SUR

QUELQUES FORMULES D'ANALYSE;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 5 avril 1890.)

SUR

QUELQUES FORMULES D'ANALYSE.

I.

Une formule de Gauss.

1. Lemme I. x *étant compris entre* 0 *et* 1 (exclusivement), *la série*

$$1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots$$

est convergente (*).

2. Corollaire. x *étant compris entre* 0 *et* 1 (exclusivement), *la fonction*

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \omega)^n d\omega \text{ (**)} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

tend vers zéro, quand n *croît indéfiniment.*

En effet, *dans toute série convergente, le terme général a pour limite zéro.*

(*) *Recherches sur les fonctions* X_n, premier Mémoire, p. 60.

(**) *Formule de Jacobi.* Après l'avoir citée, dans son *Traité de calcul intégral* (p. 502), M. Joseph Bertrand ajoute : « ... On peut en conclure aisément que, pour chaque valeur » de x moindre que l'unité en valeur absolue, X_n tend vers zéro, lorsque n augmente indé- » finiment. Si, en effet, dans l'intégrale (1), on remplace chaque élément par son module, » le module de la somme, comme on sait, sera augmenté ; on a par conséquent

$$X_n < \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x^2 + (1 - x^2)\omega^2\omega\right]^{\frac{n}{2}} d\omega,$$

» et tous les éléments de l'intégrale tendent vers zéro lorsque n croît indéfiniment. »

Ou nous ne comprenons pas les paroles du savant Géomètre, ou, nous semble-t il, elles expriment cette proposition fausse : *Le nombre des parties d'une somme croissant indéfiniment, la somme tend vers zéro, si chacune de ces parties tend vers zéro.*

3. Lemme II. x^2 *étant compris entre* 0 *et* 1 (exclusivement), *on a*

$$1 = \sum_1^\infty (X_{n-1}^2 - X_n^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La somme des n premiers binômes égale $1 - X_n^2$; donc la limite de la somme de la série est 1.

4. Théorème I. x^2 *étant compris entre* 0 *et* 1 (exclusivement):

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1+x}{1-x} = \sum_1^\infty \frac{X_{n-1}X_n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

D'après les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_{n-1}}{dx} &= \frac{n}{1-x^2}(xX_{n-1} - X_n), \\ \frac{dX_n}{dx} &= \frac{n}{1-x^2}(X_{n-1} - xX_n); \end{aligned}\right\} (^*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$X_n \frac{dX_{n-1}}{dx} + X_{n-1}\frac{dX_n}{dx} = \frac{n}{1-x^2}(X_{n-1}^2 - X_n^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

L'égalité (2) peut donc être écrite ainsi :

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}(X_nX_{n-1})' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Multipliant par dx, et intégrant, on a la formule (A) (**).

5. Théorème II. x *surpassant l'unité, on a, en série convergente,*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = \sum_1^\infty \frac{1}{nX_{n-1}X_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Il est visible que

$$1 = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{X_{n-1}^2} - \frac{1}{X_n^2}\right) (^{***}).$$

(*) *Premier Mémoire*, p. 4.
(**) *Loc. cit.*, p. 62.
(***) Lemme II.

Le binôme équivaut à

$$\frac{X_n^2 - X_{n-1}^2}{(X_{n-1}X_n)^2};$$

ou, d'après l'égalité (4), à

$$\frac{x^2-1}{n}\,\frac{(X_nX_{n-1})'}{(X_nX_{n-1})^2}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{x^2-1} = \sum_1^\infty \frac{(X_nX_{n-1})'}{n(X_{n-1}X_n)^2},$$

ou

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = \sum_1^\infty \frac{nX_{n-1}X_n}{1};\ (^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

formule attribuée à Gauss (**).

6. *Comparaison des deux théorèmes.* On lit, dans le *premier Mémoire* (p. 62) :

« Pour passer de la première (***) à la seconde (IV), il suffit de changer x
» en $\frac{1}{x}$, et X_n en $\frac{1}{X_n}$.

» Mais ce rapprochement n'était que *typographique,* pour ainsi dire. On
» peut faire mieux. En effet, soit, pour plus de clarté, $X_n = f_n(x)$. Dans la formule de Gauss, changeons x en $\frac{1}{z}$; nous aurons

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1+z}{1-z} = \sum_1^\infty \frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)}; \quad (z<1)$$

» donc, par *ma formule* (?) :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} f_{n-1}(z) f_n(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{z}\right)f_n\left(\frac{1}{z}\right)}; \quad (z<1)$$

(*) A cause de

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

(**) Où l'a-t-il publiée? Pour obtenir une réponse à cette question, nous nous sommes adressé, en vain, à plusieurs Géomètres.

(***) Formule (A).

(IV) Formule (B).

» ou, ce qui est équivalent,

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} X_{n-1}X_n = \sum_1^\infty \frac{1}{nf_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)f_n\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ » (*) } (x < 1) \ldots \ldots \quad \text{(C)}$$

7. *Remarques.* — I. L'égalité (C), que nous croyons nouvelle, est remarquable (**).

II. Substituant à X_1, X_2, X_3, ... leurs valeurs connues, on trouve, comme dévéloppement du premier membre,

$$x + \frac{2}{2}\frac{x3}{3-x^2} + \frac{4}{3}\frac{x5}{(3-x^2)(5-3x^2)} + \frac{16}{4}\frac{x7}{(5-3x^2)(35-30x^2+3x^4)} + \cdots \quad (6)$$

et, comme développement du second :

$$x + \frac{1}{4}x(3x^2-1) + \frac{1}{12}(3x^2-1)(5x^3-3x) + \frac{1}{64}(5x^3-3x)(35x^4-30x^2+3) + \cdots \quad (7)$$

Ainsi, *les séries* (6), (7), *convergentes si la variable* x *est comprise entre* 0 *et* 1 (exclusivement), *ont même somme. Cette limite commune est* $\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1+x}{1-x}$.

