mathrm{F}(\alpha);$$

ainsi

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha x} - \frac{\mathrm{F}(\alpha)}{\alpha} e^{-\alpha x}\right] d\alpha\,;$$

ou, à cause de la formule (12),

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{l}x + \frac{1}{2x} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{F}(\alpha)}{\alpha} e^{-\alpha x}\, d\alpha \qquad (15).$$

Le n$^{\text{e}}$ terme de F (α) étant $\frac{\mathrm{B}_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}\alpha^{2n}$, l'intégrale définie correspondante devient

$$\frac{\mathrm{B}_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{2n-1} d\alpha = \frac{1}{2n}\,\frac{\mathrm{B}_{2n-1}}{x^{2n}}\,.$$

Quant à l'intégrale

$$\int \theta_1 e^{-\alpha x} \alpha^{2n+1} d\alpha,$$

elle se réduit à $\theta_2\,\frac{\Gamma(2n+2)}{x^{2n+2}}$, θ_2 étant compris entre 0 et 1.

Par suite,

$$\frac{du}{dx}=\mathrm{l}x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\frac{B_1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{B_3}{x^4}-\cdots-\frac{1}{2n}\frac{B_{2n-1}}{x^{2n}}-\frac{\theta_2}{(2n+1)}\frac{B_{2n+1}}{x^{2n+2}} \qquad (16);$$

et enfin, par un calcul facile et très-connu,

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{l}(1.2.3\ldots x)=x\,\mathrm{l}x+\frac{1}{2}\mathrm{l}(2\pi x)-x+\frac{B_1}{1.2x}+\frac{B_3}{3.4x^3}+\ldots \\ \qquad \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n.x^{2n-1}}+\Theta\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}}\end{array}\right\} \qquad (17).$$

Telle est la *formule de Stirling*. Le facteur Θ, qui entre dans l'*expression du reste*, est, bien entendu, compris entre 0 et 1.

LVIII. — SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE (MAI 1867).

I. On sait que, λ, μ, ν étant les angles formés avec les axes de coordonnées par la normale MN à une surface quelconque S, les lignes de courbure de cette surface peuvent être ainsi représentées :

$$\frac{dx}{d\,.\cos\lambda}=\frac{dy}{d\,.\cos\mu}=\frac{dz}{d\,.\cos\nu} \qquad (1).$$

Introduisons, comme nouvelles variables, le rayon vecteur u et la distance v de l'origine au plan tangent en M; de manière que

$$u^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (2),$$

$$v=x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu \qquad (3).$$

La normale étant perpendiculaire à l'élément MM' de la ligne de courbure,

$$\cos\lambda \,.\, dx + \cos\mu \,.\, dy + \cos\nu \,.\, dz = 0\ ;$$

et, par conséquent,

$$dv = xd\,(\cos\lambda) + yd\,(\cos\mu) + zd\,(\cos\nu) \qquad (4).$$

La valeur commune des rapports (1) est donc

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{xd\,(\cos\lambda) + yd\,(\cos\mu) + zd\,(\cos\nu)} = \frac{udu}{dv}\ ;$$

et l'on peut prendre, comme équations des lignes de courbure,

$$\frac{dx}{d\,.\,\cos\lambda} = \frac{dy}{d\,.\,\cos\mu} = \frac{dz}{d\,.\,\cos\nu} = \frac{udu}{dv} \qquad (5).$$

II. Dans le cas de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ (6), \qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{v^2} \qquad (7).$$

De ces équations, jointes à la relation (2), on tire

$$x^2 = a^4 \frac{\dfrac{b^2c^2}{v^2} + u^2 - b^2 - c^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \qquad (8).$$

De plus,

$$\cos\lambda = \frac{vx}{a^2}, \quad d\,(\cos\lambda) = \frac{vdx + xdv}{a^2}\ ;$$

donc

$$\frac{a^2dx}{vdx + xdv} = \frac{udu}{dv},$$

ou

$$(a^2dv - vudu)\,xdx = ux^2\,dudv.$$

Si l'on remplace x^2 et xdx par leurs valeurs, on trouve, après quelques réductions,

$$u^2v^4du^2 - uv^3(a^2+b^2+c^2-u^2)\,dudv + a^2b^2c^2dv^2 = 0 \qquad (9).$$

Telle est *l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde*, rapportées aux variables u, v.

III. Pour la simplifier, posons

$$u^2 = U + a^2 + b^2 + c^2, \qquad v^2 = \frac{a^2b^2c^2}{V} \qquad (10):$$

il vient

$$VdU^2 - UdUdV + dV^2 = 0\,,$$

ou

$$U = V\frac{dU}{dV} + \frac{dV}{dU} \qquad (11).$$

Cette équation, qui rentre dans la classe considérée par Clairault, a pour intégrale :

$$U = mV + \frac{1}{m}\,,$$

m étant une constante arbitraire.

Par suite, l'intégrale de l'équation (9) est

$$u^2 - a^2 - b^2 - c^2 = m\frac{a^2b^2c^2}{v^2} + \frac{1}{m}\,;$$

ou, si l'on remplace m par $\frac{-l}{abc}$:

$$abc + (u^2 - a^2 - b^2 - c^2)\,l + \frac{abc}{v^2}\,l^2 = 0 \qquad (12).$$

A cause des valeurs de u^2, v^2, cette équation équivaut à

$$\left(\frac{bcl}{a^3}+1\right)x^2+\left(\frac{cal}{b^3}+1\right)y^2+\left(\frac{abl}{c^3}+1\right)z^2=a^2+b^2+c^2-\frac{abc}{l} \quad (13).$$

IV. Les surfaces représentées par l'équation (13) sont des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes, ayant mêmes plans principaux que l'ellipsoïde donné, et dont les intersections avec celui-ci sont les lignes de courbure de cette surface. Lorsque $l=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$, l'équation (13) représente l'origine. De même si $l=\pm\infty$, etc.

Si l'on élimine le paramètre l entre l'équation (12) et sa dérivée relative à l, on trouve

$$(u^2-a^2-b^2-c^2)^2=\frac{4a^2b^2c^2}{v^2} \quad (14).$$

Cette relation est une conséquence de :

$$u^2=a^2+b^2+c^2+k^2, \quad \frac{4a^2b^2c^2}{v^2}=k^4\,;$$

donc *la surface* (14), *enveloppe des ellipsoïdes* (13), *peut être engendrée par les intersections d'une série d'ellipsoïdes semblables et de sphères.*

En outre, la combinaison des équations (12), (14) conduit à

$$2\,abc+(u^2-a^2-b^2-c^2)\,l=0 \quad (15)\,;$$

donc *chacun des ellipsoïdes enveloppés touche*, *suivant une courbe sphérique*, *la surface enveloppe.*

V. Ajoutons membre à membre les équations (6), (11), après avoir multiplié par λ^3 les deux membres de la première ; le résultat peut être écrit sous la forme abrégée :

$$\sum\left(l+\frac{bcl^2}{a^3}+\frac{\lambda^3}{a^2}\right)x^2=\lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda-abc \quad (16).$$

Pour une valeur donnée de l, cette relation appartient à toutes les surfaces du second degré qui passent par la ligne de courbure correspondante : on doit donc pouvoir déterminer λ de manière que l'équation (16) représente les hyperboloïdes homofocaux avec l'ellipsoïde donné. Cette condition conduit à

$$\frac{\lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\,l - abc}{a\lambda^3 + a^3 l + bcl^2} - \frac{\lambda^3 + (a^2 + b^2 + c^2)\,l - abc}{b\lambda^3 + b^3 l + cal^2} = a^2 - b^2\,;$$

équation d'où l'on tire

$$\lambda^3 = l^3 - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{abc}\,l.$$

Par suite, l'équation (16) devient

$$\sum\left[l + \frac{bcl^2}{a^3} + \frac{l^3}{a^2} - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^3bc}\,l^2\right]x^2$$

$$= l^3 - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{abc}\,l^2 + (a^2 + b^2 + c^2)\,l - abc\,;$$

ou, plus simplement,

$$\sum\left(l - \frac{ca}{b}\right)\left(l - \frac{ab}{c}\right)\frac{l}{a^2}\,x^2 = \left(l - \frac{bc}{a}\right)\left(l - \frac{ca}{b}\right)\left(l - \frac{ab}{c}\right),$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2 - \dfrac{abc}{l}} + \frac{y^2}{b^2 - \dfrac{abc}{l}} + \frac{z^2}{c^2 - \dfrac{abc}{l}} = 1 \qquad (17).$$

LIX. — RECTIFICATION ET ADDITION A LA NOTE XXX (JANVIER 1867) (*).

M. Lebesgue m'a fait observer que les formules (6) et (6') ne sont pas assez générales : en les écrivant, j'ai supposé, tacitement, les valeurs de t, $\mu^2 - 1$ et $2\alpha + \mu^2 - 1$, premières entre elles deux à deux. Le même manque de généralité se remarque sur les formules (11) et (11'). Néanmoins, les résultats indiqués dans le Paragraphe V sont exacts, comme tous ceux que l'on déduirait des formules citées.

En cherchant à corriger la faute dont je viens de parler, je me suis aperçu que le Problème en question se ramène très-simplement à la résolution, en nombres entiers, d'une équation de la forme

$$Ax^2 - By^2 = 1.$$

Cette nouvelle solution du Problème est l'objet de la présente Note.

I. Reprenons les équations

$$2x + y - 1 = z \quad (a), \qquad 2yz = \alpha \quad (b), \qquad y^2 + z^2 - 1 = \beta \quad (c),$$

$$\alpha\beta = 16t^2 \quad (d), \qquad s = t^2 \qquad (e).$$

D'après (a), y *et* z *sont de parités différentes* ; donc α, β *sont des multiples de* 4. Soient

$$\alpha = 4\theta u^2, \qquad \beta = 4\theta' v^2;$$

θ, θ' ne contenant aucun facteur carré ; autrement dit :

$$\theta = abcde\ldots, \qquad \theta' = a'b'c'd'e'\ldots,$$

(*) Ces deux Notes ont paru dans les *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.*

$a, b, c, d, e, \ldots$, d'une part, et $a', b', c', d', e', \ldots$, de l'autre, étant des facteurs premiers *inégaux*. A cause de l'équation (d), $\theta\theta'$ doit être un carré; donc

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \ldots,$$

ou

$$\theta' = \theta;$$

et, par conséquent,

$$\alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta v^2 \quad (f).$$

Soient

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma \quad (g),$$

p, q étant deux nombres donnés, l'un *pair*, l'autre *impair*, *premiers entre eux*. Les équations (b), (c) deviennent, à cause des valeurs (f) :

$$pq\gamma^2 = 2\theta u^2 \quad (h), \quad (p^2 + q^2)\gamma^2 - 1 = 4\theta v^2 \quad (k).$$

Éliminant θ, on trouve

$$(p^2 + q^2) u^2 - 2pqv^2 = \frac{u^2}{\gamma^2};$$

donc u est divisible par γ :

$$u = \gamma u' \quad (l);$$

et la relation (h) devient

$$pq = 2\theta u'^2 \quad (\mathrm{A}).$$

II. Dans chaque cas particulier, on décomposera donc $\frac{pq}{2}$ en deux facteurs u'^2, θ, dont l'un soit un carré, l'autre n'admettant aucun facteur carré; après quoi l'on cherchera les solutions entières de l'équation

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 4\theta v^2 = 1 \quad (\mathrm{B}).$$

Si elle en admet, on emploiera les formules

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{(q-p)\gamma+1}{2}, \quad x+y-1 = \dfrac{(q+p)\gamma-1}{2}, \\ \qquad s = (u'v\theta\gamma)^2 \end{array}\right\} \quad (C).$$

III. *Applications.* — 1° $p = 3$, $q = 4$. L'équation (A) donne

$$\theta = 6, \quad u' = 1 ;$$

en sorte que (B) devient :

$$(5\gamma)^2 - 6(2v)^2 = 1 \qquad (1).$$

La solution la plus simple est

$$\gamma = 1, \qquad v = 1 ;$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$\gamma = 97, \qquad v = 99 ;$$

puis

$$x = 49, \qquad x + y - 1 = 339, \qquad s = (6.97.99)^2.$$

Conséquemment

$$49^3 + 50^3 + 51^3 + \cdots + 339^3 = (6.97.99)^2 ;$$

ce qui est exact.

2° $p = 5$, $q = 8$. On trouve $\theta = 5$, $u' = 2$, puis

$$89\gamma^2 - 5(2v)^2 = 1 \qquad (2).$$

Le développement de $\sqrt{\dfrac{89}{5}} = \dfrac{\sqrt{445}}{5} = \dfrac{R}{5}$ en fraction continue donne, comme fractions *complètes* :

$$\frac{R}{5}, \frac{R+20}{9}, \frac{R+16}{21}, \frac{R+5}{20}, \frac{R+15}{11}, \frac{R+18}{11}, \frac{R+15}{20},$$

$$\frac{R+5}{21}, \frac{R+16}{9}, \frac{R+20}{5}, \frac{R+20}{9}, \frac{R+16}{21}, \text{etc.}$$

Par conséquent (*), l'équation (2) n'admet aucune solution entière.

3° $p = 5$, $q = 12$. On a $w' = 1$, $\theta = 30$; donc

$$(13\,y)^2 - 120\,v^2 = 1 \qquad (3).$$

Cette équation est vérifiée par

$$13\,y = 11, \quad v = 1;$$

mais, comme la valeur de y est fractionnaire, on doit recourir à la relation

$$\left(11 + \sqrt{120}\right)^n = 13y + v\sqrt{120},$$

en disposant convenablement de n. Après quelques essais, l'on trouve que $n = 9$ donne

$$y = 45\ 575\ 339\ 447, \qquad v = 54\ 085\ 723\ 209.$$

On conclut, de ces valeurs :

$$169\,y^2 = 351\ 031\ 854\ 604\ 867\ 350\ 921\ 721,$$
$$120\,v^2 = 351\ 031\ 854\ 604\ 867\ 350\ 921\ 720,$$
$$x = 159\ 513\ 698\ 065,$$
$$x + y - 1 = 387\ 390\ 395\ 299,$$
$$s = (30\cdot\ 45\ 575\ 339\ 447.\ 54\ 085\ 723\ 209)^2.$$

(*) *Théorie des Nombres*, tome I, p. 108.

LX. — SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE (SEPTEMBRE 1865).

I. THÉORÈME. *Soient* F_0, F_1 *deux polynômes à coefficients entiers, dont les degrés sont* m, m — 1. *Soit* F_2 *le reste de la division de* $B_0^2 F_0$ *par* F_1, B_0 *étant le coefficient du premier terme de* F_1. *Soit, semblablement,* F_3 *le reste de la division de* $C_0^2 F_1$ *par* F_2, C_0 *étant le coefficient du premier terme de* F_2. *Si les degrés des restes* F_2, F_3 *sont, comme cela arrive ordinairement,* m — 2, m — 3, *le deuxième reste,* F_3, *est divisible par* B_0^2 (*).

En supposant

$$F_0 = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m \tag{1}$$

$$F_1 = B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1} \tag{2}$$

$$B_0^2 F_0 = F_1 Q_1 + F_2 \tag{3}$$

$$F_2 = C_0 x^{m-2} + C_1 x^{m-3} + \ldots + C_{m-2} \tag{4}$$

$$C_0^2 F_1 = F_2 Q_2 + F_3 \tag{5}$$

$$F_3 = D_0 x^{m-3} + D_1 x^{m-4} + \ldots + D_{m-3} \tag{6}$$

on voit d'abord que Q_1 est le quotient entier de

$$B_0^2 (A_0 x_2 + A_1 x + A_2)$$

par $B_0 x + B_1$.

(*) Ce théorème est dû, en partie, à M. Labatie (*Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur*, 2e édition, p. 8). Mais la démonstration de l'auteur exige que les coefficients de F_0, F_1 soient des polynômes, ce qui n'est pas nécessaire.

Ainsi

$$Q_1 = A_0 B_0 x + A_1 B_0 - A_0 B_1 ,$$

ou

$$Q_1 = B_0 (A_0 x + A_1) - A_0 B_1 \qquad (7).$$

De même,

$$Q_2 = B_0 C_0 x + B_1 C_0 - B_0 C_1 ,$$

ou

$$Q_2 = B_0 (C_0 x - C_1) + B_1 C_0 \qquad (8).$$

En outre, d'après l'égalité (3), C_0 est le coefficient de x^{m-2} dans

$$B_0^2 . A_2 x^{m-2} - (B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3}) [A_0 B_0 x + A_1 B_0 - A_0 B_1] ;$$

c'est-à-dire que

$$C_0 = (A_2 B_0 - A_0 B_2) B_0 + (A_0 B_1 - A_1 B_0) B_1 \qquad (9)$$

Pour la même raison, C_1 est le coefficient de x^{m-3} dans

$$B_0^2 A_3 x^{m-3} - (B_2 x^{m-3} + B_3 x^{m-4}) [A_0 B_0 x + A_1 B_0 - A_0 B_1] ;$$

donc

$$C_1 = (A_3 B_0 - A_0 B_3) B_0 + (A_0 B_1 - A_0 B_1) B_2 \qquad (10).$$

Maintenant, l'élimination de F_2, entre les égalités (3), (5), conduit à

$$F_3 = (C_0^2 + Q_1 Q_2) F_1 - B_0^2 Q_2 F_0 \qquad (11).$$

La seconde partie du second membre est divisible par B_0^2 : il suffit donc, pour démontrer le théorème énoncé, de faire voir que la première partie l'est également.

Or, d'après les formules (7), (8), (9) et (10), on a, relativement au *module* B_0^2 :

$$Q_1 Q_2 \equiv + B_0 B_1 (A_1 C_0 + A_0 C_1) - A_0 B_1^2 C_0,$$

$$A_1C_0 + A_0C_1 \equiv - (2A_0A_1B_2 + A_1^2B_1 + A_0^2B_3) B_0 + A_0B_1(A_1B_1 + A_0B_2),$$

$$Q_1Q_2 \equiv + A_0B_0B_1^2(A_1B_1 + A_0B_2) - A_0B_1^2(A_0B_1^2 - A_0B_0B_2 - A_1B_0B_1)$$

$$\equiv + 2A_0B_0B_1^2(A_1B_1 + A_0B_2) - A_0B_1^4,$$

$$C_0 \equiv - (A_0B_2 + A_1B_1) B_0 + A_0B_1^2,$$

$$C_0^2 \equiv - 2A_0B_1^2(A_0B_2 + A_1B_1) B_0 + A_0^2B_1^4;$$

donc enfin

$$C_0^2 + Q_1 Q_2 = \mathcal{M} \,.\, B_0^2.$$

II. *Application.*

$$F_0 = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad F_1 = 7x^3 + 4x^2 + x + 1.$$

On trouve, en multipliant, F_0 par 7^2 :

$$F_2 = 79x^2 + 39x + 46;$$

puis, en multipliant F_1 par 79^2 :

$$F_3 = -20\,874x + 4\,263 = 7^2(-426x + 87);$$

Ainsi le deuxième reste est divisible par 7^2.
Si maintenant on prend 426^2F_2 pour dividende, et $426\,x - 87$ pour diviseur, le reste R égale

$$79 \,.\, 87^2 + 39 \,.\, 87 \,.\, 426 + 46 \,.\, 426^2$$
$$= 79 \,.\, 87^2 + 426\,(3\,393 + 19\,596)$$
$$= 79\,[87^2 + 426 \,.\, 291],$$

ou enfin

$$R = 79^2 \,.\, 1\,665.$$

LXI. — SUR L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ (1863).

I. Pour résoudre l'équation

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (1),$$

à coefficients réels, posons

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + px + q)(x^2 - px + q'):$$

nous devons trouver, pour les inconnues p, q, q', *au moins un système de valeurs réelles.*

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x, dans les deux membres, on obtient

$$q' + q = A + p^2, \quad q' - q = \frac{B}{p}, \quad qq' = C;$$

puis, en éliminant q et q',

$$(A + p^2)^2 - \frac{B^2}{p^2} = 4C \qquad (2).$$

Soit

$$A + p^2 = q' + q = z \qquad (3);$$

l'équation (2) devient

$$z^3 - Az^2 - 4Cz - (B^2 - 4AC) = 0 \qquad (4).$$

Telle est la *réduite* de l'équation (1).