III. Si, dans la série (6), on développe chaque terme suivant les puissances croissantes de x, et que l'on identifie ce nouveau développement avec la série (7), on obtient une *infinité de sommes de séries.*

IV. On sait que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{1.2}X_1 + \frac{7}{3.4}X_3 + \frac{11}{5.6}X_5 + \cdots \text{ (***)} \ldots \ldots \quad (8)$$

Conséquemment, *les séries* (6), (7), (8), *de formes très différentes, ont même limite.*

(*) La seconde phrase entre guillemets est tirée d'une lettre à M. Hermite, en date du 8 novembre 1889.

(**) Pourrait-on y remplacer $f_n(z)$ par une fonction autre que X_n ?

(***) *Premier Mémoire*, p. 61.

II.

Développements en fractions continues.

8. *Une formule de Gauss*. Le célèbre Mémoire sur la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \text{ (*)}$$

contient la formule

$$\mathcal{L}\frac{1+t}{1-t} = \cfrac{2t}{1 - \cfrac{\frac{1}{3}t^2}{1 - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}t^2}{1 - \cfrac{\frac{3.5}{5\ 7}t^2}{1 - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{1 - \cdots}}}}} \qquad (t < 1)$$

Si l'on y change t en $\frac{1}{x}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = \cfrac{1}{x - \cfrac{\frac{1}{3}}{x - \cfrac{\frac{2.2}{3.5}}{x - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{x - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{x - \cdots}}}}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

(*) *Mémoires de Göttingen*, t. II, p. 16 (1812).

D'après divers auteurs, les dénominateurs des réduites de cette fraction continue sont les fonctions X_0, X_1, X_2, ... (*).

A cause des divergences citées en note, il n'est peut-être pas inutile de former, directement, les réduites dont il s'agit.

9. (*Suite.*) A cet effet, rappelons les principes suivants :

Si

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}},$$

et que les réduites soient

$$\frac{A}{A'}, \quad \frac{B}{B'}, \quad \frac{C}{C'}, \quad \frac{D}{D'}, \quad \ldots;$$

(*) Cependant, ils ne s'accordent pas tout à fait entre eux :

1° Dans le *Cours de M. Hermite, professé à la Sorbonne* (1882), on lit (p. 146) : « nous » allons démontrer que la fonction X_n est précisément le dénominateur d'ordre n de » $\log \frac{x+1}{x-1}$ » ;

2° De son côté, M. Camille Jordan s'exprime ainsi : « les polynômes X_n sont, à des » facteurs constants près, les dénominateurs des réduites de $\mathcal{L}\,\frac{x+1}{x-1}$ » (*Cours d'Analyse*, t. II, p. 251) ;

3° Dans les *Mélanges de Saint-Pétersbourg* (1860, p. 184), M. Tchébychef écrit, à propos de la quantité $\mathcal{L}\,\frac{x+1}{x-1}$: « et comme les réduites de cette expression ont pour dénomi- » nateurs les fonctions désignées par $X^{(n)}$, il en résulte la série connue » ;

4° Enfin M. Rouché, après avoir supposé

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = \cfrac{1}{Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 - \cdots}}},$$

trouve que les dénominateurs des réduites ont les valeurs suivantes :

$$D_1 = X_1, \quad D_2 = \frac{1}{2}X_2, \quad D_3 = \frac{1.3}{2}X_3, \quad D_4 = \frac{2.4}{1.3}X_4, \cdots$$

(*Journal de l'École polytechnique*, 36e Cahier.)

on a :

1° $$y = a + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} + \cdots; \quad (10)$$

2° $$b = B', \quad c = \frac{C' - A'}{B'}, \quad d = \frac{D' - B'}{C'}, \quad e = \frac{E' - C'}{D'}, \ldots \quad (11)$$

En outre, si l'on prend $A = 0$, $B = 1$, *les autres numérateurs sont donnés par les formules :*

$$C = c, \quad D = 1 + Cd, \quad E = C + De, \quad F = D + Ef, \ldots (^*) \quad (12)$$

Dans le cas actuel,

$A'B' = X_0X_1$, $B'C' = -2X_1X_2$, $C'D' = 3X_2X_3$, $D'E' = -4X_3X_4$, $E'F' = 5X_4X_5$, $F'G' = -6X_5X_6$, ...

Donc, si l'on fait $A' = 1$, on aura :

$$\left.\begin{aligned} &B' = X_1, \quad C' = -2X_2, \quad D' = -\frac{3}{2}X_3, \quad E' = \frac{2.4}{1.3}X_4, \quad F' = \frac{1.3.5}{2.4}X_5, \\ &G' = -\frac{2.4.6}{1.3.5}X_6, \ldots; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

puis

$$b = X_1, \quad c = -\frac{2X_2 + 1}{X_1}, \quad d = \frac{3X_3 + 2X_1}{2^2X_2}, \quad e = -\frac{4X_4 + 3X_2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 X_3}, \quad f = \frac{5X_5 + 4X_3}{\left(\frac{2.4}{1.3}\right)^2 X_4},$$

$$g = -\frac{6X_6 + 5X_4}{\left(\frac{1.3.5}{2.4}\right)^2 X_5}, \ldots$$

Pour simplifier ces expressions, il suffit de se rappeler que, généralement,

$$(n + 1)X_{n+1} + nX_n = (2n + 1)xX_n \; (^{**}) \quad (14)$$

(*) *Théorie des fractions continues* (NOUVELLES ANNALES, 1869, pp. 155 et 172).
(**) *Premier Mémoire*, p. 4.

En effet, les numérateurs

$$2X_2 + 1, \quad 3X_3 + 2X_2, \quad 4X_4 + 3X_2, \quad 5X_5 + 4X_4, \quad 6X_6 + 5X_4, \quad \ldots$$

deviennent

$$3xX_1, \quad 5xX_2, \quad 7xX_3, \quad 9xX_4, \quad 11xX_5, \quad \ldots:$$

et l'on a :

$$\left.\begin{array}{l} b = x, \quad c = -3x, \quad d = \dfrac{5}{2^2}x, \quad e = -\dfrac{7}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}x, \quad f = \dfrac{9}{\left(\dfrac{2\,.\,4}{1\,.\,3}\right)^2}x, \\ g = -\dfrac{11}{\left(\dfrac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4}\right)^2}x, \quad \ldots; \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (15)$$

puis

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{-3x + \cfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 5x + \cfrac{1}{-\left(\frac{2}{3}\right)^2 7x + \cfrac{1}{\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 9x + \cdots}}}}} \quad . \; . \quad (16)$$

10. *Remarque.* Ce développement ne diffère qu'en apparence de celui qui précède. En effet, dans le second membre de la formule (9),

$$x - \cfrac{\frac{1}{3}}{x - \cfrac{\frac{2\,.\,2}{3\,.\,5}}{x - \cfrac{\frac{3\,.\,3}{5\,.\,7}}{x - \cfrac{\frac{4\,.\,4}{7\,.\,9}}{x - \cdots}}}} = x - \cfrac{1}{3x - \cfrac{\frac{2\,.\,2}{5}}{x - \cfrac{\frac{3\,.\,3}{5\,.\,7}}{x - \cfrac{\frac{4\,.\,4}{7\,.\,9}}{x - \cdots}}}}$$

De même,

$$3x - \cfrac{\frac{2\,.\,2}{5}}{x - \cfrac{\frac{3\,.\,3}{5\,.\,7}}{x - \cfrac{\frac{4\,.\,4}{7\,.\,9}}{x - \cdots}}} = 3x - \cfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 5x - \cfrac{\frac{3\,.\,3}{2\,.\,2\,.\,7}}{x - \cfrac{\frac{4\,.\,4}{7\,.\,9}}{x - \cdots}}}$$

De même encore,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 5x - \cfrac{\cfrac{3.3}{2.2.7}}{\cfrac{4.4}{x - \cfrac{7.9}{x - \dots}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 5x - \cfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 7x - \cfrac{\left(\frac{2.4}{3}\right)^2 \frac{1}{9}}{x - \dots}},$$

etc.

11. *Vérification.* Des équations (10) et des valeurs (15), on déduit :

$$B' = x,\quad C' = 1 - 3x^2,\quad D' = x + (1 - 3x^2)\frac{5}{4}x = -\frac{1}{4}(5x^3 - 3x),$$

$$E' = 1 - 3x^2 + \frac{3}{4}(5x^3 - 3x)\frac{28}{9}x = \frac{1}{3}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$F' = -\frac{3}{4}(5x^3 - 3x) + \frac{1}{3}(35x^4 - 30x^2 + 3)\frac{81}{64}x = \frac{15}{64}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

ou

$$A' = X_0,\quad B' = X_1,\quad C' = -2X_2,\quad D' = -\frac{3}{2}X_3,\quad E' = \frac{8}{3}X_4,\quad F' = \frac{15}{8}X_5,\dots; \qquad (13)$$

comme précédemment.

12. *Recherche des numérateurs.* Par les formules (12) et (15) :

$$\left.\begin{aligned}
&C = -3x,\quad D = 1 - 3x\cdot\frac{5}{4}x = -\frac{1}{4}(15x^2 - 4),\\
&E = -3x + \frac{1}{4}(15x^2 - 4)\frac{28}{9}x = \frac{5}{9}(21x^3 - 11x),\\
&F = -\frac{1}{4}(15x^2 - 4) + \frac{5}{9}(21x^3 - 11x)\frac{81}{64}x = \frac{1}{64}(945x^4 - 735x^2 + 64),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}\dots \qquad (17)$$

13. *Réduites.* Elles sont, en vertu des formules (13), (17) :

$$\frac{1}{X_1},\quad \frac{3x}{2X_2},\quad \frac{15x^2 - 4}{2.3X_3},\quad \frac{5(21x^3 - 11x)}{2.3.4X_4},\quad \frac{945x^4 - 735x^2 + 64}{2.3.4.5X_5},\dots \qquad (18)$$

14. *Suite.* Changeons de notation, et représentons par

$$\frac{N_1}{X_1}, \quad \frac{N_2}{X_2}; \quad \frac{N_3}{X_3}, \ldots \frac{N_n}{X_n}, \ldots$$

les réduites de la *fonction* $\mathfrak{L}\,\frac{x+1}{x-1}$, de manière que

$$\left.\begin{aligned} &N_1 = 2,\ N_2 = 3x,\ N_3 = \frac{1}{3}(15x^2 - 4),\ N_4 = \frac{1}{12}(105x^3 - 55x), \\ &N_5 = \frac{1}{60}(945x^4 - 735x^2 + 64), \cdots \end{aligned}\right\} (^*) \ldots \quad (19)$$

De ces valeurs résultent les égalités suivantes :

$$N_1X_2 - N_2X_1 = (3x^2 - 1) - 3x^2 = -1,$$

$$N_2X_3 - N_3X_2 = 3x\,\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) - \frac{1}{3}(15x^2 - 4)\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = -\frac{2}{3},$$

$$\begin{aligned} N_3X_4 - N_4X_3 &= \frac{1}{3}(15x^2 - 4)\cdot\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) - \frac{1}{12}(105x^3 - 55x)\,\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ &= \frac{1}{24}\left[(15x^2 - 4)(35x^4 - 30x^2 + 3) - (105x^3 - 55x)(5x^3 - 3x)\right] \\ &= \frac{1}{24}\left[525x^6 - 590x^4 + 165x^2 - 12 - (525x^6 - 590x^4 + 165x^2)\right] = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4X_5 - N_5X_4 &= \frac{5}{96}(21x^3 - 11x)(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\quad - \frac{1}{480}(945x^4 - 735x^2 + 64)(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ &= \frac{5}{96}(1\,323x^8 - 2\,163x^6 + 1\,085x^4 - 165x^2) \\ &\quad - \frac{1}{480}(33\,075x^8 - 54\,075x^6 + 27\,125x^4 - 4\,125x^2 + 192) \\ &= \frac{1}{480}\big[33\,075x^8 - 54\,075x^6 + 27\,125x^4 - 4\,125x^2 \\ &\qquad - (33\,075x^8 - 54\,075x^6 + 27\,125x^4 - 4\,125x^2 + 192)\big], \end{aligned}$$

ou

$$N_4X_5 - N_5X_4 = -\frac{2}{5};$$

. . . .