II. D'après la relation (3), *l'équation* (4) *a au moins une racine plus grande que* A (*). Si l'on désigne par γ cette racine, on trouve

(*) On reconnaît aisément qu'elle en a un nombre impair.

$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt{\gamma - A}, \\ q &= \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right), \\ q &= \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{B}{\sqrt{\gamma - A}}\right); \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

etc.

III. L'équation

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = 0$$

a pour réduite

$$z^3 - z^2 + 60z - 124 = 0.$$

Celle-ci donne $\gamma = 2$. Donc

$$p = 1, \quad q' = 5, \quad q = -3;$$

et enfin

$$x^4 + x^2 + 8x - 15 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 5).$$

IV. *Remarque.* — Lorsque la réduite (4) a trois racines réelles, plus grandes que A, la proposée (1) a toutes ses racines réelles. Mais alors les formules de Cardan (*) deviennent illusoires, et les valeurs de p, q, q' ne peuvent être exprimées, sous forme réelle, en fonction des coefficients A, B, C. Il en est de même si la réduite a ses racines réelles, mais non supérieures, toutes trois, à A. C'est donc seulement quand l'équation (4) a une seule racine réelle que les formules de Cardan peuvent être appliquées utilement à la résolution de l'équation (1) (**). Ce cas est celui où les coefficients A, B, C satisfont à la condition

$$-16(A^2 - 4C)^2 C + 4AB^2(A^2 - 36C) + 27B^4 > 0.$$

(*) Ou plutôt de Tartaglia. *Voyez* la savante Notice insérée, par Terquem, au tome XV des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

(**) Je mets de côté, bien entendu, le cas où l'équation (1) aurait des racines égales.

LXII. — SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES (*).

I. Soit un ellipsoïde donné, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

Les hyperboloïdes homofocaux avec cette surface peuvent commodément être représentés par

$$\frac{x^2}{a^2 - u^2} + \frac{y^2}{b^2 - u^2} + \frac{z^2}{c^2 - u^2} = 1 \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2 - v^2} + \frac{y^2}{b^2 - v^2} + \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1 \tag{3}$$

Nous supposons

$$a > u > b > v > c \tag{4}$$

de manière que l'équation (2) représente des *hyperboloïdes à deux nappes*, et l'équation (3), des *hyperboloïdes à une nappe*.

II. On tire, des équations (1), (2), (3) :

$$x^2 = a^2\frac{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\ y^2 = b^2\frac{(b^2-u^2)(b^2-v^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\ z^2 = c^2\frac{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \tag{5}$$

puis, de celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
dx &= -\frac{a}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\,\frac{(a^2-v^2)\,udu + (a^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}},\\
dy &= -\frac{b}{\sqrt{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}\,\frac{(b^2-v^2)\,udu + (b^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(b^2-u^2)(b^2-v^2)}},\\
dz &= -\frac{c}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\,\frac{(c^2-v^2)\,udu + (c^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(*) Résumé de quelques leçons faites à l'Université de Liége, en juin 1866.

Nous allons calculer, au moyen de ces valeurs, les quantités

$$\sum x^2, \ \sum \frac{x^2}{a^4}, \ \sum dx^2, \ \sum \frac{dx^2}{a^2}, \ \sum a^2 dx^2,$$

dont nous aurons besoin plus tard.

III. 1° En posant

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = \mathrm{P},$$

on a d'abord

$$\sum x^2 = -\frac{1}{\mathrm{P}} \Sigma\, a^2 (b^2 - c^2)(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{P}}\left[\Sigma a^6(b^2 - c^2) - (u^2 + v^2)\Sigma a^4(b^2 - c^2) + u^2 v^2 \Sigma a^2 (b^2 - c^2)\right].$$

Or :

$$\Sigma\, a^6 (b \ - c^2) = - \mathrm{P}\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\Sigma\, a^4 (b^2 - c^2) = - \mathrm{P},$$

$$\Sigma\, a^2 (b^2 - c^2) = 0;$$

donc

$$\sum x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - v^2;$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - v^2 \ (^*) \qquad (7).$$

(*) Cette relation, très-connue, est comprise dans un théorème général, que j'ai démontré autrefois (*Mémoire sur la transformation des variables, etc. — Académie de Bruxelles.* — 1840.)

2° De même,

$$\sum \frac{x^2}{a^4}$$

$$= -\frac{1}{a^2b^2c^2P}\left[a^2b^2c^2 \sum a^2(b^2-c^2) - a^2b^2c^2(u^2+v^2)\sum(b^2-c^2) + u^2v^2\sum b^2c^2(b^2-c^2)\right],$$

ou

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{u^2v^2}{a^2b^2c^2} \qquad (8).$$

3° Des formules (6), on déduit

$$\sum dx^2$$

$$= \sum \frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left[\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2}u^2du^2 + 2uvdudv + \frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}dv^2\right];$$

ou, en supprimant une somme nulle,

$$\sum dx^2 = -\frac{1}{P}\left[u^2du^2\sum a^2(b^2-c^2)\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2} + v^2dv^2\sum a^2(b^2-c^2)\frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}\right] \qquad (9).$$

Or :

$$\sum a^2(b-c^2)\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2} = \frac{1}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)}\sum a^2(b^2-c^2)(a^2-v^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2),$$

$$\sum a^2(b^2-c^2)\frac{a^2-u^2}{a^2-v^2} = \frac{1}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)}\sum a^2(b^2-c^2)(a^2-u^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2).$$

De plus, à cause de

$$(a^2-v^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)$$

$$= a^2b^2c^2 - a^2(b^2+c^2)u^2 + a^2u^4 - b^2c^2v^2 + (b^2+c^2)u^2v^2 - u^4v^2 :$$

$$\Sigma\, a^2\,(b^2-c^2)(a^2-v^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)$$

$$=a^2 b^2 c^2\ \Sigma\, a^2(b^2-c^2)-u^2\Sigma\, a^4(b^4-c^4)$$

$$+u^4\ \Sigma\, a^4(b^2-c^2)-a^2 b^2 c^2 v^2\ \Sigma\,(b^2-c^2)$$

$$+u^2 v^2\ \Sigma\, a^2(b^4-c^4)-u^4 v^2\ \Sigma\, a^2(b^2-c^2)$$

$$=u^4\ \Sigma\, a^4(b^2-c^2)+u^2 v^2\ \Sigma\, a^2(b^4-c^4)$$

$$=-\,\mathrm{P}u^2(u^2-v^2).$$

La relation (9) devient donc, simplement,

$$dx^2+dy^2+dz^2=(u^2-v^2)\left[\mathrm{U}^2 u^2 du^2-\mathrm{V}^2 v^2 dv^2\right] \qquad (10)\ :$$

dans celle-ci, on suppose, pour abréger,

$$\mathrm{U}^2=\frac{u^2}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)},\quad \mathrm{V}^2=-\frac{v^2}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)}\ (*).$$

4° On trouve, avec la même facilité,

$$\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}=(u^2-v^2)\left[\mathrm{U}^2 du^2-\mathrm{V}^2 dv^2\right] \qquad (11).$$

5° La quantité $\sum a^2dx^2$ se décompose en

$$-\ \frac{u^2du^2}{\mathrm{P}}\ \Sigma\, a^4\,(b^2-c^2)\ \frac{a^2-v^2}{a^2-u^2}$$

$$-\,2\ \frac{uvdudv}{\mathrm{P}}\ \Sigma\, a^4\,(b^2-c^2)$$

$$-\ \frac{v^2dv^2}{\mathrm{P}}\ \Sigma\, a^4(b^2-c^2)\ \frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}.$$

(*) En vertu des inégalités (4), les fonctions U^2, V^2 sont *positives.*

Or :

$$\Sigma a^4 (b^2 - c^2) \frac{a^2 - v^2}{a^2 - u^2} = \frac{1}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)} \Sigma a^4(b^2-c^2)(a^2-v^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2),$$

$$\Sigma a^4 (b^2 - c^2) = - \mathrm{P},$$

$$\Sigma a^4 (b^2 - c^2) \frac{a^2 - u^2}{a^2 - v^2} = \frac{1}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)} \Sigma a^4(b^2-c^2)(a^2-u^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2).$$

De plus, en négligeant deux termes nuls :

$$\Sigma a^4 (b^2 - c^2)(a^2 - v^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2)$$

$$= - \mathrm{P} a^2 b^2 c^2 - u^2 \Sigma a^6 (b^4 - c^4) + u^4 \Sigma a^6 (b^2 - c^2) + \mathrm{P} u^4 v^2$$

$$= - \mathrm{P} \left[a^2 b^2 c^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) u^2 + (a^2 + b^2 + c^2) u^4 - u^4 v^2 \right]$$

$$= - \mathrm{P} \left[(a^2 - u^2)(b^2 - u^2)(c^2 - u^2) + u^4 (u^2 - v^2) \right].$$

La somme cherchée est donc

$$\left[1 + \mathrm{U}^2 u^2 (u^2 - v^2)\right] u^2 du^2 + 2uv\,du\,dv + \left[1 + \mathrm{V}^2 v^2 (v^2 - u^2)\right] v^2 dv^2 ;$$

et, par conséquent,

$$\sum a^2 dx^2$$

$$= (u\,du + v\,dv)^2 + (u^2 - v^2)(\mathrm{U}^2 u^4 du^2 - \mathrm{V}^2 v^4 dv^2) \qquad (12).$$

IV. Soient l, p les distances du centre O à un point quelconque M et au plan tangent en M (*) ; soient, en outre, ds, ds' les éléments MM', mm' d'une courbe et de sa *transformée sphérique*, déterminée par les formules

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz' :$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

les équations (7), (8), (10), (11) deviennent :

$$l^2 = a^2 + b^2 + c^2 - u^2 - v^2 \qquad (7'),$$

$$puv = abc \qquad (8'),$$

$$ds^2 = (u^2 - v^2)\left[U^2 u^2 du^2 - V^2 v^2 dv^2\right] \qquad (10'),$$

$$ds'^2 = (u^2 - v^2)\left[U^2 du^2 - V^2 dv^2\right] \qquad (11').$$

V. Considérons sur l'ellipsoïde deux espèces de courbes : les unes, intersections de cette surface par des sphères concentriques avec l'ellipsoïde; les autres, lieux des points de contact des plans tangents dont la distance au centre est constante. D'après les relations (7'), (8'), les équations de ces courbes sont, respectivement,

$$u^2 + v^2 = const\ (^*), \quad uv = const.$$

Ces mêmes relations (7'), (8') expriment d'ailleurs que *les parallélipipèdes ayant pour arètes* l, u, v *ou* p, u, v, *ont les diagonales constantes ou un volume constant*.

VI. Soient R_1, R_2 les rayons principaux en un point quelconque de l'ellipsoïde. On sait que

$$R_1 + R_2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - l^2}{p}, \quad R_1 R_2 = \frac{a^2b^2c^2}{p}\ (^{**}).$$

(*) Il est assez remarquable que, dans ce système de coordonnées, l'*ellipse sphérique* soit, pour ainsi dire, représentée par l'*équation du cercle*.

(**) Dupin, *Développements de Géométrie*, p. 212. Il résulte, de la dernière relation, que *si un plan roule de manière à toucher constamment un ellipsoïde et une sphère concentriques, le lieu de ses points de contact avec l'ellipsoïde est une ligne de courbure constante.* On peut consulter aussi le Mémoire intitulé : *Recherches sur les surfaces gauches.* — *Académie de Belgique*, 1866.

Au moyen des équations (7′), (8′), on transforme ces formules en celles-ci :

$$R_1 + R_2 = \frac{(u^2+v^2)\,uv}{abc}, \quad R_1 R_2 = \frac{u^4v^4}{a^2b^2c^2};$$

d'où l'on conclut, en supposant $R_1 > R_2$:

$$R_1 = \frac{u^3v}{abc}, \qquad R_2 = \frac{uv^3}{abc}; \tag{13}$$

valeurs remarquables par la simplicité.

Il en résulte, en particulier, que les équations des *ombilics* sont

$$u = v = b;$$

ou

$$x^2 = a^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = c^2\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

VII. Dans un beau Mémoire de Joachimstal (*), l'équation générale des lignes géodésiques est mise sous la forme

$$\frac{\Sigma\, dX d^2x}{\Sigma\, dX dx} + \frac{\Sigma\, X dX}{\Sigma\, X^2} - \frac{\Sigma\, dx d^2x}{\Sigma\, dx^2} = 0, \tag{14}$$

X, Y, Z étant les dérivées partielles de la fonction $F(x, y, z)$ qui forme le premier membre de l'équation de la surface donnée. Dans le cas actuel,

$$X = \frac{2x}{a^2}, \quad Y = \frac{2y}{b^2}, \quad Z = \frac{2z}{c^2}.$$

(*) *Journal de Crelle*, tome XXVI.

Par suite, une intégrale première de l'équation (14) est

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{g^4}\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{dy^2}{b^2}+\dfrac{dz^2}{c^2}} \qquad (15),$$

g représentant une *longueur* arbitraire.

Au moyen des formules du paragraphe III, on transforme cette intégrale, soit en la relation

$$s'=\frac{1}{g^2}\int p\,ds \qquad (16),$$

soit en celle-ci :

$$(\mathrm{U}^2du^2-\mathrm{V}^2dv^2)\,u^2v^2=h^2\,(\mathrm{U}^2u^2du^2-\mathrm{V}^2v^2dv^2) \qquad (17),$$

dans laquelle

$$h=\frac{abc}{g^2}.$$

VIII. On tire, de l'équation (17),

$$\frac{\mathrm{U}u\,du}{\sqrt{u^2-h^2}}=\pm\frac{\mathrm{V}v\,dv}{\sqrt{v^2-h^2}} \qquad (18).$$

Par conséquent, l'intégrale seconde de l'équation (14), ou l'équation des lignes géodésiques, est

$$\int\frac{u^2du}{\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)(u^2-h^2)}}$$

$$\mp\int\frac{v^2dv}{\sqrt{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)(v^2-h^2)}}=const. \qquad (19).$$

Elle équivaut à

$$F(u) \mp F(v) = const. \qquad (20),$$

$F(\alpha)$ représentant, en général, l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{\sqrt{(a^2-\alpha^2)(b^2-\alpha^2)(c^2-\alpha^2)(\alpha^2-h^2)}} \ (*).$$

IX. La combinaison des équations (10)′ et (18) donne

$$ds^2 = \frac{(u^2-v^2)^2 U^2 u^2 du^2}{u^2-h^2},$$

ou

$$ds = \frac{(u^2-v^2) U u du}{\sqrt{u^2-h^2}}.$$

Le second membre est la même chose que

$$\frac{U u^3 du}{\sqrt{u^2-h^2}} - \frac{U u v^2 du}{\sqrt{u^2-h^2}};$$

donc, en vertu de l'équation (18),

$$ds = \frac{U u^3 du}{\sqrt{u^2-h^2}} \mp \frac{V v^3 dv}{\sqrt{v^2-h^2}}.$$

« Ici, » dit M. Liouville, « les variables sont séparées comme

---

(*) Voir, sur ce point, une Note de M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, tome IX). La plupart des résultats auxquels nous venons de parvenir ont été démontrés déjà par ce savant Géomètre ; mais il les a trouvés en considérant la ligne géodésique comme la *trajectoire d'un point qui ne serait sollicité par aucune force accélératrice* : nos méthodes sont donc essentiellement différentes.

dans l'équation même de la courbe; on a donc cette formule très-remarquable » :

$$s = \int \frac{u^4 du}{\sqrt{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)(u^2-h^2)}} \mp \int \frac{v^4 dv}{\sqrt{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)(v^2-h^2)}} + const \quad (21).$$

Il en résulte que l'arc de la ligne géodésique s'exprime par la somme ou la différence de deux intégrales abéliennes.

X. D'après une remarque de Joachimstal, le rayon de courbure d'une ligne géodésique est donné par la formule

$$\rho = \frac{m^4}{p^3},$$

dans laquelle m est une constante. A cause de $p^4 = \frac{a^2b^2c^2}{R_1 R_2}$, cette formule équivaut à

$$\frac{(R_1 R_2)^3}{\rho^4} = const. \quad (22)$$

Si la ligne géodésique est une section principale, $\rho = R_1$, et

$$\frac{R_2^3}{R_1} = const.$$

Au sommet C de la section principale AOC, $R_1 = \frac{a^2}{c}$, $R_2 = \frac{b^2}{c}$: la valeur de la constante est donc $\frac{b^6}{a^2c^2}$; et, par conséquent,

$$\frac{R_2^3}{R_1} = \frac{b^6}{a^2c^2}. \quad (23)$$

XI. Pour chaque valeur attribuée à la constante g, l'équation (15) représente une série de lignes géodésiques. Cherchons les trajectoires orthogonales de ces courbes (*).

En représentant, pour un instant, par δx, δy, δz les différentielles relatives à la trajectoire, on a

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0, \quad \frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy + \frac{z}{c^2}\,dz = 0\,;$$

d'où

$$\frac{dx}{\frac{y}{b^2}\,\delta z - \frac{z}{c^2}\,\delta y} = \frac{dy}{\frac{z}{c^2}\,\delta x - \frac{x}{a^2}\,\delta z} = \frac{dz}{\frac{x}{a^2}\,\delta y - \frac{y}{b^2}\,\delta x}.$$

Substituant dans (15), et rétablissant dx, dy, dz au lieu de δx, δy, δz, on trouve

$$\frac{g^4}{p^2} = \frac{\Sigma\left(\frac{y}{b^2}\,dz - \frac{z}{c^2}\,dy\right)^2}{\Sigma\,\frac{1}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}dz - \frac{z}{c^2}\,dy\right)^2} \tag{24},$$

équation différentielle des trajectoires cherchées.

La somme placée en numérateur est égale à

$$\Sigma\left(\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)dx^2 - 2\,\Sigma\,\frac{yz}{b^2c^2}\,dy\,dz$$

$$= \frac{ds^2}{p^2} - \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2}\right)^2 = \frac{ds^2}{p^2}.$$

(*) Il est bon d'observer que, d'après une remarque de M. Michael Roberts, toutes ces lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure. (*Journal de Liouville*, tome X). Conséquemment, les trajectoires orthogonales cherchées sont, pour ainsi dire, des *développantes de la ligne de courbure*.

De même,

$$\Sigma \frac{1}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}\,dz - \frac{z}{c^2}\,dy\right)^2 = \Sigma \frac{1}{b^2c^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dx^2 - \frac{2}{a^2b^2c^2}\,\Sigma\, yzdydz$$

$$= \Sigma \frac{dx^2}{b^2c^2} - \frac{1}{a^2b^2c^2}(xdx + ydy + zdz)^2$$

$$= \frac{1}{a^2b^2c^2}\left[\Sigma\, a^2dx^2 - (xdx + ydy + zdz)^2\right].$$

L'équation (24) devient donc, par cette première réduction,

$$\Sigma\, a^2dx^2 - (xdx + ydy + zdz)^2 = h^2ds^2 \qquad (25).$$

Nous avons trouvé :

$$\Sigma\, a^2dx^2 = (udu + vdv)^2 + (u^2 - v^2)\,[U^2u^4du^2 - V^2v^4dv^2],$$

$$ds^2 = (u^2 - v^2)\,[U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2].$$

De plus, à cause de la relation (7),

$$xdx + ydy + zdz = -(udu + vdv).$$

Par suite, l'équation (25) devient

$$U^2u^4du^2 - V^2v^4dv^2 = h^2\left[U^2u^2du^2 - V^2v^2dv^2\right],$$

ou, ce qui est équivalent,

$$Uu\sqrt{u^2 - h^2}\,du = \pm\, Vv\sqrt{v^2 - h^2}\,dv \qquad (26).$$

L'intégrale de celle-ci, c'est-à-dire l'équation des trajectoires, est donc

$$\int u^2du\sqrt{\frac{u^2-h^2}{(a^2-u^2)(b^2-u^2)(c^2-u^2)}}$$

$$\mp \int v^2dv\sqrt{\frac{v^2-h^2}{(a^2-v^2)(b^2-v^2)(c^2-v^2)}} = const \qquad (27).$$

(ADDITION. — AOUT 1867).