(*) Comme on le verra plus loin, les numérateurs N_n, provenant de $\mathfrak{L}\,\frac{x+1}{x-1}$, ne diffèrent pas des polynômes P_n, considérés par M. Hermite.

15. *Généralisation.* Pour une valeur particulière attribuée à x, les réduites $\frac{N_1}{X_1}, \frac{N_2}{X_2}, \ldots \frac{N_n}{X_n}$ tendent, de plus en plus, vers $\mathcal{L}\,\frac{x+1}{x-1}$. Ainsi, *pourvu que la série soit convergente* (*),

$$\mathcal{L}\,\frac{x+1}{x-1} = \sum_1^\infty \left(\frac{N_n}{X_n} - \frac{N_{n-1}}{X_{n-1}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Par la formule de Gauss :

$$\mathcal{L}\,\frac{x+1}{x-1} = 2 \sum_1^\infty \frac{1}{nX_{n-1}X_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (B)$$

Les deux développements seront semblables si nous prenons

$$\frac{N_n}{X_n} - \frac{N_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{2}{nX_{n-1}X_n},$$

ou

$$N_n X_{n-1} - N_{n-1} X_n = \frac{2}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (D)$$

16. *Remarques.* I. Les premiers numérateurs satisfont à cette loi de récurrence (14); donc ils y satisfont tous.

II. La série (20) est convergente, car elle ne diffère pas de la série (B). Conséquemment

$$\mathcal{L}\,\frac{x+1}{x-1} = \lim \frac{N_n}{X_n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

III. Nous avons trouvé :

$$N_1 = 2, \qquad N_2 = 3x, \qquad N_3 = \frac{1}{3}(15x^2 - 4), \qquad \ldots$$

De là résulte facilement, par la relation (D), que N_n *est un polynôme entier, du degré* n — 1.

(*) On va voir qu'elle l'est. Pour la symétrie, nous supposons $N_0 = 0$.

17. *Suite.* La formule (16) peut être écrite ainsi :

$$\mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}=\cfrac{2}{x+\cfrac{1}{-3x+\cfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 5x+\cfrac{1}{-\left(\frac{2}{3}\right)^2 7x+\cdots}}}}$$

Soient alors q_1, q_2, q_3, ... les *termes* de la fraction continue qui divise 2, savoir :

$$q_1=x,\qquad q_2=-3x,\qquad q_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2 5x,\qquad q_4=-\left(\frac{2}{3}\right)^2 7x,\qquad \ldots$$

Généralement, si n est *impair*,

$$q_n=\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots\overline{n-2}}{2\,.\,4\,.\,6\ldots\overline{n-1}}\right)^2(2n-1)x;\ \ldots\ldots\ldots \tag{22}$$

et, si n est *pair,*

$$q_n=-\left(\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots\overline{n-2}}{1\,.\,3\,.\,5\ldots\overline{n-1}}\right)^2(2n-1)x\ (^*)\ \ldots\ldots \tag{23}$$

Dans le premier cas,

$$q_n=\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots\overline{n-2}}{2\,.\,4\,.\,6\ldots\overline{n-1}}\right)^2\frac{nX_n+\overline{n-1}X_{n-2}}{X_{n-1}};\ \ldots\ldots \tag{24}$$

et, dans le second,

$$q_n=-\left(\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots\overline{n-2}}{1\,.\,3\,.\,5\ldots\overline{n-1}}\right)^2\frac{nX_n+\overline{n-1}X_{n-2}}{X_{n-1}}\ \ldots\ldots \tag{25}$$

18. *Remarques.* **I.** Aux formules (24), (25), on peut substituer celles-ci :

$$q_n=\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots\overline{n-2}}{2\,.\,4\,.\,6\ldots\overline{n-1}}\right)^2\frac{nN_n+\overline{n-1}N_{n-2}}{N_{n-1}},\qquad (n\ \textit{impair}) \tag{26}$$

$$q_n=-\left(\frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots\overline{n-2}}{1\,.\,3\,.\,5\ldots\overline{n-1}}\right)^2\frac{nN_n+\overline{n-1}N_{n-2}}{N_{n-1}}\qquad (n\ \textit{pair}) \tag{27}$$

(*) Les formules (22), (23) reproduisent tous les termes de la fraction continue (16), *transformée* de la fraction continue (9). Gauss a donné la forme générale des coefficients de celle-ci ; donc les formules (22), (23) peuvent être regardées comme démontrées.

En effet, si l'on suppose

$$\frac{nX_n + \overline{n-1}X_{n-2}}{X_{n-1}} = \frac{nN_n + \overline{n-1}N_{n-2}}{N_{n-1}}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(E)}$$

on trouve

$$n(X_nN_{n-1} - X_{n-1}N_n) = \overline{n-1}(X_{n-1}N_{n-2} - X_{n-2}N_{n-1});$$

ce qui est identique, en vertu de la relation (D).

19. THÉORÈME I. *Trois numérateurs consécutifs satisfont à la relation*

$$(n+1)N_{n+1} - (2n+1)xN_n + nN_{n-1} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(F)}$$

Si, dans (E), on change n en $n+1$, la valeur commune des deux membres est $(2n+1)x$ (14); donc, etc.

20. THÉORÈME II. a *étant une quantité autre que* x :

$$\frac{(n+1)X_{n+1} - (2n+1)aX_n + nX_{n-1}}{x-a} = (2n+1)X_n. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(G)}$$

En effet, d'après l'égalité (14), le numérateur se réduit à $(2n+1)(x-a)X_n$ (*).

21. THÉORÈME III. a *étant une quantité autre que* x :

$$\frac{(n+1)N_{n+1} - (2n+1)aN_n + nN_{n-1}}{x-a} = (2n+1)N_n. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(H)}$$

Même démonstration.

22. *Fractions inverses.* Considérons les fractions continues successives :

$$q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{N_2}{X_2}, \qquad q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = \frac{N_3}{X_3}, \qquad \ldots \qquad q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{q_n}}} = \frac{N_n}{X_n};$$

(*) Cette *propriété des fonctions* X_n, conséquence immédiate de la relation (14), a-t-elle été *écrite* quelque part?

ou, sous forme abrégée,

$$[q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n] = \frac{N_n}{X_n}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

puis les fractions

$$[q_2, q_1], \quad [q_3, q_2, q_1], \quad \ldots \quad [q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1],$$

inverses des premières.

1° A cause de

$$q_1 = X_1, \quad q_2 = -\frac{2X_{2+1}}{X_1}:$$

$$[q_2, q_1] = -\frac{2X_{2+1}}{X_1} + \frac{1}{X_1},$$

ou

$$[q_2, q_1] = -2\frac{X_2}{X_1}.$$

2° A cause de

$$q_3 = \frac{\frac{3}{2}X_3 + X_1}{2X_2},$$

et de la précédente formule :

$$[q_3, q_2, q_1] = \frac{\frac{3}{2}X_3 + X_1}{2X_2} - \frac{X_1}{2X_2},$$

ou

$$[q_3, q_2, q_1] = \frac{3}{22}\frac{X_3}{X_2}.$$

3° De même,

$$[q_4, q_3, q_2, q_1] = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 4\frac{X_4}{X_2};$$

etc.

En général,

$$[q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1] = \left(\frac{1.3\ldots\overline{n-2}}{2.4\ldots\overline{n-1}}\right)^2 n\frac{X_n}{X_{n-1}}, \qquad (29)$$

si n est *impair;* et

$$[q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1] = -\left(\frac{2.4\ldots\overline{n-2}}{1.3\ldots\overline{n-1}}\right)^2 n\frac{X_n}{X_{n-1}}, \qquad (30)$$

si n est *pair* (*).

23. *Remarque.* La combinaison de ces dernières valeurs, avec celles de q_n (22), (23), donne ce résultat simple :

$$\frac{q_n}{[q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1]} = \frac{2n-1}{n}x\frac{X_{n-1}}{X_n} \qquad (K)$$

III.

Les polynômes P_n, de M. Hermite.

24. *Une équation différentielle.* Considérons la fonction

$$V_n = X_n \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} - P_n; \qquad (31)$$

P_n étant un certain polynôme entier, dont le degré est inférieur à n. La quantité V_n est une intégrale de l'équation

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \text{ (**)}, \qquad (32)$$

à laquelle X_n satisfait aussi (***).

(*) Ces formules ne diffèrent pas, au fond, de celle qui a été donnée par M. Gerono, dans le premier volume des *Nouvelles Annales* (1842, p. 3). De plus, un procédé bien connu permet de vérifier, très facilement, qu'elles sont générales.

(**) *Cours de M. Hermite,* p. 147.

(***) *Premier Mémoire,* p. 7, équation (7). Dans tout ce qui va suivre, les accents désigneront des dérivées relatives à x.

On a :

$$V'_n = \frac{dX_n}{dx} \mathfrak{L} \frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} X_n - P'_n,$$

$$V''_n = \frac{d^2X_n}{dx^2} \mathfrak{L} \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} \frac{dX_n}{dx} + \frac{4x}{(4^2-1)^2} X_n - P''_n.$$

Si l'on multiplie par $-n(n+1)$, par $2x$, par x^2-1, et qu'on ajoute les produits, on trouve, eu égard à l'identité

$$(x^2-1)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2x\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0 : \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

$$(x^2-1)P''_n + 2xP'_n - n(n+1)P_n = -4\frac{dX_n}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Cette équation ne diffère, de l'équation (32), que par le second membre.

25. *Une intégration.* Remettons y au lieu de P_n :

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = -4\frac{dX_n}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Quand on fait abstraction du second membre, une intégrale est $y = X_n$ (24).

Soit donc, suivant la méthode connue,

$$y = X_n \int U_n dx; \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

et, par conséquent :

$$y' = X_n U_n + \frac{dX_n}{dx}\int U_n dx,$$

$$y'' = X_n \frac{dU_n}{dx} + 2\frac{dX_n}{dx}U_n + \frac{d^2X_n}{dx^2}\int U_n dx.$$

La substitution donne

$$(x^2-1)X_n\frac{dU_n}{dx} + 2\left[(x^2-1)\frac{dX_n}{dx} + xX_n\right]U_n = -4\frac{dX_n}{dx},$$

ou

$$(x^2-1)X_n^2\frac{dU_n}{dx} + 2\left[(x^2-1)\frac{dX_n}{dx} + xX_n\right]X_nU_n = -4X_n\frac{dX_n}{dx}.$$

Le premier membre est la dérivée de $(x^2-1)X_n^2U_n$ (*).

(*) La multiplication par X_n abrège le calcul.

Donc

$$(x^2-1)X_n^2U_n = \alpha - 2X_n^2, \qquad U_n = \frac{\alpha}{(x^2-1)X_n^2} - \frac{2}{x^2-1};$$

puis

$$y = X_n\left[\alpha\int\frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} + \beta + \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}\right]; \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

α, β étant les constantes arbitraires. Telle est l'intégrale générale de l'équation (35).

26. *Remarques.* — I. D'après l'équation (34), y se réduit à P_n quand α et β ont des valeurs convenables.

II. Il est visible (et connu) que l'intégrale générale de l'équation (32) est

$$y = AX_n + BV_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

27. *Détermination de* α, β. De l'équation (34), on tire, par un calcul facile :

$$P_1 = 2, \quad P_2 = 3x, \quad P_3 = \frac{1}{3}(15x^2-4), \quad P_4 = \frac{1}{12}(105x^3-55x), \ldots \text{(*)} \quad . \quad (39)$$

Donc, en particulier,

$$\frac{2}{x} = \alpha\int\frac{dx}{(x^2-1)x^2} + \beta + \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}; \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

puis

$$-\frac{2}{x^2} = \frac{\alpha}{(x^2-1)x^2} - \frac{2}{x^2-1}.$$

Cette équation donne $\alpha = 2$.