XII. Le dernier calcul peut être simplifié et généralisé. A cause de

$$dx = -a\frac{(a^2-v^2)udu+(a^2-u^2)vdv}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-u^2)(a^2-v^2)}},$$

$$\delta x = -a\frac{(a^2-v^2)u\delta u+(a^2-u^2)v\delta v}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-u^2)(a^2-v^2)}},$$

la condition

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0$$

équivaut à

$$\sum a^2(b^2-c^2)\left[\frac{a^2-v^2}{a^2-u^2}u^2du\,\delta u+uv(du\,\delta v+dv\,\delta u)+\frac{a^2-u^2}{a^2-v^2}v^2dv\,\delta v\right]=0,$$

ou, par les transformations employées ci-dessus (III, 3°), à

$$U^2u^2du\,\delta u = V^2v^2\,dv\,\delta v \qquad (28).$$

Il est facile de comprendre l'usage et l'utilité de cette relation générale : si l'on se donne l'équation différentielle

$$\mathrm{M}du = \mathrm{N}dv \qquad (29)$$

d'une série de courbes C, on en conclut immédiatement, pour leurs *trajectoires orthogonales* C_1,

$$\frac{U^2u^2}{\mathrm{M}}\delta u = \frac{V^2v^2}{\mathrm{N}}\delta v \qquad (30).$$

XIII. 1° Si les courbes C sont les lignes géodésiques considérées dans le paragraphe VIII,

$$\mathrm{M} = \frac{Uu}{\sqrt{u^2-h^2}},\quad \mathrm{N} = \pm\frac{Vv}{\sqrt{v^2-h^2}};$$

et l'équation (30) devient

$$Uu\sqrt{u^2-h^2}\,\delta u = \pm\, Vv\sqrt{h^2-v^2}\,\delta v :$$

celle-ci ne diffère pas de la relation (26).

2° Si les courbes C sont définies par $u^2+v^2 = const,$ ou par $uv = const.$ (V), on a, dans le premier cas,

$$M = u, \quad N = -v;$$

et, dans le second,

$$M = v, \quad N = -u.$$

L'équation différentielle des trajectoires C_1 est donc, soit

$$U^2 u\,\delta u + V^2 v\,\delta v = 0 \qquad (31),$$

soit

$$U^2 u^3 \delta u + V^2 v^3 \delta v = 0 \qquad (32).$$

Dans chacune de celles-ci, les variables sont séparées, et l'intégration est facile.

3° Supposons que les courbes C constituent un système de *sections circulaires* de l'ellipsoïde. L'équation différentielle de ces courbes est, comme l'on sait,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}},$$

le radical pouvant être pris avec un signe quelconque. Mais, par les formules (6),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,\frac{(c^2-v^2)\,udu + (c^2-u^2)\,vdv}{(a^2-v^2)\,udu + (a^2-u^2)\,vdv}\sqrt{\frac{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}},$$

conséquemment, l'équation différentielle des sections circulaires, rapportées aux coordonnées u, v, est

$$\frac{(c^2-v^2)\,udu + (c^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(c^2-u^2)(c^2-v^2)}} = \frac{(a^2-v^2)\,udu + (a^2-u^2)\,vdv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{u\,du}{\sqrt{(a^2-u^2)(c^2-u^2)}}=\frac{v\,dv}{\sqrt{(a^2-v^2)(c^2-v^2)}} \qquad (33).$$

Par suite, l'équation (30) devient :

$$\frac{u^3\,\partial u}{(b^2-u^2)\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-c^2)}}=-\frac{v^3\,\partial v}{(b^2-v^2)\sqrt{(a^2-v^2)(v^2-c^2)}} \qquad (34).$$

XIV. Pour intégrer, on peut prendre :

$$u^2=\frac{a^2p^2+c^2}{1+p^2},\quad v^2=\frac{a^2q^2+c^2}{1+q^2};$$

on trouve ainsi :

$$\frac{a^2p^2+c^2}{(a^2-b^2)p^2-(b^2-c^2)}\,\frac{dp}{1+p^2}=\frac{a^2q^2+c^2}{(a^2-b^2)q^2-(b^2-c^2)}\,\frac{dq}{1+q^2}.$$

D'ailleurs

$$\frac{a^2p^2+c^2}{(a^2-b^2)p^2-(b^2-c^2)}\,\frac{1}{1+p^2}$$

$$=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-c^2}}\left[\frac{1}{p\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{b^2-c^2}}-\frac{1}{p\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^2-c^2}}\right]$$

$$+\frac{1}{1+p^2}.$$

Conséquemment, l'intégrale de l'équation (34) est

$$\frac{b^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\,\mathrm{l}\,\frac{p\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{b^2-c^2}}{p\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^2-c^2}}+\operatorname{arc\,tg} p$$

$$+\frac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\,\mathrm{l}\,\frac{q\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{b^2-c^2}}{q\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^2-c^2}}+\operatorname{arc\,tg} q=\mathit{const}$$

ou, si l'on fait

$$p = \operatorname{tg}\varphi, \quad q = \operatorname{tg}\theta, \quad \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = \operatorname{tg}\gamma :$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\, \mathrm{l}\, \frac{\sin(\varphi-\gamma)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\varphi+\gamma)\sin(\theta+\gamma)} + \varphi + \theta = const.\ (^*) \quad (35)$$

XV. REMARQUE. *L'intégrale* de l'équation (33), ou l'équation des sections circulaires, rapportées aux coordonnées φ et θ, est

$$\varphi - \theta = const. \quad (36)$$

Pour interpréter ce résultat, considérons les deux hyperboloïdes passant par un point quelconque M de la section circulaire C, puis les cônes asymptotiques correspondants. Soient OG, OH les traces de ces cônes sur le plan zx, de manière que OG soit l'asymptote de l'hyperbole représentée par

$$\frac{x^2}{a^2 - u^2} + \frac{z^2}{c^2 - u^2} = 1,$$

et que OH soit l'asymptote de l'hyperbole dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2 - v^2} + \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1.$$

On a

$$\varphi = \mathrm{GO}x, \qquad \theta = \mathrm{GOH};$$

et, par conséquent :

Les génératrices principales (situées dans le plan zx) *des cônes asymptotiques aux hyperboloïdes passant en un point quelconque d'une section circulaire de l'ellipsoïde, font entre elles un angle constant.*

(*) On trouvera, dans la Note LXV, une autre solution du problème des *trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde.*

LXIII. — AIRE D'UNE SURFACE DU QUATRIÈME DEGRÉ.

I. Cette surface, bien connue, est engendrée par une droite D, de longueur donnée, dont les extrémités glissent sur deux droites fixes A, B, non situées dans un même plan, et, pour plus de simplicité, supposées perpendiculaires entre elles.

En appelant $2c$ la longueur de la commune perpendiculaire aux directrices, et γ l'angle constant formé par les directions de cette droite et de la génératrice, on trouve aisément que l'équation de la surface est réductible à la forme

$$\frac{x^2}{(c+z)^2} + \frac{y^2}{(c-z)^2} = \operatorname{tg}^2\gamma. \qquad (1)$$

Quant à la génératrice, elle peut être représentée par

$$x = (c+z)\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi, \quad y = (c-z)\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi, \qquad (2)$$

φ étant l'angle de A avec la projection de D sur le plan xy. Les angles α, β, que fait D avec les axes des x et des y, sont déterminés par les formules

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varphi, \quad \cos\beta = -\sin\gamma\sin\varphi. \qquad (3)$$

II. Lorsque la génératrice se déplace, un point M de cette ligne décrit *un petit arc d'ellipse* : la longueur et les projections de cet arc vérifient les relations

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = dx^2 + dy^2, \\ dx = -(c+z)\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = (c-z)\operatorname{tg}\gamma\cos\varphi\, d\varphi. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

V étant l'angle de ds avec D, on a

$$\cos V = \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta = -c\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma}\sin 2\varphi\frac{d\varphi}{ds}. \qquad (5)$$

Si l'on prend sur D, à partir du point M, une distance infiniment petite $MM' = d\sigma = \dfrac{dz}{\cos\gamma}$, le parallélogramme qui a pour côtés ds et $d\sigma$ peut être considéré comme l'élément de la surface. L'aire de ce parallélogramme est

$$dA = ds\, d\sigma \sin V.$$

Mais, par les formules (3), (4), (5) :

$$ds^2 \sin^2 V = \operatorname{tg}^2\gamma \left[(c+z)^2 \sin^2\varphi + (c-z)^2 \cos^2\varphi - c^2 \sin^2\gamma \sin^2 2\varphi\right] d\varphi$$

$$= \operatorname{tg}^2\gamma \left[(z - c\cos 2\varphi)^2 + c^2 \cos^2\gamma \sin^2 2\varphi\right] d\varphi^2 ;$$

donc

$$dA = \frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma} d\varphi\, dz \sqrt{(z - c\cos 2\varphi)^2 + c^2 \cos^2\gamma \sin^2 2\varphi} ;$$

puis

$$A = \frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-c}^{+c} dz \sqrt{(z - c\cos 2\varphi)^2 + c^2 \cos^2\gamma \sin^2 2\varphi}\ (^*). \quad (6)$$

III. En général,

$$\int du \sqrt{u^2 + a^2} = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2\, \mathrm{l}\,(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + const ;$$

donc, R étant le radical qui entre dans la formule (6),

$$\int R\, dz = \frac{1}{2}(z - c\cos 2\varphi) R + \frac{1}{2} c^2 \cos^2\gamma \sin^2 2\varphi\, \mathrm{l}\left[z - c\cos 2\varphi + R\right] + const ;$$

(*) On ne considère ici que la partie de la surface limitée par le plan zx, le plan zy et les directrices.

$$\left.\begin{aligned}\int_{-c}^{+c} \mathrm{R}dz = 2c^2\Big[\sin^3\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}+\cos^3\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\Big]\\ +\frac{1}{2}c^2\cos^2\gamma\sin^2 2\varphi\,\mathrm{l}\,\frac{(\sin\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi})\sin\varphi}{(-\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi})\cos\varphi}.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Au moyen de cette valeur et de l'identité

$$\frac{\sin\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}}{-\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{(\sin\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi})(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi})}{\sin^2\varphi\cos^2\gamma},$$

la formule (6) devient

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos^2\gamma}{c^2\sin\gamma}\mathrm{A}\\ &=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right]\\ &+\frac{1}{2}\cos^2\gamma\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathrm{l}\,(\sin\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\cos^2\varphi})\right.\\ &\qquad+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathrm{l}\,(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi})\\ &\qquad\left.-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\,\mathrm{l}\,(\sin\varphi)-2\mathrm{l}\,(\cos\gamma)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi\right].\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

IV. Les quatre premières intégrales sont égales deux à deux (*); donc :

$$\frac{\cos^2\gamma}{c^2\sin\gamma}A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}$$

$$+\cos^2\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\, d\varphi\, \mathrm{l}(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi})$$

$$-\cos^2\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\, d\varphi\, \mathrm{l}(\sin\varphi)-\cos^2\gamma\, \mathrm{l}(\cos\gamma)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\, d\varphi;$$

ou

$$A = \frac{c^2\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\Big[4M+N\cos^2\gamma\Big]-c^2\sin\gamma\Big[P+Q\,\mathrm{l}(\cos\gamma)\Big]; \qquad (9)$$

en supposant :

(*) Il est visible que la bissectrice de l'angle xOy est un *axe de symétrie* de la surface. Nous aurions donc pu, au lieu de la formule (6), en prendre une autre, dans laquelle les limites seraient 0 et $\frac{\pi}{4}$, 0 et c. Mais cette simplification est plus apparente que réelle.

$$\left.\begin{aligned}
M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\,,\\
N &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi\, \mathrm{l}\left(\cos\varphi+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)\,,\\
P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi\, \mathrm{l}(\sin\varphi)\,,\\
Q &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi\,.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

La question proposée se réduit donc à la détermination de ces quatre intégrales.

V. 1°

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{4}. \qquad (11)$$

2° Pour calculer M, posons

$$\sin\varphi = \frac{u}{\sin\gamma}\ :$$

il résulte, de cette transformation,

$$\cos\varphi d\varphi = \frac{du}{\sin\gamma}\,,\quad \cos^2\varphi = 1-\frac{u^2}{\sin^2\gamma}\,;$$

puis

$$M = \frac{1}{\sin\gamma}\int_{o}^{\sin\gamma} du\sqrt{1-u^2} - \frac{1}{\sin^3\gamma}\int_{o}^{\sin\gamma} u^2 du\sqrt{1-u^2}.$$

Or :

$$\int_{o}^{u} du\sqrt{1-u^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\arcsin u,$$

$$\int_{o}^{u} u^2 du\sqrt{1-u^2} = -\frac{1}{4}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}u + \frac{1}{4}\int_{o}^{u} du\sqrt{1-u^2}$$

$$= -\frac{1}{4}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}u + \frac{1}{8}u\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{8}\arcsin u\,;$$

donc

$$\int_{o}^{\sin\gamma} du\sqrt{1-u^2} = \frac{1}{2}(\sin\gamma\cos\gamma + \gamma),$$

$$\int_{o}^{\sin\gamma} du\sqrt{1-u^2} = \frac{1}{8}\left[(1-2\cos^2\gamma)\sin\gamma\cos\gamma + \gamma\right];$$

et, après quelques réductions,

$$M = \frac{1}{16\sin^3\gamma}\left[(2-\cos 2\gamma)\sin 2\gamma + 2\gamma(1-2\cos 2\gamma)\right]. \qquad (12)$$

3°.

$$P = \frac{1}{2}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}(\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\,\mathrm{l}(\sin\varphi)\,d\varphi.$$

On sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{l}(\sin\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\mathrm{l}\,2\ (^*).$$

De plus, à cause de $xlx = 0$ pour $x = 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\,\mathrm{l}(\sin\varphi)\,d\varphi = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi\,,$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\,\mathrm{l}(\sin\varphi)\,d\varphi = -\frac{1}{4}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\,d\varphi + \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\,d\varphi\right]$$

$$= -\frac{\pi}{8}\,.$$

Par suite,

$$P = \frac{\pi}{16}(1 - 4\,\mathrm{l}\,2) \qquad (13).$$

VI. La détermination de l'intégrale

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\,d\varphi\,\mathrm{l}\left(\cos\varphi + \sqrt{1 - \sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)$$

présente d'assez grandes difficultés. Pour essayer de les

(*) *Bierens de Haan*, T. 330. — L'*entête* de cette table contient une faute typographique ; au lieu de : *Lim.* 0 et $\frac{\pi}{4}$, on doit lire : *Lim.* 0 et $\frac{\pi}{2}$.

lever, je considère d'abord les cas particuliers de $\gamma = 0$ et de $\gamma = \frac{\pi}{2}$; savoir

$$N_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \, \mathrm{l}(1 + \cos\varphi),$$

$$N_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \, \mathrm{l}(2\cos\varphi).$$

1°

$$N_1 = \mathrm{l}2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi \, \mathrm{l}\,(\cos\varphi).$$

La première intégrale égale $Q = \frac{\pi}{4}$; la seconde ne change pas quand on y remplace φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$; c'est-à-dire qu'elle est égale à P. Conséquemment,

$$N_1 = \frac{\pi}{16}. \tag{14}$$

2° La comparaison des intégrales N_0 et P conduit à

$$N_0 - P = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, \mathrm{l}.\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi d\varphi.$$

Remplaçant $\sin^2 2\varphi$ par $\frac{1 - \cos 4\varphi}{2}$, puis intégrant par parties, on trouve aisément, au lieu du second membre,

$$\frac{1}{2}\int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin\varphi} d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

La première intégrale a pour valeur le double de la constante G (*); l'autre est égale à $\frac{1}{3}$. Conséquemment,

$$N_0 - P = G - \frac{1}{6},$$

ou

$$N_0 = \frac{\pi}{16}(1 - 4\,l\,2) + G - \frac{1}{6}. \;(^{**}) \tag{15}$$

VII. Remarquons maintenant que la dérivée de N, relative au *paramètre* γ, est

$$\frac{dN}{d\gamma} = -\sin\gamma\cos\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi \sin^2\varphi d\varphi}{\left(\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}\right)\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}$$

$$= -\operatorname{tg}\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\varphi + \sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}} \sin^2 2\varphi d\varphi,$$

ou

$$\frac{dN}{d\gamma} = \operatorname{tg}\gamma \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}} - Q\right]. \tag{16}$$

Pour calculer l'intégrale

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2\varphi}}, \tag{17}$$

(*) *Bierens de Haan*, T. 239. Voyez aussi la Note LIV.

(**) Un calcul direct, beaucoup plus long que celui-ci, conduit au même résultat.

je pose, comme ci-dessus,

$$\sin\varphi = \frac{u}{\sin\gamma}.$$

Cette transformation donne

$$S = \frac{4}{\sin^5\gamma}\int_0^{\sin\gamma}\frac{(\sin^2\gamma - u^2)u^2du}{\sqrt{1-u^2}},$$

ou

$$S = -\frac{4\cos^2\gamma}{\sin^5\gamma}\int_0^{\sin\gamma}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{4\cos^2\gamma}{\sin^5\gamma}\int_0^{\sin\gamma}du\sqrt{1-u^2}$$

$$+\frac{4}{\sin^5\gamma}\int_0^{\sin\gamma}u^2du\sqrt{1-u^2};$$

ou, d'après ce qui précède,

$$S = \frac{\gamma}{2\sin^5\gamma}(1-4\cos^2\gamma) + \frac{\cos\gamma}{2\sin^4\gamma}(1+2\cos^2\gamma). \tag{18}$$

Substituant dans la formule (16), on trouve

$$\frac{dN}{d\gamma} = \frac{\gamma}{2\sin^4\gamma\cos\gamma}(1-4\cos^2\gamma) + \frac{1}{2\sin^3\gamma}(1+2\cos^2\gamma) - \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\gamma;$$

et, par conséquent,

$$N = N_0 + \frac{1}{2}\int_0^{\gamma}\frac{\gamma(1-4\cos^2\gamma)+\sin\gamma\cos\gamma(1+2\cos^2\gamma)}{\sin^4\gamma\cos\gamma}d\gamma + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{l}\,(\cos\gamma). \tag{19}$$

L'intégrale indéfinie se décompose en

$$\int \frac{\gamma d\gamma}{\sin^4\gamma \cos\gamma} - 4\int \frac{\gamma \cos\gamma \, d\gamma}{\sin^4\gamma} + 3\int \frac{d\gamma}{\sin^3\gamma} - 2\,\mathrm{l}\left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma\right) = \mathrm{F}(\gamma).$$

On peut vérifier que

$$\int \frac{d\gamma}{\sin^4\gamma\cos\gamma} = -\frac{1}{3\sin^3\gamma} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma} - \frac{1}{\sin\gamma}.$$

D'ailleurs

$$\int \frac{\cos\gamma \, d\gamma}{\sin^4\gamma} = -\frac{1}{3\sin^3\gamma}.$$

On a donc, en intégrant par parties,

$$\mathrm{F}(\gamma) = \frac{\gamma}{\sin^3\gamma} + \frac{1}{2}\gamma\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right) - \frac{\gamma}{\sin\gamma} + 2\int \frac{d\gamma}{\sin^3\gamma} - \frac{1}{2}\int d\gamma\,\mathrm{l}\,\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma} - \mathrm{l}\left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma\right);$$

ou, à cause de

$$\int \frac{d\gamma}{\sin^3\gamma} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma\right) - \frac{1}{2}\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}:$$

$$\mathrm{F}(\gamma) = \frac{\gamma}{\sin^3\gamma} + \frac{1}{2}\gamma\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right) - \frac{\gamma}{\sin\gamma} - \frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma} - \frac{1}{2}\int d\gamma\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\gamma}{1-\sin\gamma}\right),$$

ou

$$\mathrm{F}(\gamma) = \frac{\cos\gamma\,(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{\sin^3\gamma} + \int \frac{\gamma d\gamma}{\cos\gamma}.$$

La fraction en dehors du signe $\int$ se réduit à $-\frac{1}{3}$ pour $\gamma = 0$; conséquemment

$$\int_0^\gamma \frac{\gamma(1-4\cos^2\gamma)+\sin\gamma\cos\gamma(1+2\cos^2\gamma)}{\sin^4\gamma\cos\gamma} = \frac{1}{3} + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma-\sin\gamma)}{\sin^3\gamma} + \int_0^\gamma \frac{\gamma d\gamma}{\cos\gamma};$$

puis, par la substitution dans la formule (19),

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 + \frac{1}{6} + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{l}\,(\cos\gamma)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\gamma \frac{\gamma d\gamma}{\cos\gamma};$$

ou encore, en réunissant les deux termes qui deviennent infinis pour $\gamma = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 + \frac{1}{6} + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\gamma \frac{\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta - \theta\right)d\theta}{\cos\theta}. \qquad (20)$$

VIII. Si l'on fait

$$\theta = \frac{\pi}{2} - v,$$

on change la dernière intégrale en

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\cos v - \frac{\pi}{2} + v\right)}{\sin v} dv = -\frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} dv + \int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{vdv}{\sin v}.$$

D'ailleurs

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} dv = -2\,\mathrm{l}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + 2\,\mathrm{l}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)\right]$$

$$= 2\,\mathrm{l}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right);$$

donc la formule (20) devient

$$N = N_0 + \frac{1}{6} + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} + \frac{\pi}{2}\mathrm{l}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{vdv}{\sin v};$$

ou plus simplement, et à cause de la valeur de N_0 :

$$N = \frac{\pi}{16}(1 - 4\,\mathrm{l}\,2) + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{l}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{vdv}{\sin v};$$

ou enfin

$$\left.\begin{aligned} N = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\gamma}{2}\right) + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma} \\ + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{vdv}{\sin v}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

On voit ainsi que la fonction désignée par N se compose d'une somme de quantités données, augmentée de la moitié d'une intégrale de forme très-simple, mais dont la valeur n'est pas connue généralement. Le problème que nous nous étions proposé de résoudre se réduit donc, en dernière analyse, à la recherche de cette même intégrale.

IX. Reprenons les formules (9), (11), (12), (13) et (21) :

$$A = \frac{c^2 \sin\gamma}{\cos^2\gamma}\left[4\,M + \cos^2\gamma\right] - c^2 \sin\gamma \left[P + Q\,l\,(\cos\gamma)\right],$$

$$M = \frac{1}{16 \sin^5\gamma}\left[(2 - \cos 2\gamma) \sin 2\gamma + 2\gamma(1 - 2\cos 2\gamma)\right],$$

$$N = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\,l\left(\frac{1+\sin\gamma}{2}\right) + \frac{\cos\gamma(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma)}{2\sin^3\gamma}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{2}-\gamma} \frac{v\,dv}{\sin v},$$

$$P = \frac{\pi}{16}\left(1 - 4\,l\,2\right), \quad Q = \frac{\pi}{4}.$$

La substitution des valeurs de M et de N donne d'abord, au moyen de quelques réductions,

$$4M + N\cos^2\gamma = \frac{3}{2}\cos\gamma + \frac{\gamma}{2\sin\gamma}(3\sin^2\gamma + 2\cos^2\gamma)$$

$$+ \frac{\pi}{16}\cos^2\gamma\left[1 + 4l\left(\frac{1+\sin\gamma}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\cos^2\gamma\int_o^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{v\,dv}{\sin v}.$$

De plus,

$$P + Q\,l(\cos\gamma) = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4}\,l\left(\frac{2}{\cos\gamma}\right).$$

Conséquemment

$$\left.\begin{aligned}\frac{A}{c^2} = \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma + \frac{\gamma}{2}(3\,\mathrm{tg}^2\gamma + 2) + \frac{\pi}{4}\sin\gamma\, l\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)\\ + \frac{1}{2}\sin\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{vdv}{\sin v}.\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

X. Si l'on compare cette valeur à celle qui résulte de l'équation (6), et que l'on prenne c pour unité, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-1}^{+1} dz\sqrt{(z-\cos 2\varphi)^2 + \cos^2\gamma\sin^2 2\varphi}\\ &= \frac{3}{2}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sin\gamma}(3\sin^2\gamma + 2\cos^2\gamma) + \frac{\pi}{4}\cos^2\gamma\, l\left(\frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\cos^2\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\frac{vdv}{\sin v}.\end{aligned}\right\}\,(^*)\ (23)$$

(*) Cette formule semble en défaut lorsque $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Mais dans ce cas, l'intégrale relative à z doit être décomposée ainsi :

$$\int_{-1}^{\cos 2\varphi} (\cos 2\varphi - z)\,dz + \int_{\cos 2\varphi}^{+1} (z - \cos 2\varphi)\,dz\,;$$

parce que, dans le premier membre de (23), le radical est supposé positif.

LXIV. — TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DES SECTIONS CIRCULAIRES D'UN ELLIPSOÏDE (NOVEMBRE 1865) (*).

I. Soit un ellipsoïde OABC (**) ayant pour centre le point O, et dans lequel les demi-axes, rangés par ordre de grandeur décroissante, soient $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Si, dans le plan de la section principale CA, nous prenons un rayon vecteur $OE = OB = b$, le plan BOE coupera l'ellipsoïde suivant un cercle; et il en sera de même pour tous les plans parallèles à celui-là. Les limites de ces cercles, c'est-à-dire les points I, I' où l'ellipsoïde est touché par deux plans parallèles à BOE, sont des ombilics de la surface.

Cela posé, si nous rapportons l'ellipsoïde aux droites OE, OB et à une perpendiculaire Oz au plan BOE, la *projection* P *du contour apparent* de la surface pourra être représentée par

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q} = 1. \text{ (***)} \tag{1}$$

II. Les sections circulaires parallèles à BOE, ou les *lignes de niveau* de l'ellipsoïde, se projettent, en vraie grandeur, suivant des circonférences *doublement tangentes* à l'ellipse P, et dont les centres sont situés sur Ox.

(*) Rédaction nouvelle d'une Note publiée dans le *Journal de Mathématiques* (tome XII).

(**) Le lecteur est prié de faire les figures.

(***) Il est évident que $q = b$. De plus, un calcul fort simple donne

$$p^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{b^2}.$$

On trouve aisément que l'équation de ces circonférences est

$$(x-\alpha)^2+y^2=q^2\left[1-\frac{\alpha^2}{r^2}\right] (*); \tag{2}$$

en supposant

$$r^2=p^2-q^2.$$

Par conséquent, les *trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde*, ou les *lignes de plus grande pente* de cette surface, ont pour projections, sur le plan xOy, les *trajectoires orthogonales des circonférences* dont il s'agit.

III. Le calcul ordinaire conduit à

$$(p^2ydx-q^2xdy)^2=r^2\,(p^2q^2-p^2y^2-q^2x^2)\,dy^2, \tag{3}$$

équation différentielle des trajectoires (**).

(*) La discussion de l'équation (2) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Si α est compris entre 0 et $\frac{r^2}{p}$, la circonférence touche en effet l'ellipse en deux points symétriquement placés relativement à l'axe des abscisses ;

2° Lorsque $\alpha=\frac{r^2}{p}$, la circonférence devient osculatrice à l'ellipse : son rayon $\rho=\frac{q^2}{p}$;

3° Si α est compris entre $\frac{r^2}{p}$ et r, la circonférence est *intérieure* à l'ellipse ; mais, au point de vue *algébrique*, ces deux courbes sont doublement tangentes l'une à l'autre ;

4° Enfin, lorsque $\alpha=\pm r$, l'équation (2) représente les *foyers de l'ellipse* : *ces points sont les projections des ombilics* I', I (*Journal de Mathématiques*, tome XII, p. 486).

(**) Elle ne diffère, que par la notation, de celle qui se trouve dans la Note citée (*Journal de Mathématiques*, tome XII, p. 484, éq. (2)).

Avant de chercher à l'intégrer, on peut reconnaître, soit par le calcul, soit graphiquement, que *chacune des courbes représentée par cette équation* (3) :

1° *Passe par les deux foyers ;* 2° *présente un rebroussement au point où elle coupe l'ellipse.*

Conséquemment : 1° *les trajectoires orthogonales des sections circulaires de l'ellipsoïde, parallèles au plan* BOE, *passent toutes par les ombilics* I, I′ ; 2° *au point d'intersection* P *d'une de ces courbes avec le contour apparent de l'ellipsoïde, relatif au plan* BOE, *la tangente* PS *est perpendiculaire à ce même plan* (*).

IV. La variable α étant moindre que r, on peut supposer

$$\alpha = r \sin \varphi.$$

De plus, on satisfait à l'équation (2) en prenant

$$x = r \sin \varphi + q \cos \varphi \cos \theta, \quad y = q \cos \varphi \sin \theta \ (^{**}). \tag{4}$$

On conclut, de ces valeurs,

$$\begin{aligned} p^2q^2 - p^2y^2 - q^2x^2 &= (q^2+r^2)q^2 - (q^2+r^2)q^2\cos^2\varphi\sin^2\theta - q^2(r\sin\varphi + q\cos\varphi\cos\theta)^2 \\ &= q^4 \sin^2\varphi - 2q^3 r \sin\varphi\cos\varphi\cos\theta + q^2r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta \\ &= q^2(q\sin\varphi - r\cos\varphi\cos\theta)^2 ; \end{aligned}$$

(*) De là résulte, suivant une remarque de M. Chasles (*Journal de Mathématiques*, tome II, p. 293), que *le plan osculateur en* P, *à la trajectoire orthogonale considérée, est normal, tout le long de l'arête* PS, *au cylindre qui projette l'ellipsoïde sur le plan* BOE.

(**) Si c est le centre d'une circonférence doublement tangente à l'ellipse P, et que m soit le point où cette ligne est coupée par la trajectoire correspondante, α est l'abscisse de c, et θ est l'angle formé par le rayon mc avec Ox.

puis, au lieu de l'équation (3),

$$p^2 \cos\varphi \sin\theta\, dx = \left[q(r\sin\varphi + q\cos\theta\cos\theta) \pm r(q\sin\varphi - r\cos\varphi\cos\theta) \right] dy;$$

c'est-à-dire, en séparant les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \quad (5), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p^2\cos\varphi\sin\theta}{2qr\sin\varphi + (q^2 - r^2)\cos\varphi\cos\theta}. \tag{6}$$

V. D'après les formules (4),

$$\frac{dy}{dx} = q\,\frac{\cos\varphi\cos\theta\, d\theta - \sin\varphi\sin\theta\, d\theta}{r\cos\varphi\, d\varphi - q\sin\varphi\cos\theta\, d\varphi - q\cos\varphi\sin\theta\, d\theta};$$

en sorte que l'équation (5) devient, après quelques réductions,

$$d\varphi = \frac{q}{r}\frac{d\theta}{\sin\theta}. \tag{7}$$

L'intégrale de celle-ci est

$$\varphi = \frac{q}{r}\, \mathrm{l}\,(\lambda \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta); \tag{8}$$

λ étant la constante arbitraire (*).

VI. Le point m, considéré tout-à-l'heure, est l'intersection de la circonférence cm avec une circonférence $c'm$, doublement tangente à l'ellipse E. En appelant φ', θ' les quantités analogues à φ et θ, relatives à cette seconde circonférence, on aurait

$$x = r\sin\varphi' + q\cos\varphi'\cos\theta', \quad y = q\cos\varphi'\sin\theta';$$

(*) On peut comparer cette *équation des trajectoires orthogonales* avec celle que nous avons trouvée ci-dessus (p. 272).

donc, pour le point m :

$$\cos\varphi'\sin\theta' = \cos\varphi\sin\theta, \quad r\sin\varphi' + q\cos\varphi'\cos\theta' = r\sin\varphi + q\cos\varphi\cos\theta.$$

On tire de ces équations, par un calcul que nous supprimons,

$$\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{p^2\cos\varphi\sin\theta}{2qr\sin\varphi + (q^2 - r^2)\cos\varphi\cos\theta}. \tag{9}$$

De ces deux formules, la première équivaut à $\theta' = \theta$; la seconde, comparée à l'équation (6), donne

$$\frac{dx}{dx} = \operatorname{tg}\theta',$$

ou

$$d\varphi' = \frac{q}{r}\frac{d\theta'}{\sin\theta'}; \tag{7'}$$

et, par suite,

$$\varphi' = \frac{q}{r}\,\mathrm{l}\,(\lambda'\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta'). \tag{8'}$$

Cette intégrale ne différant de l'équation (8) que par la notation, il en résulte que le système des formules (4) et (8) peut être regardé comme étant *l'intégrale générale de l'équation* (3). Autrement dit, cette équation (3), du premier ordre et du second degré, représente seulement les trajectoires orthogonales qu'il s'agissait de trouver.

LXV. — SUR LES SURFACES A COURBURE MOYENNE NULLE (MAI 1867) (*).

I. On sait qu'en représentant par a, b les cosinus des angles formés par la normale avec les axes des x et des y, on peut mettre l'équation des lignes de courbure sous la forme

$$da : dx = db : dy,$$

ou plutôt sous celle-ci :

$$\left(\frac{da}{dx}\,dx + \frac{da}{dy}\,dy\right)dy = \left(\frac{db}{dx}\,dx + \frac{db}{dy}\,dy\right)dx. \tag{1}$$

D'un autre côté, dans un Mémoire (**) sur les surfaces dont il s'agit, j'ai prouvé que leur équation est, si l'on veut,

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} = 0. \tag{2}$$

Il résulte, de celle-ci,

$$a = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad b = -\frac{d\varphi}{dx}, \tag{3}$$

φ étant une certaine fonction de x et de y. Soit z_1 cette fonction; soient p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 les dérivées partielles de z_1 : d'après les formules (3) :

$$a = q_1, \; b = -p_1, \; \frac{da}{dx} = s_1, \; \frac{da}{dy} = t_1, \; \frac{db}{dx} = -r_1, \; \frac{db}{dy} = -s_1;$$

(*) La présente Note est, en grande partie, rédigée depuis plus d'un an; j'en ai indiqué les résultats dans mon cours à l'Université de Liége.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, 37e cahier, p. 130.

puis, au lieu de l'équation (1),

$$r_1\,dx^2 + 2\,s_1\,dx\,dy + t_1\,dy^2 = 0. \tag{4}$$

Soient S la surface à courbure moyenne nulle, S_1 la surface qui a pour équation $z_1 = \varphi\,(x, y)$. En observant que l'équation (4), transformée de (1), appartient aux *lignes asymptotiques* de S_1, on a ce théorème :

Les lignes de courbure de la surface S, *et les lignes asymptotiques de la surface* S_1, *ont mêmes projections sur le plan des* xy.

II. Si la surface S est connue, et qu'elle ait pour équation $z = f(x, y)$, on aura

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy = -b dx + a dy\ ,$$

ou

$$dz_1 = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dx - \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dy\,(*), \tag{5}$$

puis

$$z_1 = \int \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,dx - \mathrm{Y}. \tag{6}$$

Pour déterminer Y, on a la relation

$$-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \int dx \frac{d\,.\,\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dy}.$$

(*) Il est plus simple de prendre

$$z_1 = -\int b dx + \int a dy + \int dy \int \frac{db}{dy}\,dx.$$

D'ailleurs

$$\frac{d\,.\,\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\;t-q\,\dfrac{ps+qt}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{1+p^2+q^2}=\frac{(1+p^2)\,t-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

donc

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\int\frac{(1+p^2)\,t-pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy. \tag{7}$$

A cause de

$$(1+p^2)\,t-2pqs+(1+q^2)\,r=0, \tag{8}$$

on vérifie aisément que le second membre de l'équation (7) est indépendant de x ; ce qui doit être.

III. Soit, par exemple,

$$z=\mathrm{l}\cos y-\mathrm{l}\cos x;$$

d'où

$$p=\operatorname{tg}x\,,\ q=-\operatorname{tg}y\,,\ r=\frac{1}{\cos^2 x}\,,\ s=0\,,\ t=-\frac{1}{\cos^2 y}\,.$$

L'équation (7) devient

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy}=-\int\frac{\cos x\cos y}{(\cos^2 y+\cos^2 x\sin^2 y)^{\frac{3}{2}}}\,dx+\frac{\sin x\cos y}{\sqrt{\cos^2 y+\cos^2 x\sin^2 y}}\,;$$

ou, si l'on fait $\sin x=\lambda$:

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy}=-\cos y\int\frac{d\lambda}{(1-\lambda^2\sin^2 y)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\lambda\cos y}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 y}}$$

L'intégrale a pour valeur

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 y}};$$

donc

$$\frac{dY}{dy} = 0, \qquad Y = const.$$

Si, pour plus de simplicité, on suppose cette constante nulle, on trouve, par l'équation (6),

$$\sin z_1 = -\sin x \sin y. \tag{9}$$

Telle est l'équation de la surface S_1, en supposant que la surface S soit représentée par

$$z = l\cos y - l\cos x.$$

IV. L'équation des lignes de courbure de la surface S_1 est, en général,

$$\frac{dx + p_1 dz_1}{dp_1} = \frac{dy + q_1 dz_1}{dq_1},$$

ou

$$\frac{dx - b(ady - bdx)}{db} + \frac{dy + a(ady - bdx)}{da} = 0,$$

ou

$$\Big[(1+b^2)dx - abdy\Big] d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \Big[(1+a^2)dy - abdx\Big] d.\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, et que l'on remplace a, b par leurs valeurs, on trouve, au lieu de cette équation,

$$\left[(1+2q^2)r-2pqs\right]dx^2$$
$$+2\left[(1+p^2+q^2)s-pq(r+t)\right]dxdy$$
$$+\left[(1+2p^2)t-2pqs\right]dy^2=0\,(^*). \qquad (10)$$

L'équation des lignes asymptotiques de la surface S étant

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0, \qquad (11)$$

ces courbes auront mêmes projections que les lignes de courbure de S_1, si l'on a

$$\frac{q(ps-qr)}{r}=\frac{p(ps-qr)+q(qs-pt)}{-2s}=\frac{p(qs-pt)}{t}=\frac{\lambda}{1}. \qquad (12)$$

Il résulte, de ces proportions,

$$r=\frac{pqs}{q^2+\lambda},\quad t=\frac{pqs}{p^2+\lambda},\quad ps-qr=\frac{ps\lambda}{q^2+\lambda},\quad qs-pt=\frac{qs\lambda}{p^2+\lambda}; \qquad (13)$$

et, en supposant s différent de zéro (**):

$$\frac{p^2}{q^2+\lambda}+\frac{q^2}{p^2+\lambda}+2=0; \qquad (14)$$

(*) On arrive plus simplement à cette équation en partant de celle-ci :

$$\left(\frac{da_1}{dx}dx+\frac{da_1}{dy}dy\right)dy=\left(\frac{db_1}{dx}dx+\frac{db_1}{dy}dy\right)dx,$$

et en observant que

$$a_1=-\frac{q}{\sqrt{1+2p^2+2q^2}},\qquad b_1=\frac{p}{\sqrt{1+2p^2+2q^2}}.$$

(**) Je laisse de côté le cas où l'on aurait, simultanément :

$$qr=ps,\quad pt=qs:$$

la surface S est alors un cylindre.

Les racines de cette équation sont :

$$\lambda_1 = -(p^2 + q^2), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2). \tag{15}$$

V. 1°. La première valeur donne

$$r = -\frac{q}{p}s, \quad t = -\frac{p}{q}s,$$

c'est-à-dire

$$p\frac{dp}{dx} + q\frac{dq}{dx} = 0, \quad p\frac{dp}{dy} + q\frac{dq}{dy} = 0;$$

d'où

$$p^2 + q^2 = k^2. \tag{16}$$

Cette équation exprime que *toutes les normales à la surface* S *sont également inclinées sur l'axe des* z. Cette même équation a la forme F $(p, q) = 0$; donc *la surface* S *est développable*. En combinant ces deux propriétés, on conclut que *la surface* S *est l'enveloppe d'un plan qui fait un angle constant avec le plan des* xy*;* elle ne diffère donc pas de la *surface à pente constante* (*).

D'après un théorème dont j'ai donné autrefois la démonstration (**), cette surface réglée ne saurait être à courbure moyenne nulle. Par conséquent, la première racine de l'équation (14) ne répond pas au problème. Dans le paragraphe XII, je reviendrai sur cette circonstance.