D'un autre côté, si, dans l'égalité (40), on fait croître indéfiniment x, tous les termes tendent vers zéro, excepté β : $\beta = 0$.

28. *Expression de* P_n. Par ce qui vient d'être expliqué, on a

$$P_n = X_n\left[2\int\frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} + \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1}\right]; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (L)$$

formule remarquable (**).

(*) Ces valeurs sont celles de N_1, N_2, N_3, N_4, . . . (19).

(**) Est-elle nouvelle ?

29. *Autre forme de* P_n. Suivant M. HERMITE :

$$P_n = \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n - X_n}{z - x} dz \text{ (*)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(M)}$$

Z_n représentant ce que devient X_n quand on y change x en z.

30. THÉORÈME I. *On a, entre deux polynômes consécutifs,* P_{n-1}, P_n, *la relation*

$$P_{n-1}X_n - P_nX_{n-1} = -\frac{2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(N)}$$

La formule (L) donne

$$\frac{P_{n-1}}{X_{n-1}} - \frac{P_n}{X_n} = 2\int \frac{dx}{x^2-1}\left[\frac{1}{X_{n-1}^2} - \frac{1}{X_n^2}\right].$$

Mais

$$\frac{1}{X_{n-1}^2} - \frac{1}{X_n^2} = \frac{x^2-1}{n}\frac{(X_{n-1}X_n)'}{(X_{n-1}X_n)^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

donc la relation précédente se réduit à

$$\frac{P_{n-1}}{X_{n-1}} - \frac{P_n}{X_n} = \frac{2}{n}\int \frac{(X_{n-1}X_n)'}{(X_{n-1}X_n)^2} dx.$$

Intégrant, on trouve (N).

31. *Remarque.* L'intégrale générale de $\frac{(X_{n-1}X_n)'}{(X_{n-1}X_n)^2} dx$ est $-\frac{1}{X_{n-1}X_n} + \textit{const.}$ Mais, dans le cas actuel, la constante est nulle, attendu que

$$P_1X_2 - P_2X_1 = (3x^2 - 1) - 3x^2 = -1.$$

32. *Autre démonstration.* En vertu de (M), l'égalité (N) devient

$$X_n \int_{-1}^{+1} \frac{Z_{n-1} - X_{n-1}}{z - x} dz - X_{n-1}\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n - X_n}{z - x} dz = -\frac{2}{n},$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_nZ_{n-1} - X_{n-1}Z_n}{z - x} dz = -\frac{2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

(*) *Loc. cit.*, p. 146.

Or, des relations

$$nZ_n - (2n-1)zZ_{n-1} + (n-1)Z_{n-2} = 0,$$
$$nX_n - (2n-1)xX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} = 0,$$

on déduit

$$n(Z_nX_{n-1} - Z_{n-1}X_n) - (2n-1)(z-x)Z_{n-1}X_{n-1} - (n-1)(Z_{n-1}X_{n-2} - Z_{n-2}X_{n-1}) = 0;$$

puis

$$n\int_{-1}^{+1}\frac{Z_nX_{n-1} - Z_{n-1}X_n}{z-x}dz - (2n-1)X_{n-1}\int_{-1}^{+1}Z_{n-1}dz = (n-1)\int_{-1}^{+1}\frac{Z_{n-1}X_{n-2} - Z_{n-2}X_{n-1}}{z-x}dz.$$

L'intégrale $\int_{-1}^{+1} Z_{n-1}dz$ est nulle, si n surpasse 1 (*). Donc

$$n\int_{-1}^{+1}\frac{Z_nX_{n-1} - Z_{n-1}X_n}{z-x}dz = (n-1)\int_{1}^{+1}\frac{Z_{n-1}X_{n-2} - Z_{n-2}X_{n-1}}{z-x}dz = const.$$

La valeur de la constante est $\int_{-1}^{+1}\frac{z-x}{z-x}dz = 2$; etc.

33. *Remarque.* Les équations de *récurrence* (D), (N), ont même forme. Si donc $P_1 = N_1$, on aura $P_2 = N_2$, $P_3 = N_3$, etc. Or, $P_1 = 2$, $N_1 = 2$; donc *les polynômes* P_n *sont les numérateurs des réduites de la fraction continue qui représente* $\mathfrak{L}\frac{x+1}{x-1}$ (**14**, note).

34. *Une sommation.* La relation (N) équivaut à

$$\frac{P_n}{X_n} - \frac{P_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{2}{nX_{n-1}X_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

En supposant $P_0 = 0$, on conclut, de celle-ci :

$$\frac{1}{X_0X_1} + \frac{1}{2X_1X_2} + \cdots + \frac{1}{nX_{n-1}X_n} = \frac{1}{2}\frac{P_n}{X_n}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

puis

$$\sum_1^\infty \frac{1}{nX_{n-1}X_n} = \frac{1}{2}\,lim\,\frac{P_n}{X_n} = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\frac{x+1}{x-1} \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

(*) *Premier Mémoire*, p. 41. D'ailleurs, la propriété énoncée résulte, immédiatement, de la formule de Rodrigues.

(**) Ces résultats confirment tous les précédents.

35. Théorème II. *On a, entre les polynômes* P_n, X_n, *la relation*

$$P_n \frac{dX_n}{dx} - X_n \frac{dP_n}{dx} = 2\frac{X_n^2 - 1}{x^2 - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{P})$$

De

$$\frac{P_n}{X_n} = 2\int \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} + \mathcal{L}\frac{x+1}{x-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{L})$$

on tire

$$\frac{X_n \dfrac{dP_n}{dx} - P_n \dfrac{dX_n}{dx}}{X_n^2} = \frac{2}{(x^2-1)X_n^2} - \frac{2}{x^2-1}; \text{ etc.}$$

36. *Extrait d'une lettre à M. Hermite.* « Je crois vous avoir mandé que,
» dans le Mémoire présenté, samedi, à l'Académie de Belgique, j'ai indiqué
» certaines propriétés dont jouissent vos polynômes P_n, ou, après un
» changement de lettres, vos intégrales

$$» \quad J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - A_n}{x - a} dx.$$

» (J'appelle A_n ce que devient X_n par le changement de x en a.)