2° Si l'on prend $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, on trouve

$$r = \frac{2pqs}{q^2 - p^2}, \quad t = -\frac{2pqs}{q^2 - p^2}. \tag{17}$$

(*) Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § VIII; La Gournerie, *Traité de Géométrie descriptive*.

(**) *Journal de Mathématiques*, tome VII.

La prem ière équation équivaut à

$$(q^2-p^2)\frac{dp}{dx}=2pq\frac{dq}{dx}.$$

Pour intégrer, je suppose $p=\alpha q$: il vient

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{p}+\frac{2\alpha\frac{d\alpha}{dx}}{\alpha^2+1}=0;$$

et, conséquemment,

$$p=\frac{Y}{\alpha^2+1},$$

ou

$$p^2+q^2=pY,$$

Y étant une fonction de y.

La seconde équation (17) donnerait, pareillement,

$$p^2+q^2=qX;$$

donc

$$p=\frac{X^2Y}{X^2+Y^2},\quad q=\frac{XY^2}{X^2+Y^2}, \tag{18}$$

Si l'on a égard à la condition

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx},$$

et si l'on opère un déplacement d'origine, on trouve enfin, pour l'équation de la surface S,

$$\frac{z}{g}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}, \tag{19}$$

g étant une constante arbitraire : la surface S est donc un *héliçoïde à plan directeur*. Cherchons la surface S_1 correspondante.

VI. On a

$$p = \frac{gy}{x^2 + y^2}, \quad q = -\frac{gx}{x^2 + y^2};$$

de sorte que l'équation (5) devient

$$-dz_1 = g\,\frac{\dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{g^2}{x^2 + y^2}}} = g\,\frac{du}{\sqrt{u^2 + g^2}}, \tag{20}$$

en supposant

$$u^2 = x^2 + y^2.$$

Intégrant, et déterminant la constante de manière que $z_1 = 0$ pour $u = 0$, on trouve

$$u = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} - e^{-\frac{z_1}{g}}\right). \tag{21}$$

Cette équation appartient à une surface de révolution S_1 : la section méridienne, représentée par

$$x = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} - e^{-\frac{z_1}{g}}\right),$$

a une liaison remarquable avec la chaînette dont l'équation serait

$$x = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} + e^{-\frac{z_1}{g}}\right):$$

ces deux courbes ont pour *diamètre asymptotique* la logarithmique représentée par

$$x = \frac{g}{2}e^{\frac{z_1}{g}}.$$

VII. La surface de révolution S_1 est donc telle, que ses lignes de courbure se projettent, sur le plan xy, suivant des *circonférences* et des *rayons*, projections des lignes asymptotiques de l'héliçoïde S. Cette propriété subsisterait pour toute autre surface de révolution autour de Oz. Mais il y a plus : *les lignes asymptotiques de* S_1, *et les lignes de courbure de S, ont mêmes projections sur le plan des* xy; en sorte que les surfaces S, S_1 *sont conjuguées.*

Pour vérifier directement ce dernier point, j'observe qu'en vertu de l'équation (20) :

$$p_1 = -\frac{gx}{u\sqrt{u^2+g^2}}, \qquad q_1 = -\frac{gy}{u\sqrt{u^2+g^2}};$$

puis

$$r_1 = -g\frac{u^2(u^2+g^2)-x^2(2u^2+g^2)}{u^3(u^2+g^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s_1 = \quad g\frac{(2u^2+g^2)xy}{u^3(u^2+g^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t_1 = -g\frac{u^2(u^2+g^2)-y^2(2u^2+g^2)}{u^3(u^2+g^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation des lignes asymptotiques de S_1 est donc

$$(u^4-2u^2x^2+g^2y^2)dx^2-2(2u^2+g^2)xy\,dxdy+(u^4-2u^2y^2+g^2x^2)dy^2=0. \quad (22)$$

On peut l'écrire ainsi :

$$u^4(dx^2+dy^2)-2u^2(xdx+ydy)^2+g^2(ydx-xdy)^2=0.$$

Mais, si l'on prend des coordonnées polaires, on a

$$dx^2+dy^2=du^2+u^2d\omega^2, \quad xdx+ydy=udu, \quad ydx-xdy=-u^2d\omega;$$

d'où l'on conclut,

$$d\omega = \pm \frac{du}{\sqrt{g^2 + u^2}}. \tag{23}$$

Or, cette équation (23) appartient aux lignes de courbure de l'héliçoïde (*).

VIII. Le résultat auquel nous venons de parvenir nous paraît d'autant plus remarquable que, par une autre voie, on peut trouver une seconde *surface conjuguée de l'héliçoïde* ; savoir, le *caténoïde* représenté par

$$u = \frac{g}{2}\left(e^{\frac{z_1}{g}} + e^{-\frac{z_1}{g}}\right). \tag{24}$$

IX. On peut se demander *dans quel cas la surface* S_1 *est-elle, comme la surface* S, *à courbure moyenne nulle?* Pour qu'il en soit ainsi, $z_1 = \varphi(x, y)$ doit être une intégrale de

$$\frac{da_1}{dx} + \frac{db_1}{dy} = 0,$$

ou de

$$\frac{d.\dfrac{q}{\sqrt{1 + 2p^2 + 2q^2}}}{dx} = \frac{d.\dfrac{p}{\sqrt{1 + 2p^2 + 2q^2}}}{dy}.$$

En développant, on trouve

$$\frac{p}{q} = \frac{pr + qs}{ps + qt}. \tag{25}$$

Ainsi, la surface S, qui satisfait à l'équation

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0,$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 29e Cahier, p. 143.

doit satisfaire encore à l'équation (25). L'intégrale première de celle-ci est

$$z = \psi\,(p^2 + q^2), \tag{26}$$

ψ étant une fonction arbitraire. Cette équation (26) exprime que, *pour tous les points appartenant à une ligne de niveau, l'inclinaison de la normale à la surface, sur le plan de cette ligne, est constante.* De là résulte que toutes *ces courbes sont équidistantes* et qu'elles se projettent, sur le plan des xy, suivant des *courbes parallèles* à une première ligne donnée.

La surface Σ, représentée par l'équation (26), *peut être engendrée par une ligne plane* G, *dont un point* M *décrit une ligne plane* D, *pendant que les deux plans restent perpendiculaires entre eux. Si la directrice* D *est une ellipse, les lignes de niveau sont des toroïdes*, etc.

X. soit $\beta = \mathrm{F}\,(\alpha)$ l'équation de la directrice D, que nous supposerons située dans le plan des xy. Une *parallèle* à cette courbe a pour équation :

$$x - \alpha + (y - \beta)\,\beta' = 0\,, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

Dans le cas actuel, le rayon ρ est une fonction de z ; donc l'intégrale seconde de l'équation (25), ou l'intégrale première de l'équation (26), est représentée par le système des deux équations

$$x - \alpha + (y - \mathrm{F})\,\mathrm{F}' = 0\,, \quad (x - \alpha)^2 + (y - \mathrm{F})^2 = f(z) \qquad (27),$$

dans laquelle f et F sont des fonctions arbitraires. Dans chaque exemple particulier, l'élimination de α donnera l'équation d'une *surface* Σ *à lignes de niveau équidistantes*, et ayant une directrice donnée.

XI. La surface Σ jouit des propriétés suivantes : 1° *Les lignes de plus grande pente, toutes égales entre elles, sont situées dans des plans verticaux ;* 2° *ce sont des lignes de courbure;* 3° *les courbes de niveau sont des lignes de courbure* (*); 4° *si l'on considère la courbe* C *suivant laquelle la surface touche le cylindre vertical, enveloppe des plans qui contiennent les lignes de plus grande pente*, cette courbe C *est une développée de la surface* Σ. C'est-à-dire que si le cylindre se déroule, C engendre Σ, etc.

XII. La surface Σ dont nous venons de nous occuper n'est pas, en général, à courbure moyenne nulle : pour qu'elle le soit, la directrice D et la génératrice doivent satisfaire à certaines conditions.

Afin de les découvrir, remarquons d'abord que, le plan de la ligne de courbure G contenant la normale à la surface, cette ligne G *est une section principale.* De plus, en tous les points d'une même ligne de niveau, le rayon R_1 de cette première section principale a une valeur constante. A cause de

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,$$

le rayon R_2 de la seconde section principale doit aussi être constant. D'après le Théorème de Meusnier, joint à la définition de la surface, R_2 est égal au rayon ρ de la ligne de niveau, divisé par le cosinus d'un angle constant. Donc $\rho = const.$: *les lignes de niveau sont des circonférences.* De plus, elles doivent être équidistantes (IX) ; et cette propriété caractérise une surface de révolution. En résumé, la surface S est un *caténoïde.*

(*) En effet, ces courbes sont des trajectoires orthogonales des lignes de plus grande pente.

LXVI. — SUR LA PARTITION DES NOMBRES (OCTOBRE 1867) (*).

PROBLÈME. — *De combien de manières peut-on former une somme* n, *avec* q *nombres entiers, égaux ou inégaux?*

I. Désignons par $N_{n,q}$ (**) le nombre cherché, et considérons l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot + x_q = n. \tag{1}$$

En supposant que les valeurs des inconnues soient rangées par ordre de grandeur *non décroissante*, nous pourrons attribuer à x_1, successivement, les α valeurs entières :

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots \alpha,$$

α représentant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{q}$; de sorte que

$$\alpha = \left(\frac{n}{q}\right) (^{***}). \tag{2}$$

Soit, en particulier, $x_1 = a$: les valeurs de $x_2, x_3, \ldots x_q$ ne pouvant être inférieures à a, nous ferons

$$x_2 = y_2 + a - 1, \quad x_3 = y_3 + a - 1, \ldots x_q = y_q + a - 1;$$

et nous aurons ainsi, au lieu de (1), α équations de la forme

$$y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot + y_q = n - 1 - (a - 1) q, \tag{3}$$

(*) Cette Note peut être considérée comme faisant suite à celle de la page 62.

(**) Dans la Note citée, $N_{n.q}$ était remplacé par $[n, q]$.

(***) Comme nous l'avons déjà dit, la notation $\left(\frac{n}{q}\right)$ équivaut à celle-ci : $E\left(\frac{n}{q}\right)$, adoptée par Legendre.

dans lesquelles les $q - 1$ inconnues pourront recevoir les valeurs 1, 2, 3..... Le nombre des solutions de l'équation (3) étant $N_{n-1-(a-1)q,\, q-1}$, il s'ensuit

$$N_{n,q} = \sum_{a=1}^{a=\alpha} N_{n-1-(a-1)q,\, q-1}, \tag{4}$$

ou

$$N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-1-q,\, q-1} + N_{n-1-2q,q-1} + \cdots + N_{n-1-(\alpha-1)q,\, q-1}. \text{ (*)} \tag{5}$$

II. Le nombre des termes du second membre, dans l'équation (5), est α. Si $q = 2$, chacun de ces termes se réduit à 1 ; donc $N_{n,2} = \alpha$, ou

$$N_{n,2} = \left(\frac{n}{2}\right); \tag{6}$$

relation évidente.

III. Si $q = 3$, l'équation (5) devient

$$N_{n,3} = N_{n-1,2} + N_{n-4,2} + N_{n-7,2} + \cdot\cdot\cdot + N_{n+2-3\alpha,2}; \tag{7}$$

ou, d'après la formule (6),

$$N_{n,3} = \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-4}{2}\right) + \left(\frac{n-7}{2}\right) + \cdot\cdot\cdot + \left(\frac{n+2-3\alpha}{2}\right). \tag{8}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} N_{19,3} &= \left(\frac{18}{2}\right) + \left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{12}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{6}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 \\ &= 30; \end{aligned}$$

à cause de $\alpha = \left(\frac{19}{3}\right) = 6$.

(*) Cette relation générale résulte, immédiatement, de celle qui constitue le Théorème II (p. 62).

En, effet, les décompositions du nombre 19 sont :

1+1+17,	2+2+15,	3+3+13,	4+4+11,	5+5+9,	6+6+7.
1+2+16,	2+3+14,	3+4+12,	4+5+10,	5+6+8,	
1+3+15,	2+4+13,	3+5+11,	4+6+ 9,	5+7+7,	
1+4+14,	3+5+12,	3+6+10,	4+7+ 8,		
1+5+13,	3+6+11,	3+7+ 9,			
1+6+12,	3+7+10,	3+8+ 8,			
1+7+11,	3+8+ 9,				
1+8+10,					
1+9+ 9,					

IV. Pour obtenir le second membre de l'équation (8), on doit considérer les diverses formes du nombre n, relatives au diviseur 6. On trouve ainsi, sans difficulté :

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Pour } n = 6n', & N_{n,3} = N = 3n'^2; \\
n = 6n' + 1, & N = n'(3n' + 1); \\
n = 6n' + 2, & N = n'(3n' + 2); \\
n = 6n' + 3, & N = (n' + 1)^3 - n'^3; \\
n = 6n' + 4, & N = (n' + 1)(3n' + 1); \\
n = 6n' + 5, & N = (n' + 1)(3n' + 2).
\end{array}\right\} \quad (9)$$

V. *Remarque.* — Au lieu de ce système de formules, on peut prendre celui-ci :

$$\left.\begin{array}{ll}
n = 6n', & N = \dfrac{n^2}{12}; \\[2ex]
n = 6n' + 1, & N = \dfrac{n^2 - 1}{12}; \\[2ex]
n = 6n' + 2, & N = \dfrac{n^2 - 4}{12}; \\[2ex]
n = 6n' + 3, & N = \dfrac{n^2 + 3}{12}; \\[2ex]
n = 6n' + 4, & N = \dfrac{n^2 - 4}{12}; \\[2ex]
n = 6n' + 5, & N = \dfrac{n^2 - 1}{12}.
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Il en résulte ce théorème curieux, proposé par M. Vachette (*) :

Parmi les quatre nombres n^2, $n^2 - 1$, $n^2 - 4$, $n^2 + 3$, *il en est un divisible par* 12 : *le quotient égale le nombre des manières différentes de partager* n *en trois parties entières, positives, égales ou inégales.*

VI. Quand q surpasse 3, il paraît difficile d'exprimer le nombre des solutions de l'équation (1), au moyen d'une formule qui ne soit pas illusoire, et l'on est réduit à faire usage, une ou plusieurs fois, de la relation (5). Soit, par exemple, $n = 39$, $q = 4$; d'où $\alpha = 9$. Cette relation devient

$$N_{39,4} = N_{38,3} + N_{34,3} + N_{30,3} + N_{26,3} + N_{22,3} + N_{18,3} + N_{14,3} + N_{10,3} + N_{6,3}.$$

Mais, par les formules (10) :

$$N_{38,3} = \frac{38^2 - 4}{12} = 120,$$

$$N_{34,3} = \frac{34^2 - 4}{12} = 96,$$

$$N_{30,3} = \frac{30^2}{12} = 75,$$

$$N_{26,3} = \frac{26^2 - 4}{12} = 56,$$

$$N_{22,3} = \frac{22^2 - 4}{12} = 40,$$

$$N_{18,3} = \frac{18^2}{12} = 27,$$

$$N_{14,3} = \frac{14^2 - 4}{12} = 16,$$

$$N_{10,3} = \frac{10^2 - 4}{12} = 8,$$

$$N_{6,3} = \frac{6^2}{12} = 3;$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, octobre 1867.

donc

$$N_{39,4} = 120 + 96 + 75 + 56 + 40 + 27 + 16 + 8 + 3 = 441,$$

résultat conforme à celui que donne Euler (*).

VII. Si, comme l'a fait ce grand Géomètre, on veut construire une *table* des valeurs de la fonction $N_{n,q}$, on peut, au lieu de la relation (5), appliquer avec avantage le Théorème II de la Note XXII, lequel équivaut à l'équation

$$N_{n,q} = N_{n-1,q-1} + N_{n-q,q}, \tag{11}$$

ou à celle-ci :

$$N_{n+q,q} = N_{n+q-1,q-1} + N_{n,q}. \tag{12}$$

Au moyen de cette relation, et des valeurs initiales :

$$N_{n,1} = 1, \quad N_{n+1,1} = 1, \quad N_{n,n} = 1,$$

on forme aisément la table suivante, qui contient les valeurs de $N_{n+q,q}$.

(*) *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, tome I, p. 252.

Valeurs de q.	Valeurs de n.															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
3	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
4	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
5	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101
6	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136
7	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164
8	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186
9	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201
10	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212
11	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219
12	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224
13	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227
14	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229

D'après la formule (12) :

Un terme quelconque de la troisième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de trois rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;

Un terme quelconque de la quatrième ligne horizontale est égal à celui qui le précède de quatre rangs, augmenté de celui qui est écrit au-dessus ;

Etc.

VIII. De la relation (11), on peut déduire très-facilement la *fonction génératrice* de $N_{n,q}$. En effet, soient

$$F(x,q) = x^q + N_{q+1,q}\, x^{q+1} + \ldots + N_{n,q}\, x^n + \ldots,$$

$$F(x,q-1) = x^{q-1} + N_{q,q-1}\, x^q + \ldots + N_{n-1,q-1}\, x^{n-1} + \ldots$$

Multipliant la première égalité par $1 - x^q$, la seconde par x, on trouve deux développements qui doivent être identiques ; donc

$$F(x,q) = \frac{x}{1-x^q} F(x,q-1).$$

Et comme

$$F(x,1) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x};$$

la fonction génératrice cherchée est

$$F(x,q) = \frac{x^q}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^q)} \ (^*). \qquad (13)$$

IX. Le second membre de la dernière équation est égal au produit des séries

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots,$$
$$x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + \ldots$$
$$x + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + \ldots$$
$$x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x + x^{q+1} + x^{2q+1} + x^{3q+1} + x^{4q+1} + \ldots.$$

(*) Ce théorème est dû à Euler, aussi bien que tous ceux que nous avons donnés dans la Note XXII.

L'exposant de x^n, dans ce produit, étant la somme des exposants de x dans les facteurs de chacun des produits partiels, on a ce théorème remarquable (*) :

Il y autant de manières de décomposer un nombre n *en* q *parties entières, égales ou inégales, qu'il y en a de décomposer ce même nombre en* q *parties appartenant, respectivement, aux progressions*

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots \\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ldots \\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ldots \\ 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$1,(q+1),\ (2q+1),\ (3q+1),\ (4q+1),\ldots$$

Par exemple, nous avons trouvé que le nombre 19 admet 30 décompositions en 3 parties. Or ce nombre 19 admet aussi les décompositions suivantes :

1+ 1+17,	4+ 1+14,	7+ 1+11,	10+1+8,	13+1+5,	16+1+2 ;
1+ 3+15,	4+ 3+12,	7+ 3+ 9,	10+3+6,	13+3+3,	
1+ 5+13,	4+ 5+10,	7+ 5+ 7,	10+5+4,	13+5+1,	
1+ 7+11,	4+ 7+ 8,	7+ 7+ 5,	10+7+2,		
1+ 9+ 9,	4+ 9+ 6,	7+ 9+ 3,			
1+11+ 7,	4+11+ 4,	7+11+ 1,			
1+13+ 5,	4+13+ 2,				
1+15+ 3,					
1+17+ 1,					

et celles-ci sont également au nombre de 30.

(*) Il a été donné, sous une autre forme, par Euler (*Introduction à l'Analyse*, t. I, p. 244.)

LXVII. — SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER (MARS 1867) (*).

I. Dans une *Note sur le calcul des Nombres de Bernoulli* (**), j'ai démontré :

1° Que si l'on suppose

$$B_{2q-1} = \pm \frac{P_{2q-1}}{2(4^q-1)}, \tag{1}$$

on a

$$P_{2q-1} - \frac{2q(2q-1)}{2.3} P_{2q-3} + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{2.3.4.5} P_{2q-5} - \dots$$

$$\pm \frac{2q}{2} P_1 = \pm 1 \text{ (***)}; \tag{2}$$

2° Que *les nombres* P_1, P_3, P_5, . . . , *dont dépendent les Nombres de Bernoulli* B_1, B_3, *sont entiers impairs* (****).

D'ailleurs (*****)

$$tgx = 4(4-1)\frac{B_1}{1.2}x - 4^2(4^2-1)\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3 + \dots$$

$$\pm 4^q(4^q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2.3....2q}x^{2q-1} \mp \dots; \tag{3}$$

(*) Ce travail, qui vient de paraître dans les *Mémoires de l'Académie de Belgique*, complète mes précédentes recherches sur les *Nombres de Bernoulli* (p. 110 et suiv.).

(**) (p. 127).

(***) On doit prendre les signes supérieurs lorsque q est *impair*.

(****) Postérieurement à la publication de cette Note XXXVI, j'ai appris qu'Euler s'est occupé des nombres P.

(*****) (p. 127).

donc

$$tg\frac{1}{2}x = \frac{P_1}{1.2}x + \frac{P_3}{1.2.3.4}x^3 + \ldots + \frac{P_{2q-1}}{1.2.3\ldots 2q}x^{2q-1} + \ldots,$$

ou

$$tg\,\frac{1}{2}\,x = \sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}\,x^{2q-1}. \tag{4}$$

II. A cause de $P_1 = 1$, on trouve, en prenant les dérivées des deux membres :

$$tg^2\frac{1}{2}x = 2\sum_2^\infty \frac{(2q-1)\,P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}\,x^{2q-2}. \tag{5}$$

Par conséquent,

$$2\sum_2^\infty \frac{(2q-1)P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}\,x^{2q-2} = \left\{\sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}\,x^{2q-1}\right\}^2,$$

ou

$$2\sum_1^\infty \frac{(2q+1)\,P_{2q+1}}{\Gamma(2q+3)}\,x^{2q-2} = \left\{\sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)}\,x^{2q-2}\right\}^2. \tag{6}$$

Dans le second membre, le coefficient de x^{2q-2} est

$$\frac{P_1\,P_{2q-1}}{\Gamma(3)\,\Gamma(2q+1)} + \frac{P_3\,P_{2q-3}}{\Gamma(5)\,\Gamma(2q-1)} + \ldots\ldots + \frac{P_{2q-1}\,P_1}{\Gamma(2q+1)\,\Gamma(3)};$$

donc

$$P_{2q+1} = \frac{1}{2(2q+1)}\left[\frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(3)\,\Gamma(2q+1)}P_1\,P_{2q-1} + \frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(5)\,\Gamma(2q-1)}P_3\,P_{2q-3} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(2q+3)}{\Gamma(2q+1)\,\Gamma(3)}P_{2q-1}P_1\right];$$

ou, plus simplement,

$$\left.\begin{aligned}P_{2q+1} = \frac{q+1}{2}\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3\,.\,4}P_3P_{2q-3}\\ + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}P_5P_{2q-5} + \ldots + \frac{2q(2q-1)}{3\,.\,4}P_{2q-3}P_3 + P_{2q-1}\Big].\end{aligned}\right\}(7)$$

III. Le nombre des termes contenus dans la parenthèse est égal à q. Si q est *pair*, on peut écrire, au lieu de la formule (7) :

$$P_{2q+1} = (q+1)\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3\,.\,4}P_3P_{2q-3} + \ldots$$

$$+ \frac{2q(2q-1)\ldots(q+3)}{3\,.\,4\,.\ldots.\,q}P_{q-1}P_{q+1}\Big]. \qquad (8).$$

Si q est *impair*, il y a un *terme du milieu*, ayant pour expression

$$\frac{2q(2q-1)\ldots(q+2)}{3\,.\,4\quad\ldots(q+1)}P_qP_q;$$

donc, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned}P_{2q+1} = (q+1)\Big[P_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{3\,.\,4}P_3P_{2q-3} + \cdot\ \cdot\\ + \frac{2q(2q-1)\ldots(q+4)}{3\,.\,4\quad\ldots(q-1)}P_{q-2}P_{q+2}\\ + \frac{1}{2}\frac{2q(2q-1)\ldots(q+2)}{3\,.\,4\quad\ldots(q+1)}(P_q)^2\Big].\end{aligned}\right\}(9)$$

Le calcul des nombres P, par les formules (7), (8), (9), est plus simple que par la relation (2) (*).

(*) On trouve :

$P_1 = 1,\ P_3 = 1,\ P_5 = 3,\ P_7 = 17,\ P_9 = 155,\ P_{11} = 2\,073,\ P_{13} = 38\,227,\ldots$

En général, *si* $q = 2^n q'$, q' *étant impair*, P_{2q-1} *est divisible par* q'.

IV. D'après la *définition* (1), jointe à une formule de Plana,

$$P_{2q-1} = 8q(4^q - 1) \int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1}. \tag{10}$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (5) devient

$$tg^2 \frac{1}{2} x = 16 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \sum_2^\infty \frac{q(2q-1)(4^q-1)\,t^{2q-1}\,x^{2q-2}}{\Gamma(2q+1)};$$

ou

$$tg^2 \frac{1}{2} x = 8 \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}\,x^{2q}}{\Gamma(2q+1)}. \tag{11}$$

On a, identiquement,

$$\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}\,x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = 4t \sum_1^\infty \frac{(2tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} - t \sum_1^\infty \frac{(tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)};$$

donc, à cause de

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum_0^\infty \frac{x^{2q}}{\Gamma(2q+1)}:$$

$$\sum_1^\infty \frac{(2tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}\left(e^{2tx} + e^{-2tx}\right) - 1,$$

$$\sum_1^\infty \frac{(tx)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}\left(e^{tx} + e^{-tx}\right) - 1;$$

et, par conséquent,

$$\sum_1^\infty \frac{(4^{q+1}-1)\,t^{2q+1}\,x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = 2t\left(e^{2tx} + e^{-2tx} - 2\right) - \frac{1}{2}\left(e^{tx} + e^{-tx} - 2\right),$$

ou

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(4^{q+1}-1)\, t^{2q+1}\, x^{2q}}{\Gamma(2q+1)} = \frac{1}{2}\, t \left(e^{\frac{tx}{2}} - e^{-\frac{tx}{2}}\right)^2 (4e^{tx} + 7 + 4e^{-tx}). \qquad (12)$$

La substitution dans l'équation (11) donne

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\left(e^{\frac{tx}{2}} - e^{-\frac{tx}{2}}\right)^2 (4e^{tx} + 7 + 4e^{-tx}) = \frac{1}{4}\, tg^2 \frac{1}{2}\, x;$$

ou, par le changement de x en $2x$:

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}(e^{tx} - e^{-tx})^2 (4e^{2tx} + 7 + 4e^{-2tx}) = \frac{1}{4}\, tg^2 x. \qquad (A)$$

Cette intégrale définie, que je ne trouve pas dans les *Tables* dues à M. Bierens de Haan, peut en donner beaucoup d'autres, dont quelques-unes sont connues.

V. Soit, par exemple $x = \frac{\pi}{8}$: la formule (A) devient

$$\int_0^{\infty} \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}\left(e^{\frac{\pi t}{8}} - e^{-\frac{\pi t}{8}}\right)^2 \left(4e^{\frac{\pi t}{4}} + 7 + 4e^{-\frac{\pi t}{4}}\right) = \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2});$$

et, si l'on pose

$$e^{\frac{\pi t}{4}} = \frac{1}{z} :$$

$$\int_0^{1} \frac{z^3(1-z)(4+7z+4z^2)}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}\, lz dz = -\frac{\pi^2}{64}(3 - 2\sqrt{2}). \qquad (13)$$

La fraction

$$\frac{z^5(1-z)(4+7z+4z^2)}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$$

est décomposable en

$$1-4z-\frac{1}{2(1+z)}+\frac{7z}{2(1+z^2)}-\frac{1-z^2}{2(1+z^4)}+\frac{3z^3}{1+z^4}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 lzdz-4\int_0^1 zlzdz-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{lzdz}{1+z}$$

$$+\frac{7}{2}\int_0^1\frac{zlzdz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z^2)\,lzdz}{1+z^4}+3\int_0^1\frac{z^3lzdz}{1+z^4}=-\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2});$$

ou, à cause des valeurs connues :

$$\int_0^1 lzdz=-1,\int_0^1 zlzdz=-\frac{1}{4},\int_0^1\frac{lzdz}{1+z}=-\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1\frac{zlzdz}{1+z}=-\frac{\pi^2}{48},\int_0^1\frac{(1-z^2)\,lzdz}{1+z^4}==\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16},\int_0^1\frac{z^3lzdz}{1+z^4}=-\frac{\pi^2}{192}:$$

$$-1+1+\frac{\pi^2}{24}-\frac{7\pi^2}{96}+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}-\frac{\pi^2}{64}=-\frac{\pi^2}{64}(3-2\sqrt{2});$$

ce qui est identique. On a ainsi une vérification de (A).

VI. En passant, nous signalerons une sommation de série, probablement connue.

Il est visible que

$$-\int_0^1 \frac{lzdz}{1+z^4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(4n+1)^2}, \quad -\int_0^1 \frac{z^2 lzdz}{1+z^4} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(4n+3)^2}.$$

D'ailleurs,

$$\int_0^1 \frac{(1-z^2)\,lzdz}{1+z^4} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \text{ (*)};$$

donc

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{2n+1}{[(4n+1)(4n+3)]^2} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{128}. \qquad (14)$$

VII. Dans la relation (A), supposons

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad e^{\frac{\pi t}{3}} = \frac{1}{\sqrt{z}}:$$

elle devient

$$\int_0^1 \frac{(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2}\, lzdz = -\frac{\pi^2}{3}. \qquad (15)$$

La fraction

$$\frac{(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2} = 1 - 4z + 3\,\frac{2z+1}{1+z+z^2}.$$

(*) Cette intégrale remarquable a été déterminée par Euler (Bierens de Haan, t. 152). On voit qu'elle résulte de la formule (A).

Par suite, la formule (15) se réduit à

$$\int_o^1 \frac{2z+1}{1+z+z^2}\, lzdz = -\frac{\pi^2}{9};$$

ce qui est exact (*).

VIII. Plus généralement, soit $x = \frac{\pi}{n}$, n étant un nombre entier. Si l'on fait

$$e^{tx} = e^{\frac{\pi t}{n}} = \frac{1}{\sqrt{z}},$$

on transforme la relation (A) en celle-ci :

$$\int_o^1 \frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2+..+z^{n-1}}\, lzdz = -\frac{\pi^2}{n^2}\, tg^2 \frac{\pi}{n}. \qquad \text{(B)}$$

La fraction

$$\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2+..+z^{n-1}} = 1-4z+\frac{6z^{n-2}+7z^{n-3}+3z^{n-4}+3z^{n-5}+..+3z-1}{1+z+z^2+..+z^{n-1}};$$

de plus

$$\int_o^1 (1-4z)\, lzdz = 0;$$

donc

$$\int_o^1 \frac{6z^{n-2}+7z^{n-3}+3z^{n-4}+3z^{n-5}+..+3z-1}{1+z+z^2+..+z^{n-1}}\, lzdz = -\frac{\pi^2}{n^2}\, tg^2 \frac{\pi}{n}. \qquad \text{(C)}$$

(*) Bierens, t. 153.

Cette formule, qui en donne une infinité d'autres, n'est encore qu'un cas particulier : en remplaçant, dans (A), e^{tx} par $\frac{1}{\sqrt{z}}$, on trouve la relation générale

$$\int_0^1 \frac{z^{\frac{\pi}{x}-3}(1-z)^2(4+7z+4z^2)}{1-z^{\frac{\pi}{x}}}\, lz\,dz = -\,x^2\, tg^2 x. \tag{D}$$

Celle-ci subsiste pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en trouverait d'autres, aussi générales, en différenciant ou en intégrant par rapport à x. Enfin, l'égalité

$$\frac{z^{n-3}(1-z)(4+7z+4z^2)}{1+z+z^2+..+z^{n-1}} = z^{n-3}(1-z)^2(4+7z+4z^2)\sum_{i=0}^{i=\infty} z^{in}$$

conduit à un développement de $\left(\frac{\pi}{n}\, tg\,\frac{\pi}{n}\right)^2$, assez remarquable. Je laisse de côté ces détails, afin de passer à un autre sujet.

IX. Si l'on suppose

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n}, \tag{16}$$

on trouve

$$E_0 = 1,\ E_2 = 1,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ E_8 = 1\,385, \ldots$$

puis (*)

$$E_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} E_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} E_{2n-4} - ..$$

$$\pm \frac{2n(2n-1)}{1.2} E_2 \mp E_0 = 0. \tag{17}$$

(*) (P. 122).

Les nombres *entiers* E sont appelés, par M. Sylvester, *Nombres d'Euler* (*). De la relation (17), on conclut qu'ils sont *impairs* (**). On peut représenter E_{2n} par une intégrale définie.

A cet effet, j'observe que la formule connue

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2\int_0^\infty \frac{(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} - 1)}{e^{2\pi\alpha} - 1}\, d\alpha$$

devient, par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{2x}{\pi}}$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}\left[e^{\alpha(\pi - 2x)} - e^{-\alpha(\pi - 2x)} - e^{\alpha\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\right]. \quad (18)$$

Si l'on suppose le second membre ordonné suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de x^{2n} est

$$C_{2n} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}$$

$$+ \frac{2}{\Gamma(2n+1)} \int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}\left[2^{2n}(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) - \left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}} - e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\right].$$

(*) *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 161.

(**) La démonstration est plus simple que pour les nombres P, (p. 129). On vérifie aisément que les Nombres d'Euler ont la forme $4k + 1$. Cette propriété a été signalée par M. Sylvester.

L'intégrale se décompose en

$$2^{2n}\int_o^{\infty} e^{-\pi\alpha}\alpha^{2n}\,d\alpha - \int_o^{\infty}\frac{e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\alpha^{2n}\,d\alpha}{e^{\pi\alpha}+1}$$

$$=\frac{2^{2n}}{\pi^{2n+1}}\,\Gamma(2n+1)-\frac{2^{2n+1}}{\pi^{2n+1}}\int_o^{\infty}\frac{e^{-u}u^{2n}\,du}{e^{2u}+1};$$

donc

$$C_{2n}=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}-\frac{2}{\Gamma(2n+1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_o^{\infty}\frac{e^{-u}u^{2n}\,du}{e^{2u}+1}.$$

Et comme

$$C_{2n}=\frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)},$$

on a

$$E_{2n}=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\Gamma(2n+1)-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_o^{\infty}\frac{e^{-u}u^{2n}\,du}{e^{2u}+1}. \qquad (19)$$

Pour simplifier cette expression, je remplace $\Gamma(2n+1)$ par $\int_o^{\infty} e^{-u}u^{2n}\,du$: j'obtiens

$$E_{2n}=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\int_o^{\infty}\frac{u^{2n}\,du}{e^{u}+e^{-u}}; \qquad (20)$$

ou, en posant $u=\pi t$:

$$E_{2n}=4^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{t^{2n}\,dt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}, \qquad (E)$$

formule analogue à celle de Plana :

$$B_{2n-1} = \pm 4n \int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

X. Dans le second membre de l'équation (18), le coefficient de x^{2n-1} est

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} + 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\left[-\frac{(e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi})(2\alpha)^{2n-1}}{\Gamma(2n)} + \frac{\left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}}+e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\alpha^{2n-1}}{\Gamma(2n)}\right].$$

Il doit être nul, car $\frac{1}{\cos x}$ est une *fonction paire;* donc

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n-1}\,d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}\left[2^{2n-1}\left(e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}\right)-\left(e^{\alpha\frac{\pi}{2}}+e^{-\alpha\frac{\pi}{2}}\right)\right] = \frac{2^{2n-1}\Gamma(2n)}{\pi^{2n}}.$$

On reconnaît facilement que cette relation est une identité.

XI. On peut déterminer les Nombres de Bernoulli au moyen des Nombres d'Euler; et réciproquement.

1° Écrivons ainsi la formule (4) :

$$\operatorname{tg} x = \sum_0^\infty \frac{P_{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}(2x)^{2n+1}, \tag{21}$$

puis prenons les dérivées des deux membres ; nous aurons

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sum_0^\infty \frac{(2n+1)\,P_{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}\,2^{2n+1}x^{2n}.$$

Ainsi, le coefficient de x^{2n}, dans le développement de $\frac{1}{\cos^2 x}$ est

$$\frac{(2n+1)\,P_{2n-1}}{\Gamma(2n+3)}\,2^{2n+1}.$$

D'après l'équation (16), ce coefficient a pour valeur

$$\frac{E_o E_{2n}}{\Gamma(1)\Gamma(2n+1)}+\frac{E_2 E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)}+\ldots+\frac{E_{2n} E_o}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)};$$

donc

$$P_{2n+1}=\frac{n+1}{4^n}\Gamma(2n+1)\left[\frac{E_o E_{2n}}{\Gamma(1)\Gamma(2n+1)}+\frac{E_2 E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)}+\ldots+\frac{E_{2n} E_o}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)}\right];$$

ou, avec la notation des combinaisons :

$$P_{2n+1}=\frac{n+1}{4^n}\left[E_o E_{2n}+C_{2n,2}E_2 E_{2n-2}+C_{2n,4}E_4 E_{2n-4}+\ldots+E_{2n}E_o\right].(^*)\ (F)$$

2° On tire de l'équation (16), en prenant les dérivées des deux membres :

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)}x^{2n-1}.$$

Le premier membre égale $(1+tg^2x)\,sin\ x$. Par conséquent, si l'on multiplie les deux séries

$$\frac{P_1}{\Gamma(3)}2+\frac{3P_3}{\Gamma(5)}2^3x^2+\frac{5P_5}{\Gamma(7)}2^5x^4+\ldots+\frac{(2n-1)P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}2^{2n-1}x^{2n-2}+\ldots=1+\mathrm{tg}^2x,$$

$$\frac{x}{\Gamma(2)}-\frac{x^3}{\Gamma(4)}+\frac{x^5}{\Gamma(6)}-\ldots\pm\frac{x^{2n-1}}{\Gamma(2n)}\mp\ldots=\sin x,$$

le coefficient de x^{2n-1}, dans le produit, sera $\frac{E_{2n}}{\Gamma(2)}$. De là résulte la formule

(*) D'après la relation (F), *si* n *est pair* : 1° *le nombre entre parenthèses est divisible par* 4^n, et *le quotient est un nombre impair ;* 2° P_{2n+1} *est divisible par* $n+1$

$$E_{2n} = (2n-1)2^{2n-1}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2)\Gamma(2n+1)}P_{2n-1} - (2n-3)2^{2n-3}\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(4)\Gamma(2n-1)}P_{2n-3} + \dots$$

$$\pm 2\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n)\Gamma(3)}P_1,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$E_{2n} = \frac{1}{n(2n+1)}\Big[(2n-1)4^{n-1}C_{2n+1,1}P_{2n-1} - (2n-3)4^{n-2}C_{2n+1,3}P_{2n-3} + \dots$$

$$\pm C_{2n+1,2n-1}P_1\Big]. \qquad \text{(G)}$$

Par exemple,

$$E_8 = \frac{1}{4\,.\,9}[7\,.\,4^3\,.\,9\,.\,17 - 5\,.\,4^2\,.\,84\,.\,3 + 3\,.\,4\,.\,126\,.\,1 - 36\,.\,1];$$

ou, en effectuant,

$$E_8 = 1\,385.$$

XII. Les relations (F), (G) ne sont pas les seules qui existent entre les Nombres d'Euler et les Nombres de Bernoulli : 1° A cause de

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)}x^{2n-1}, \qquad (22)$$

on a, par les formules (16) et (21)

$$\sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)}x^{2n} \times \sum^\infty \frac{P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}(2x)^{2n-1} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)}x^{2n-1};$$

donc

$$\frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} = \frac{P_{2n-1}E_0}{\Gamma(2n+1)\Gamma(1)}2^{2n-1} + \frac{P_{2n-3}E_2}{\Gamma(2n-1)\Gamma(3)}2^{2n-3} + \dots + \frac{P_1E_{2n-2}}{\Gamma(3)\Gamma(2n-1)}2,$$

ou

$$E_{2n} = \frac{1}{n}\Big[4^{n-1} P_{2n-1} E_o + 4^{n-2} C_{2n,2} P_{2n-3} E_2 + 4^{n-3} C_{2n,4} P_{2n-5} E_4 + \cdots$$

$$+ C_{2n,2} P_1 E_{2n-2}\Big]. \qquad \text{(H)}$$

2° L'équation (22) donne aussi

$$\sum_1^\infty \frac{P_{2n-1}}{\Gamma(2n+1)}(2x)^{2n-1} = \sum_1^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n)} x^{2n-1} \times \sum_0^\infty \frac{(-x)^{2n}}{\Gamma(2n+1)};$$

et, par conséquent,

$$P_{2n-1} = \frac{n}{4^{n-1}}\left[E_{2n} - C_{2n-1,2} E_{2n-2} + C_{2n-1,4} E_{2n-4} - \ldots \pm C_{2n-1,1} E_2\right] \ldots \text{(K)}$$