» Je vous remercie de m'avoir fait connaître la belle formule :

$$» \quad \sum_0^\infty \alpha^n J_n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}} \mathcal{L} \frac{\alpha - a + \sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}}{1 - a} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{A})$$

» En la comparant à la formule (79) de mon *deuxième Mémoire* (p. 46),
» j'arrive à un résultat qui m'étonne un peu :

$$» \quad \mathcal{L}\frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \sum_1^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{B})$$

» Pour rendre plus facile la comparaison, je change, dans (A), α en z,
» a en x :

$$» \quad \sum_0^\infty z^n J_n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} \mathcal{L} \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{A}')$$

» J_n était une fonction de a; donc, dans (A′), on doit prendre

$$\text{»}\ J_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - T_n}{x - t}\,dt,$$

» afin que le *nouveau* J_n ne diffère, de l'*ancien*, que par le changement
» indiqué. Si je ne me trompe, le *nouveau* J_n est donc votre polynôme P_n.
» Ceci admis, (A′) devient

$$\text{»}\ \sum_0^\infty P_n z^n = \frac{2}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}\,\mathcal{L}\,\frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x}; \quad \ldots \quad (\text{A}'')$$

» ou, d'après (B) :

$$\text{»}\ \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2zx + z^2}\sum_0^\infty P_n z^n = \sum_0^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{C})$$

» Prenons les dérivées des deux membres, par rapport à z :

$$\text{»}\ \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2zx + z^2}\sum_0^\infty nP_n z^{n-1} + \frac{1}{2}\frac{z - x}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}\sum_0^\infty P_n z^n = \sum_0^\infty X_n z^n;$$

» ou, par l'*équation de définition* :

$$\text{»}\ (1 - 2zx + z^2)\sum_0^\infty nP_n z^{n-1} + (z - x)\sum_0^\infty P_n z^n = 2.$$

» Ainsi

$$\text{»}\ \sum_0^\infty [n - (2n+1)zx + (n+1)z^2]P_n z^{n-1} = 2;$$

» ou enfin, parce que $P_0 = 0$:

$$\text{»}\ \sum_1^\infty [n - (2n+1)zx + (n+1)z^2]P_n z^{n-1} = 2 \quad \ldots\ldots \quad (\text{D})$$

» Voilà ce qui m'étonne. Ai-je commis des fautes, ou vous ai-je mal com-
» pris? L'avenir nous l'apprendra.

» Liége, 10 avril 1890.

» *P. S.* La formule (D) est exacte : elle s'accorde avec la relation
» entre P_{n+1}, P_n, P_{n-1}. »

IV.

Quelques propriétés des fonctions X_n (*).

37. Théorème I. *Si l'on représente par* Z_n *ce que devient* X_n *quand on y remplace* x *par* z, *on a*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n Z_{n-1} - X_{n-1} Z_n}{z - x}\,dz = -\frac{2}{n} \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Q)$$

38. Corollaire I. *Soit* a *une racine de* $X_n = 0$. *Si l'on appelle* A_{n-1} *ce que devient* X_{n-1} *par le changement de* x *en* a :

$$A_{n-1} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n dx}{x - a} = \frac{2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (R)$$

39. Corollaire II. *Si* n *est impair :*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{X_n}{x}\,dx = \pm 2 \frac{2.4.6\ldots\overline{n-1}}{3.5.7\ldots n} \text{ (***)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

Dans ce cas particulier, $a = 0$. Donc

$$A_{n-1} = X_{n-1} = \pm \frac{1.3.5\ldots\overline{n-2}}{2.4.6\ldots\overline{n-1}} \text{ (IV)};$$

etc.

40. *Remarque.* n étant *impair,* le premier membre de (S) équivaut à

$$2\int_0^1 \frac{X_n}{x}\,dx \text{ (V)}.$$

(*) Petit supplément aux *Recherches*.

(**) Voir ci-dessus (41). La relation (Q) est démontrée, autrement, dans le Mémoire de M. H. Laurent (*Journal de Resal*, t. I, p. 386).

(***) Le signe +, quand $n = \mathfrak{M}.4 + 1$.

(IV) *Premier Mémoire*, p. 10.

(V) En effet, tous les termes de la fraction $\frac{X_n}{x}$ sont de degré *pair*.

Donc, au moyen de la formule connue :

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots\overline{n-1}}{3.5.7\ldots n},$$

la relation (S) devient

$$\int_0^1 \left(\frac{X_n}{x} \mp \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (T)$$

41. Théorème II. a *étant une quantité autre que* x :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(n+1)X_{n+1} - (2n+1)aX_n + nX_{n-1}}{x-a} dx = 0 \quad \ldots\ldots \quad (U)$$

D'après la relation (G), le premier membre se réduit à $(2n+1)\int_{-1}^{+1} X_n dx$. Or, cette intégrale est nulle (**32**, note).

42. Corollaire. *Les polynômes* P_{n+1}, P_n, P_{n-1} *satisfont à la relation*

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (V)$$

A cause de

$$P_n = \int_{-1}^{+1} \frac{X_n - Z_n}{x-z} dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (M)$$

et de l'égalité (14), le premier membre se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(n+1)Z_{n+1} - (2n+1)xZ_n + nZ_{n-1}}{x-z} dz;$$

ou, par le changement de z en x et de x en z :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(n+1)X_{n+1} - (2n+1)zX_n + nX_{n-1}}{z-x} dx;$$

On vient de voir que cette intégrale est nulle. Donc, etc.