XIII. Dans les relations (G), (K), qui sont, pour ainsi dire, *conjuguées* l'une de l'autre, substituons, aux nombres P, E, les intégrales dont ils représentent les valeurs. En commençant par l'équation (K), nous trouvons

$$\frac{4^{n-2}}{n} P_{2n-1} = 2\int_o^\infty \frac{tdt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\left[(2t)^{2n-1} - C_{2n-1,2}(2t)^{2n-3} + \ldots \pm C_{2n-1,1} 2t\right].$$

La quantité entre parenthèses égale

$$\frac{1}{2}\left[\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} + \left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}\right].$$

Conséquemment,

$$\frac{4^{n-2}}{n} P_{2n-1} = \int_o^\infty \frac{tdt}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\left[\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} + \left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}\right]. (23)$$

Soit $2t = \cot\omega$; d'où

$$tdt = -\frac{1}{4}\frac{\cos\omega}{\sin^3\omega}d\omega,\ \left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1}+\left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1} = 2\frac{\cos(2n-1)\omega}{\sin^{2n-1}\omega}:$$

l'équation (23) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\cos(2n-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}}\frac{d\omega}{\sin^{2n+2}\omega} = \frac{2^{2n-3}}{n}P_{2n-1}\ldots\quad \text{(L)}\,(^*).$$

XIV. La formule (G), traitée de la même manière, devient d'abord

$$n(2n+1)E_{2n} = \int_0^{\infty}\frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}T,$$

T représentant le polynôme

$$2n(2n-1)4^n(4^n-1)C_{2n+1,1}t^{2n-2}-(2n-2)(2n-3)4^{n-1}(4^{n-1}-1)C_{2n+1,3}t^{2n-4}$$

$$+(2n-4)(2n-5)4^{n-2}(4^{n-2}-1)C_{2n+1,5}t^{2n-6}-\ldots\pm 2.1.4(4-1)C_{2n+1,2n-1}.$$

Pour simplifier cette quantité, je suppose

$$\varphi(t)=C_{2n+1,1}(4t)^{2n}-C_{2n+1,3}(4t)^{2n-2}+C_{2n+1,5}(4t)^{2n-4}-\ldots\pm C_{2n+1,2n-1}(4t)^2,$$

$$\psi(t)=C_{2n+1,1}(2t)^{2n}-C_{2n+1,3}(2t)^{2n-2}+C_{2n+1,5}(2t)^{2n-4}-\ldots\pm C_{2n+1,2n-1}(2t)^2:$$

il est visible que

$$T = \varphi''(t)-\psi''(t).$$

(*) D'après la note de la page 325, n *étant impair, cette intégrale définie est égale à un nombre entier pair*, excepté quand $n = 1$.

Mais

$$\varphi(t) = \frac{\left(4t + \sqrt{-1}\right)^{2n+1} - \left(4t - \sqrt{-1}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\psi(t) = \frac{\left(2t + \sqrt{-1}\right)^{2n+1} - \left(2t - \sqrt{-1}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\varphi''(t) = 4n(2n+1)\frac{\left(4t + \sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(4t - \sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\psi''(t) = 2n(2n+1)\frac{\left(2t + \sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(2t - \sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}};$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{E}_{2n} = 2\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1}$$

$$\left[2\frac{\left(4t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(4t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}} - \frac{\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}}\right];$$

ou

$$\mathrm{E}_{2n} = 4\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1}\,\frac{\left(4t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(4t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}}$$

$$-2\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1}\,\frac{\left(2t+\sqrt{-1}\right)^{2n-1} - \left(2t-\sqrt{-1}\right)^{2n-1}}{\sqrt{-1}}. \qquad (24)$$

Si, dans la première intégrale, on fait $t = \frac{1}{4} \cot \omega$; et, dans la seconde, $t = \frac{1}{2} \cot \omega$, on change cette équation en

$$E_{2n} = \frac{1}{2} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\omega \cos \omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} - 1\right)\sin^{2n+2}\omega} - \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\omega\cos\omega d\omega}{(e^{\pi\cot\omega} - 1)\sin^{2n+2}\omega}.$$

Le second membre est réductible à

$$\frac{1}{2} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\omega\cos\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + 1\right)\sin^{2n+2}\omega};$$

donc enfin

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)\omega\cos\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega} + 1\right)\sin^{2n+2}\omega} = 2E_{2n}. \; (*) \qquad \text{(M)}$$

XV. Dans la Note citée au commencement de ce Mémoire, j'ai démontré la formule remarquable

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\omega d\omega}{(e^{\pi\cot\omega} - e^{-\pi\cot\omega})\sin^{2n+2}\omega} = \pm\frac{1}{4} \; (**), \qquad \text{(N)}$$

que l'on peut regarder comme une conséquence des relations (2) et (10). De même, la combinaison des équations (17) et (E) donne d'abord

$$\int_o^{\infty} \frac{dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left[(2t)^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2}(2t)^{2n-2} + .. \pm \frac{2n(2n-1)}{1.2}(2t) \mp 1\right] = 0;$$

(*) Cette formule est en défaut dans le cas de $n = o$. Cela devait nécessairement arriver, attendu qu'elle n'est qu'une transformation de (G).

(**) On doit prendre le signe + si n est *impair*.

puis, par la transformation employée plusieurs fois,

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\omega d\omega}{\left(e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}\right)\sin^{2n+2}\omega} = 0 \qquad \text{(P)}.$$

XVI. Cette intégrale étant nulle (excepté lorsque $n = 0$), il s'ensuit que la formule (L) peut être remplacée par celle-ci :

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\omega\sin(2n-1)\omega}{e^{\frac{\pi}{2}\cot\omega}+e^{-\frac{\pi}{2}\cot\omega}} \frac{d\omega}{\sin^{2n+2}\omega} = \frac{2^{2n-3}}{n} P_{2n-1} \qquad \text{(Q)};$$

d'où l'on conclut aisément

$$\frac{4^{n-1}}{n} P_{2n-1} = C_{2n-1,1} E_{2n-2} - C_{2n-1,3} E_{2n-4} + \ldots \pm E_o. \qquad \text{(R)}$$

Cette relation, différente de (K), peut être déduite de celle-ci, jointe à l'équation (17).

Addition. — (*Mai* 1867).

XVII. On peut substituer, aux équations (2) et (17), une relation unique, donnant à la fois les Nombres de Bernoulli et les Nombres d'Euler. Pour la découvrir, reprenons les égalités

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \sum_1^\infty \frac{P_{2q-1}}{\Gamma(2q+1)} x^{2q-1}, \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty \frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)} x^{2n};$$

et posons

$$y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x, \quad P_{2n-1} = \frac{n}{4^{n-1}} G_{2n-1}, \quad E_{2n} = G_{2n};$$

nous aurons

$$y = \sum_0^\infty G_i \frac{x^i}{\Gamma(i+1)}, \tag{25}$$

$$y' = \sum_1^\infty G_i \frac{x^{i-1}}{\Gamma(i)}.$$

Mais

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin x};$$

donc

$$\left(G_1 + G_2\frac{x}{1} + G_3\frac{x^2}{1.2} + G_4\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right) = 1.$$

De là résulte

$$G_1 = 1, \quad G_2 - G_1 = 0, \quad G_3 - 2G_2 = 0, \ldots;$$

et, en général,

$$G_i - C_{i-1,1}.G_{i-1} + C_{i-1,3}.G_{i-3} - C_{i-1,5}G_{i-5} + \ldots = 0. \tag{S}$$

Les valeurs des nombres G sont, d'après cette équation aux différences :

$$G_1 = 1,\ G_2 = 1,\ G_3 = 2,\ G_4 = 5,\ G_5 = 16,\ G_6 = 61,\ G_7 = 272,\ G_8 = 1\ 385,$$
$$G_9 = 7\ 936,\ G_{10} = 50\ 521, \ldots$$

Par conséquent,

$$E_2 = 1,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ E_8 = 1\ 385,\ E_{10} = 50\ 521, \ldots$$

et

$$P_1 = G_1 = 1,\ P_3 = \frac{2}{4}G_3 = 1,\ P_5 = \frac{3}{4^2}.G_5 = 3,\ P_7 = \frac{4}{4^3}G_7 = 17,$$

$$P_9 = \frac{5}{4^4}.G_9 = 155, \ldots;$$

comme précédemment.

XVIII. Dans le dix-huitième Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, Poisson a démontré les formules

$$\operatorname{tg} x = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}\, d\alpha, \quad \frac{1}{\cos x} = 2\int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}\, d\alpha.$$

Il en résulte immédiatement, à cause des égalités (4) et (16) :

$$P_{2q-1} = 8q\int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \ \text{(T)}, \quad E_{2q} = 4^{q+1}\int_0^\infty \frac{\alpha^{2q}\, d\alpha}{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}} \ \text{(U)}.$$

De ces deux relations, la seconde a été trouvée ci-dessus ; et la première, comme on le vérifie aisément, ne diffère pas, au fond, de la formule :

$$P_{2q-1} = 8q\,(4^q - 1)\int_0^\infty \frac{\alpha^{2q-1}\, d\alpha}{e^{2\pi\alpha} - 1}. \tag{10}$$

Du reste, en partant de l'équation (25), et en y remplaçant y par

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = 4\int_0^\infty \frac{e^{(\pi+2x)\alpha} - e^{-(\pi+2x)\alpha}}{e^{2\pi\alpha} - e^{-2\pi\alpha}}\, d\alpha,$$

on trouve

$$G_i = 2^{i+2}\int_0^\infty \frac{e^{\pi\alpha} - (-1)^i e^{-\pi\alpha}}{e^{2\pi\alpha} - e^{-2\pi\alpha}}\, \alpha^i\, d\alpha; \tag{V}$$

et, suivant que i est *impair* ou *pair*, cette formule reproduit (T) ou (U).

XIX. La formule

$$P_{2q-1} = 8q(4^q - 1) \int_0^\infty \frac{t^{2q-1}\,dt}{e^{2\pi t} - 1} \tag{10}$$

nous a donné

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t} - 1} \left(e^{tx} - e^{-tx}\right)^2 \left(4e^{2tx} + 7 + 4e^{-2tx}\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2 x. \tag{A}$$

En adoptant la nouvelle valeur de P_{2q-1}, on trouve, absolument de la même manière que ci-dessus,

$$\int_0^\infty \frac{tdt\left(e^{tx} - e^{-tx}\right)^2}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2 x \tag{A'}$$

LXVIII. — DE QUELQUES PROPOSITIONS INEXACTES, RELATIVES AUX SÉRIES (NOVEMBRE 1867).

I. Dans une Note intitulée : *Addition à la première partie des Recherches sur la nature et la propagation du Son* (*), Lagrange répond ainsi à de très-justes critiques :

« ... 3° M. d'Alembert attaque aussi les calculs que j'ai fait
» dans le Chap. VI pour trouver d'une manière directe et
» générale la somme d'une suite infinie, telle que

« $\sin\varphi \times \sin\theta + \sin 2\varphi \times \sin 2\theta +$ etc. »

Cette série est, sinon *divergente*, du moins *indéterminée*. En effet, la somme des n premiers termes a pour valeur

$$S_n = \frac{\cos\frac{(n+1)(\varphi-\theta)}{2}\sin\frac{n(\varphi-\theta)}{2}}{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} - \frac{\cos\frac{(n+1)(\varphi+\theta)}{2}\sin\frac{n(\varphi+\theta)}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}};$$

(*) *Miscellanea taurinensia*, (1760-61).

et, lorsque *n* croît indéfiniment, cette quantité ne tend vers aucune limite fixe. Néanmoins, à l'endroit cité, Lagrange cherche à prouver que *la somme de la série égale zéro.* On va voir comment l'illustre Géomètre arrive à un pareil résultat.

» La méthode que j'ai emploïée dans cette recherche est » très-simple ; après avoir transformé la suite proposée en » deux autres composées de simples *cosinus*, j'ai mis à la » place de chacun de ces *cosinus* son expression exponentielle » imaginaire, & j'ai cherché la somme de suites résultantes, » par la méthode ordinaire de la sommation des series géo- » métriques, en supposant le dernier terme nul comme on » le fait communement lorsque la serie va à l'infini.

» M. d'Alembert m'objecte que cette supposition n'est point » exacte, parce que dans la suite $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}}$ etc. le der- » nier terme est $e^{\infty\sqrt{-1}}$ quantité qui est infinie au lieu d'être » zéro. »

Non-seulement Lagrange n'admet pas l'objection; mais encore *il ne la comprend pas*; il y a plus : il s'étonne que d'Alembert conteste une *proposition complètement absurde!* Le Géomètre de Turin continue en effet ainsi sa polémique avec le Philosophe de Paris :

« Or je demande si toutes les fois que dans une formule » algébrique, il se trouvera par exemple une serie géomé- » trique infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 +$ etc. on ne sera » pas en droit d'y substituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité » ne soit réellement égale à la somme de la serie proposée » qu'en supposant le dernier terme x^∞ nul. Il me semble qu'on » ne sauroit contester l'exactitude d'une telle substitution sans » renverser les Principes les plus communs de l'Analise. »

Ainsi, ce serait *renverser les principes* que de *contester l'exactitude de la substitution d'une quantité* A *à une quantité* B, lorsque B *diffère de* A! On croit rêver quand on lit de pareilles choses, signées d'un si grand nom! Mais ce n'est pas tout :

« M. d'Alembert apporte encore un argument particulier
» pour prouver que la somme de la suite

» $\cos x + \cos 2x + \cos 3x +$ etc., *à l'infini*

» ne peut pas être $-\frac{1}{2}$ comme je l'ai trouvée par mon
» calcul. Il suppose $x = 45°$, & il trouve que cette suite
» devient $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{2}}, +1$, etc.
» après quoi elle recommence : *or* (dit-il) *la somme de cette*
» *suite finie est, ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ *selon*
» *qu'on y prendra plus ou moins de termes. Donc la somme de*
» *la suite entière est aussi ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou*
» $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, *selon le nombre des termes qu'on y prendra, quel*
» *que soit d'ailleurs ce nombre de termes fini ou infini*, & *cette*
» *somme ne sera point* $= 0$, *à moins que* $m \times 45°$ *ne soit* $=$ *à*
» *une infinité de fois la circonférence*, *ou* $135° +$ *une infinité*
» *de fois la circonférence.* »

Sauf peut-être les mots *somme de la suite entière*, il n'y a rien à objecter au raisonnement de d'Alembert : aujourd'hui, on ne s'y prendrait ni autrement ni mieux que lui pour établir l'*indétermination* de la série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

Au lieu de se rendre à des arguments si clairs, présentés en si bons termes, le futur *comte de l'Empire* le prend de très-haut avec *Jean-le-Rond* :

« Je répons qu'avec un pareil raisonnement on soutien-
» droit aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la
» somme de la suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 +$ etc. parce
» qu'en faisant $x=1$ on a $1-1+1-1+$ etc. ce qui est ou 0,
» ou 1, selon que le nombre des termes qu'on prend est pair,
» ou impair, tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. *Or, je ne*
» *crois pas qu'aucun Géomètre voulût admettre cette conclusion.* »

Depuis longtemps *tous les Géomètres* sont d'accord sur cette proposition :

l'équation

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdot \cdot \cdot$$

est absurde si x *égale ou surpasse l'unité ;*

et tous les étudiants en mathématiques sont en état de la démontrer. D'Alembert avait donc raison ; et il ne reste rien, absolument rien, de la réfutation de Lagrange (*).

II. Un *Mémoire sur la convergence des séries*, dû à l'un des plus éminents Géomètres de ce siècle, commence ainsi (**) :

« Soient

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots \text{ etc...} \tag{1}$$

» les différents termes d'une série réelle ou imaginaire ; et

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \tag{2}$$

» la somme des n premiers termes, n désignant un nombre » entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours crois- » santes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine » limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en ques- » tion sera ce qu'on appelle la *somme* de la série. Au con- » traire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n » ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente » et n'aura plus de somme (***).

(*) Comment le nouvel éditeur des œuvres de ce grand Géomètre a-t-il laissé passer, sans les signaler aux lecteurs, des théories aussi fausses ? M. Bertrand, dans sa belle édition de la *Mécanique analytique*, avait donné un exemple bon à suivre.

(**) *Exercices de Mathématiques*, tome II, p. 221 (1827).

(***) On voit que Cauchy n'admet que deux espèces de séries. Cette classification, acceptée par la plupart des auteurs, ne me semble pas rationnelle. Dire que

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdot \cdot \cdot \cdot$$

est une série divergente, c'est attribuer au mot *divergent* une acception contraire à son sens habituel.

» D'après ces principes, pour que la série (1) soit conver-
» gente, il est nécessaire, et il suffit que les valeurs des
» sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \ldots$$

» correspondantes à de très-grandes valeurs de n, diffèrent
» très-peu les unes des autres, en d'autres termes, il est
» nécessaire, et *il suffit que la différence*

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1} \qquad (3)$$

» *devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre* n *une*
» *valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier*
» *représenté par* m... »

J'ai déjà fait remarquer (*Traité élémentaire des séries*, p. 4.) que la phrase imprimée en italiques énonce (si je l'ai bien comprise) une proposition fausse; car le sens le plus naturel qu'on lui puisse attribuer est celui-ci :

Une série est convergente si la somme d'un nombre quelconque (mais déterminé) de termes consécutifs tend vers zéro, lorsque le rang du premier d'entre eux croît indéfiniment; et il est évident que la série harmonique satisfait à cette condition.

On peut, il est vrai, supposer que par l'expression *quel que soit le nombre entier m*, Cauchy a voulu entendre que m peut être *infini*, ou plutôt *indéfiniment grand.* Mais alors le théorème énoncé (et non démontré) se réduirait à cette proposition aussi insignifiante qu'incontestable : *une série est convergente...... quand elle est convergente!*

En effet, *pour que la quantité* $s_{n+m} - s_n$ *tende vers zéro* quand on y fait croître *indéfiniment* et *successivement*, *d'abord* m, *ensuite* n, *il faut et il suffit* que cette quantité tende vers une limite finie et déterminée quand on y fait d'abord croître indéfiniment m; c'est-à-dire, *il faut et il suffit que la série soit convergente* ; ce qui n'apprend rien.

III. Cette proposition fausse ou insignifiante, que l'on est étonné de rencontrer chez l'illustre Géomètre à qui l'on doit les vrais principes sur la convergence des séries; cette proposition, dis-je, a été reproduite, avec aggravation, dans un grand nombre d'ouvrages didactiques, la plupart très-recommandables. Voici quelques citations :

1° « Réciproquement, lorsque toutes ces conditions (*) sont » remplies, la série est convergente; car les sommes s_n, » s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, etc., pouvant devenir aussi peu différentes » les unes des autres qu'on le veut, ces sommes convergent » nécessairement vers une limite..... » (*Algèbre de Choquet et Mayer*, p. 584, 1849).

Ici, l'erreur est manifeste : la différence $s_{n+1} - s_n$ peut tendre vers zéro, pendant que s_n et s_{n+1} croissent indéfiniment.

2° « Réciproquement si la somme ε (**) tend vers zéro, » quel que soit m, quand n augmente indéfiniment, toutes » les sommes désignées par s_{n+m}, différant très-peu les unes » des autres, quand n est très-grand, *tendent évidemment* » *vers une limite commune*, et la série est convergente. » (Briot, *Leçons d'Algèbre*, seconde partie, p. 31. — 1853.)

Évidemment, les sommes désignées par s_{n+m} peuvent croître au-delà de toute limite, tout en différant très-peu les unes des autres.

3° « Pour qu'une série soit convergente, *la condition nécessaire et suffisante consiste en ce que la somme d'un nombre quel-* » *conque de termes au-delà du* $\mathrm{n}^{\text{ième}}$, u_{n}, *soit aussi petite que l'on* » *voudra, si* n *est suffisamment grand*. Cette condition..... est » suffisante, car si

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdot \cdot \cdot + u_{n+i}$$

(*) Celles dont il vient d'être question.

(**) ε désigne $s_{n+m} - s_n$.

» est compris entre — ε et + ε, S_{n+i} sera comprise entre » $s_n - \varepsilon$ et $s_n + \varepsilon$, limites qui se rapprocheront de plus en » plus à mesure que n augmentera... » (Sturm, *Cours d'Analyse*, tome 1, p. 34 — 1857).

Si S_n croît indéfiniment avec n, il en est de même pour s_{n+i}; donc la proposition et la démonstration sont inexactes (*).

IV. Une théorie des séries, très-rigoureuse et très-complète, se trouve dans le *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, de M. Bertrand. Comment se fait-il que ce Géomètre, dont personne ne conteste l'érudition et la sagacité, ait imprimé la formule suivante, laquelle est *toujours absurde* ?

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2y}{\cos^2 y} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3y}{\cos^3 y} + \cdots \text{(**)}$$

Il est bien vrai que, quelques lignes plus bas, l'auteur ajoute : « Nous retrouverons la plupart d'entre elles (*la plupart de ces séries*) par d'autres procédés qui nous permettront de décider dans quels cas elles sont applicables. » M. Bertrand s'est-il réservé le plaisir d'apprendre plus tard, à ses lecteurs, qu'il a voulu leur tendre un piége mathématique? Ce serait là une étrange espièglerie (***).

(*) Le *Cours* de Sturm a été publié, après la mort de l'auteur, par Prouhet, l'un de ses meilleurs élèves, dont la fin prématurée est bien regrettable. Il est donc possible que la faute signalée ne soit pas le fait du profond Géomètre qui sut toujours, dans ses démonstrations, allier la rigueur à la simplicité.

(**) Tome I, p. 304. — Ce volume, publié en 1864, est le seul qui ait paru.

(***) Le grand *Traité* de M. Bertrand, beaucoup plus complet, beaucoup plus exact que celui de Lacroix, ne remplacera pas cette œuvre remarquable : il y manque (je parle du *Traité* nouveau) l'ordre et le style. Puis, contrairement à son respectable devancier, qui cherchait à rendre justice à tous, M. Bertrand ne cite presque personne, sauf ses amis, bien entendu. Croirait-on que, dans la *Table des matières*, M. Liouville est signalé, uniquement, pour *avoir inventé une dénomination?*

V. Dans un *Cours de Calcul différentiel et intégral* (sic), que fait paraître M. Serret, on lit :

« *Réciproquement, la série*

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_{n-1},\ldots$$

» *est convergente lorsque la somme*

$$u_n + u_{n+1} + \cdot\ \cdot + u_{n+p-1}$$

» *tend vers zéro, quel que soit* p, *quand* n *augmente indéfiniment.*

« En effet, désignons par ε une quantité positive aussi » petite que l'on voudra, et par S_n la somme des n premiers » termes de la série. Comme la différence

$$S_{n+p} - S_n = u_n + u_{n+1} + \cdot\ \cdot + u_{n+p-1}$$

» tend vers zéro, quel que soit p, par hypothèse, quand n » tend vers l'infini, on peut donner à n une valeur *déterminée* » assez grande pour que la différence dont il s'agit soit com- » prise, quel que soit p, entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. On aura donc

$$S_n - \varepsilon < S_{n+p} < S_n + \varepsilon.$$

» Cela posé, le nombre n restant invariable, faisons tendre p » vers l'infini... »

On voit que le théorème de M. Serret est la proposition de Cauchy, accompagnée d'une démonstration très-peu claire : l'auteur en convient. On voit aussi, par les derniers mots cités, que, suivant M. Serret, le nombre p doit être supposé *indéfiniment grand.* Nous avons déjà démontré (§ II) que la proposition de Cauchy, entendue ainsi, équivaut à ce théorème inattaquable : *Une série est convergente quand elle est convergente*; mais, afin d'élucider entièrement une théorie sur laquelle tant de Géomètres se sont trompés, croyons-nous, nous allons, à propos du théorème de M. Serret, reprendre et compléter notre démonstration.

Soit

$$S_{n+p} - S_n = F(n, p).$$

Si, laissant n constant, on fait croître p indéfiniment, il peut arriver deux choses : ou $F(n, p)$ tend vers une limite finie et déterminée $\lambda = F(n, \infty) = \varphi(n)$, ou le contraire a lieu. D'après l'énoncé de M. Serret, la seconde hypothèse doit être rejetée : car *dire qu'une quantité infinie tend vers zéro quand on fait croître une variable* n *qui n'y entre pas, ou qu'une fonction de* n, *périodique, a pour limite zéro*, c'est proférer deux non-sens. Reste donc le cas où $F(n, \infty) = \varphi(n) = \lambda$. Mais alors la somme des $n + p$ premiers termes de la série tend vers $S_n + \varphi(n)$ lorsque, n restant invariable, $n + p$ croît indéfiniment; ainsi, *la série est convergente*, et elle a pour *somme* la quantité *constante*

$$S_n + \varphi(n) = S\ (^*).$$

Ajouter, comme le fait M. Serret, la condition

$$\lim. \varphi(n) = 0,$$

c'est *demander que, dans une série convergente, la différence entre la somme des* n *premiers termes et la limite de cette somme tende vers zéro*; c'est-à-dire, c'est *demander que ce qui est, ait lieu*. Le théorème de M. Serret se réduit donc, comme nous l'avons annoncé, à cette naïveté : *Une série est convergente, quand elle est convergente.*

(*) Je dis que $S_n + \varphi(n) =$ *constante*. En effet,

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1},$$

et

$$= \varphi(n) - u_{n+1}.$$

VI. Le *Traité élémentaire des séries* renferme à la page 110, les relations

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \frac{1}{5}\sin^2 5\varphi - \cdot\cdot\cdot = \frac{\pi}{4}, \qquad (1)$$

$$\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^2 3\varphi + \frac{1}{5}\cos^2 5\varphi - \cdot\cdot = \frac{\pi}{4}, \qquad (2)$$

que j'ai tirées d'un Mémoire de Lobatto (*).

Si on les ajoute membre à membre, on trouve ce résultat inexact

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdot\cdot = \frac{\pi}{2}.$$

Pour découvrir où gît l'erreur, posons

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \frac{1}{5}\sin^2 5\varphi - \cdot\cdot\cdot = A, \qquad (3)$$

$$\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^2 3\varphi + \frac{1}{5}\cos^2 5\varphi - \cdot\cdot\cdot = B; \qquad (4)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{\pi}{4} - \left[\cos 2\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi + \frac{1}{5}\cos 10\varphi - \cdot\cdot\right] = 2A,$$

$$\frac{\pi}{4} + \left[\cos 2\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi + \frac{1}{5}\cos 10\varphi - \cdot\cdot\right] = 2B.$$

Or, lorsque l'arc x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ *(exclusivement)*, on a (**)

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdot\cdot = \frac{\pi}{4};$$

(*) M. Lobatto, Professeur d'Analyse à l'Université de Delft, et auteur d'un grand nombre de travaux intéressants, est mort l'année dernière.

(**) *Traité élémentaire....*, p. 106.

donc, 2φ étant compris entre les mêmes limites, on a aussi

$$A = 0, \quad B = \frac{\pi}{4}.$$

En résumé, les formules (1), (2) doivent être remplacées par celles-ci :

$$\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^2 3\varphi + \frac{1}{5}\sin^2 5\varphi - \cdots = 0, \tag{1'}$$

$$\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\cos^2 3\varphi + \frac{1}{5}\cos^2 5\varphi - \cdots = \frac{\pi}{4}; \tag{2'}$$

auxquelles on doit joindre la double inégalité

$$\frac{\pi}{4} > \varphi > -\frac{\pi}{4}.$$

Si l'on supposait

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{4},$$

on trouverait

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = 0;$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{2};$$

relations fausses et contradictoires.

VII. Nous terminerons par deux remarques importantes, déjà publiées (*) :

1° *Une série dans laquelle la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes consécutifs a pour limite zéro, peut être divergente.*

(*) *Traité élémentaire des Séries*, p. 6 et 29.

Soit par exemple, la série *divergente*

$$\frac{1}{2l2}+\frac{1}{3l3}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{(n+1)\,l\,(n+1)}+\cdot\cdot$$

Prenons n termes à partir du n^{ième} : la somme

$$S_{n} - S_{n} = \frac{1}{(n+2)\,l\,(n+2)} + \cdot\cdot\cdot + \frac{1}{(2n+1)\,l\,(2n+1)}$$

est inférieure à $\frac{1}{ln}$; donc

$$lim\,(S_{2n} - S_{n}) = 0.$$

2° *Une série à termes alternativement positifs et négatifs, dans laquelle le terme général a pour limite zéro, peut être divergente.*

La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdot\cdot$$

satisfait aux deux conditions énoncées. Mais, si on l'écrit ainsi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\ldots$$

on voit que

$$S_{2n} = 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n}\right);$$

donc la série est divergente.

LXIX. — DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE POISSON (FÉVRIER 1867).

Pour établir la relation

$$\alpha^m + \frac{m}{1}\alpha^{m-1}\beta + \cdots + C_{m,p}\,\alpha^{m-p}\beta^p$$

$$= (p+1)\,C_{m,p+1}\,\beta^{p+1}\int_0^\alpha \frac{\theta^{m-p-1}\,d\theta}{(\beta+\theta)^{m+1}}, \tag{1}$$

Poisson commence (*) par démontrer que le premier membre équivaut à

$$\left[1 + \frac{q}{1}\beta + \frac{q(q+1)}{1.2}\beta^2 + \cdots + C_{m-1,p}\,\beta^p\right]\alpha^q.$$

Ce lemme préliminaire, qui pourrait être vérifié directement, est inutile.

En effet, de l'identité

$$d.\frac{t^{m-p}}{(1+t)^m} = (m-p)\frac{t^{m-p-1}}{(1+t)^{m+1}}dt - p\frac{t^{m-p}}{(1+t)^{m+p}}dt, \tag{2}$$

on conclut

$$\frac{k^{m-p}}{(1+k)^m} = (m-p)\int_0^k \frac{t^{m-p-1}\,dt}{(1+t)^{m+1}} - p\int_0^k \frac{t^{m-p}dt}{(1+t)^{m+1}}; \quad (3)\ (^{**})$$

(*) *Recherches sur la probabilité des jugements*, p. 189. Dans les équations (1) et suivantes, $\alpha + \beta = 1$, $p + q = m$.

(**) On a ainsi une relation simple entre deux intégrales définies très-complexes : chacune d'elles serait exprimée par un polynôme ou par une série.

puis, en multipliant les deux membres par

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{m-p+1}{p} = C_{m,p}:$$

$$C_{m,p} \frac{k^{m-p}}{(1+k)^m} =$$

$$(p+1) C_{m,p+1} \int_0^k \frac{t^{m-p-1} dt}{(1+t)^{m+1}} - pC_{m,p} \int_0^k \frac{t^{m-p} dt}{(1+t)^{m+1}}.$$

Maintenant, si l'on change p en $p-1$, $p-2 \ldots 2, 1, 0$, et que l'on ajoute *membre à membre* les $p+1$ équations ainsi formées, on trouve

$$\frac{k^m + \frac{m}{1} k^{m-1} + \ldots + C_{m,p} k^{m-p}}{(1+k)^m} = (p+1) C_{m,p+1} \int_0^k \frac{t^{m-p-1} dt}{(1+t)^{m+1}};$$

et cette équation ne diffère pas, au fond, de l'équation (1).

Extrait d'une lettre de M. Housel.

« . . . . après avoir posé l'équation (3) (*), je dis : « *le nombre* m, *que nous avons supposé être premier*, *sera égal à* α, *ou bien sera premier avec* α. »

Cette alternative est trop absolue : m peut être facteur, à la fois, dans α et dans B'.

Soient donc

$$\alpha = m^{\mu} \mathrm{D}, \quad \mathrm{B}' = m^{\mu'} \mathrm{D}',$$

D et D' étant premiers avec m. Il est facile de voir que D et D' ont les mêmes facteurs; car, d'après l'équation (3), α divise $m\,\mathrm{B}' = m^{\mu'+1}\,\mathrm{D}'$, et B' divise $\alpha^{n-1} = m^{\mu(n-1)}\,\mathrm{D}^{n-1}$.

L'équation (3) devient

$$a'^{n} m^{\mu(n-1)} \mathrm{D}^{n-1} = m^{\mu'+1} \mathrm{D}' + \frac{m(m-1)}{2} m^{\mu+2\mu'} \mathrm{D}\mathrm{D}'^{2} + \cdots;$$

d'où

$$a'^{n} m^{\mu(n-1)-\mu'-1} \mathrm{D}^{n-1} = \mathrm{D}' + \frac{m(m-1)}{2} m^{\mu+\mu'-1} \mathrm{D}\mathrm{D}'^{2} + \cdots \quad (3')$$

Comme m est facteur dans tous les termes du second membre, excepté le premier, m ne doit pas diviser le premier membre; donc

$$\mu(n-1) = \mu' + 1,$$

ou

$$\mu' = \mu(n-1) - 1.$$

D et D' ayant les mêmes facteurs premiers, supposons

$$\mathrm{D} = d^{\delta} d_1^{\delta_1} \cdots, \quad \mathrm{D}' = d^{\delta'} d_1^{\delta'_1} \cdots,$$

et divisons par D' les deux membres de l'égalité (3') : le premier terme du second membre sera l'unité, tous les autres

(*) Voyez p. 43.

termes seront encore divisibles par D′ ; donc le premier membre ne pourra plus être divisible par D′.

De là résulte (attendu que a' est premier avec D′),

$$\delta' = (n-1)\delta, \quad \delta_1' = (n-1)\delta_1, \ldots;$$

et, par conséquent,

$$D' = D^{n-1}.$$

L'égalité (3′) devient

$$a'^n = 1 + \frac{m(m-1)}{2} m^{\mu n - 2} D^n + \cdots$$

De plus,

$$B' = m^{\mu'} D' = m^{\mu(n-1)-1} D^{n-1} = \frac{(m^\mu D)^{n-1}}{m} = \frac{\alpha^{n-1}}{m};$$

donc

$$B = \frac{\alpha^n}{m}.$$

L'équation (1) devient, à cause de $b = 1 + B$,

$$\alpha^n \alpha'^n = \left(1 + \frac{\alpha^n}{m}\right)^m - 1,$$

α étant divisible par m. Mais l'identification avec

$$2^3 = (1+2)^2 - 1$$

donnerait

$$\frac{\alpha^3}{2} = 2,$$

ou

$$\alpha^3 = 4;$$

ce qui est impossible . . . . »

ERRATA.

Pages	17,	ligne 1.	*Au lieu de*	s — n,	*lisez*	n.
—	63	— 10	—	—	$\frac{q(q-1)}{1}$	—	$\frac{q(q-1)}{2}$.
—	89	19			$r_2 - r_1$		$r_1 - r_0$
—	98	14			$P' - Q$		$P' + Q$
—	128	ligne dernière	—	—	$= 1$	—	$= \pm 1$.
—	130	— 8	—	—	2^{2n-1}	—	2^{2n-1}.
—	131	— 2	—	—	P_2	—	P_1
—	150	— 16	—	—	$\int_0^1 \theta(1-\theta)^{l-k-1}\,d\theta$	—	$\int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{l-k-1}\,d\theta$.
—	192	— 4	—	—	$e^{-\left(\pi-\frac{\theta}{2}x\right)}$	—	$e^{-\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)x}$
—	203	— 6	—	—	$\mp A_{2k+1}$	—	$\pm A_{2k+1}$
—	229	avant-dernière	—	—	$\frac{dx}{\alpha}$	—	$\frac{d\alpha}{\alpha}$
—	252	— 18	—	—	$A_0 x_2$	—	$A_0 x^2$

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

I. Sur les combinaisons avec répétition 1
II. Aire de l'hyperboloïde à une nappe 3
III. Sur l'intégrale $\iint dx\,dy \sqrt{\frac{a^2x^2+b^2y^2-1}{x^2+y^2-1}}$ 8
IV. Démonstration d'une formule de Dirichlet 9
V. Réduction d'une intégrale multiple 11
VI. Autre intégrale multiple. 15
VII. Sur la Partition des nombres 16
VIII. Sur la décomposition d'un produit en facteurs. 18
IX. Analyse indéterminée du premier degré. 21
X. Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^n} dx$ 24
XI. Problème de minimum 31
XII. Problème de Géométrie. 34
XIII. Théorème de Géométrie 35
XIV. Problème d'Analyse indéterminée 38
XV. Quelques théorèmes empiriques 40
Démonstration d'un théorème relatif à la Théorie des nombres (par M. Housel) 42
XVI. Lieu géométrique. 49
XVII. Théorèmes sur les surfaces développables. 52
XVIII. Sur le tétradécagone régulier. 54
XIX. Sur la toroïde 55
XX. Sur la toroïde 58
XXI. Sur l'intégration des équations simultanées 60
XXII. Sur la Partition des nombres. 62
XXIII. Sur l'héliçoïde de raccordement. 65
XXIV. Sur l'héliçoïde à plan directeur 67
XXV. Sur un cas particulier de l'hyperboloïde à une nappe 68
XXVI. Problème d'Algèbre. 70
XXVII. Sur le Problème des partis 72
XXVIII. Fractions continues périodiques. 75
XXIX. Recherche des valeurs des fractions continues périodiques . . 79
XXX. Analyse indéterminée 99
XXXI. Rectification de la méthode de Newton 104
XXXII. Autre modification à la méthode de Newton 108
XXXIII. Sur la somme des puissances semblables des nombres naturels. 110

Pages.

XXXIV. Sur les différences de 1^p, et sur le calcul des Nombres de Bernoulli 115
XXXV. Sur les Nombres de Bernoulli, et sur quelques formules qui en dépendent 121
XXXVI. Sur le calcul des Nombres de Bernoulli. 127
XXXVI(*). Sur la Théorie des nombres 133
XXXVII. Sur une application de la formule du binôme aux intégrales eulériennes 150
XXXVIII. Théorème d'Analyse. 162
XXXIX. Sur la série harmonique 164
XL. Sur une fonction homogène entière 168
XLI. Sur les surfaces cyclotomiques 170
XLII. Sur la théorie des roulettes 181
XLIII. Lieu géométrique. 184
XLIV. Sur un produit convergent. 186
XLV. Remarques sur un Mémoire de Poisson 188
XLVI. Sur la sommation de certains coefficients binomiaux 193
XLVII. Sur le théorème de Fermat 196
XLVIII. Sur l'équation du troisième degré 202
XLIX. Rayon de la sphère circonscrite à un polyèdre sémi-régulier. . 206
L. Sur une fraction rationnelle 208
LI. Sur les normales à une surface 213
LII. Lieu géométrique. 216
LIII. Quelques intégrales définies 220
LIV. Sur une transformation de série. 223
LV. Sur un problème d'Algèbre légale, et sur une transformation de série 231
LVI. Une propriété des déterminants 234
LVII. Démonstration de la formule de Stirling 238
LVIII. Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde 243
LIX. Rectification et addition à la Note XXX 248
LX. Sur le plus grand commun diviseur algébrique 252
LXI. Sur l'équation du quatrième degré 255
LXII. Sur les coordonnées curvilignes 257
LXIII. Aire d'une surface du quatrième degré. 273
LXIV. Trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde. 288
LXV. Sur les surfaces à courbure moyenne nulle 292
LXVI. Sur la Partition des nombres. 305
LXVII. Sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler 313
LXVIII. De quelques propositions inexactes, relatives aux Séries. . . 334
LXIX. Démonstration d'une formule de Poisson 345
Extrait d'une lettre de M. Housel 348

* Cette Note devrait porter le N° XXXVII.