43. Théorème III. *On a, entre trois fonctions consécutives, la relation*

$$n\frac{dX_{n+1}}{dx} - (2n+1)x\frac{dX_n}{dx} + (n+1)\frac{dX_{n-1}}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (W)$$

De l'égalité

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + xX_{n-1} = 0; \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

on tire celle-ci :

$$(n+1)\frac{dX_{n+1}}{dx} - (2n+1)\left[X_n + x\frac{dX_n}{dx}\right] + n\frac{dX_{n-1}}{dx} = 0.$$

Mais, les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-x^2}{n}\frac{dX_{n-1}}{dx} &= xX_{n-1} - X_n, \\ \frac{1-x^2}{n}\frac{dX_n}{dx} &= X_{n-1} - xX_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

donnent

$$X_n = \frac{1}{n}\left[x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right] (^*).$$

Substituant, on trouve

$$n(n+1)\frac{dX_{n+1}}{dx} - (2n+1)\left[x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} + nx\frac{dX_n}{dx}\right] + n^2\frac{dX_{n-1}}{dx} = 0;$$

ou, après suppression du facteur $n+1$, l'égalité (W).

44. Théorème IV. *On a, entre deux fonctions consécutives, la relation*

$$X_n\frac{dX_{n-1}}{dx} - X_{n-1}\frac{dX_n}{dx} = -\frac{n}{1-x^2}(X_n^2 - 2xX_nX_{n-1} + X_{n-1}^2) \quad \ldots \ldots \quad (X)$$

La combinaison des formules (3) donne

$$\frac{1-x^2}{n}\left[X_n\frac{dX_{n-1}}{dx} - X_{n-1}\frac{dX_n}{dx}\right] = (xX_nX_{n-1} - X_n^2) - (X_{n-1}^2 - xX_nX_{n-1});$$

etc.

45. *Remarques.* — I. On sait que

$$X_n^2 - 2xX_nX_{n-1} + X_{n-1}^2 = -2\int_{-1}^{x} X_nX_{n-1}dx \; (^{**}).$$

Donc l'égalité (X) donne celle-ci :

$$X_n\frac{dX_{n-1}}{dx} - X_{n-1}\frac{dX_n}{dx} = \frac{2n}{1+x^2}\int_{-1}^{x} X_nX_{n-1}dx \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

(*) *Premier Mémoire*, p. 43.
(**) *Premier Mémoire*, p. 41.

II. Le trinôme $X_n^2 - 2xX_nX_{n-1} + X_{n-1}^2$ s'annule pour $x = \pm 1$ (*). Soit donc

$$X_n^2 - 2xX_nX_{n-1} + X_{n-1}^2 = (1 - x^2)Q_n, \quad \ldots \quad (45)$$

Q_n étant un polynôme *entier*. La relation (X) devient

$$\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n} - \frac{\frac{dX_{n-1}}{dx}}{X_{n-1}} = n\frac{Q_n}{X_nX_{n-1}} \quad \ldots \quad (46)$$

Il résulte, de celle-ci :

$$\int_1^x \frac{Q_n}{X_nX_{n-1}}dx = \frac{1}{n}\,\mathcal{L}\,\frac{X_n}{X_{n-1}} \text{ (**)} \quad \ldots \quad (47)$$

III. Conséquemment, *l'intégrale de* $\frac{Q_n}{X_nX_{n-1}}dx$ *ne contient aucun terme algébrique.*

46. Théorème V. *La somme*

$$\frac{Q_1}{X_1X_0} + 2\frac{Q_2}{X_2X_1} + 3\frac{Q_3}{X_3X_2} + \cdots + n\frac{Q_n}{X_nX_{n-1}}$$

égale $\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n}$.

Si, dans l'égalité (46), on change n en $n - 1$, $n - 2$, ... 1, que l'on fasse la somme des premiers membres et celle des seconds, on trouve le résultat énoncé (***).

47. Théorème VI. *On a, entre trois fonctions consécutives, la relation*

$$(n+1)\left[X_{n+1}\frac{dX_n}{dx} - X_n\frac{dX_{n-1}}{dx}\right] = n\left[X_n\frac{dX_{n+1}}{dx} - X_{n-1}\frac{dX_n}{dx}\right]. \quad \ldots \quad (Y)$$

(*) *Loc. cit.*, p. 10. Il est facile de voir que la dérivée ne s'annule pas, pour cette valeur de x.

(**) Au fond, la relation (47) est une simple *identité;* car l'équation (46) *définit* Q_n.

(***) A cause de $X_0 = 1$, le terme $\frac{\frac{dX_0}{dx}}{X_0}$ est nul.

Reprenons les égalités

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0, \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$n\frac{dX_{n+1}}{dx}-(2n+1)x\frac{dX_n}{dx}+(n+1)X_{n-1}=0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{W})$$

L'élimination de $(2n+1)x$ donne, immédiatement, (Y).

48. Corollaire I. *On a, entre $n+2$ fonctions consécutives, la relation*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2}X_0\frac{dX_1}{dx}+\frac{1}{2.3}X_1\frac{dX_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}X_{n-1}\frac{dX_n}{dx}\\&=\frac{n}{n+1}X_n\frac{dX_{n+1}}{dx}-X_{n+1}\frac{dX_n}{dx}\ (^*).\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Si l'on divise, par $n+1$, les deux membres de (Y), que l'on change n en $n-1$, $n-2$, ... 1, et qu'on fasse les sommes, on trouve l'égalité (48).

49. Corollaire II. *On a, entre* n + 2 *fonctions consécutives, la relation*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1.2}X_2\frac{dX_1}{dx}+\frac{1}{2.3}X_3\frac{dX_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}X_{n+1}\frac{dX_n}{dx}\\&=X_{n+1}\frac{dX_{n+2}}{dx}-\frac{n+2}{n+1}X_{n+2}\frac{dX_{n+1}}{dx}-1.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

Même démonstration.

50. Corollaire III. x *étant compris entre* 0 *et* 1, *la série*

$$\frac{1}{1.2}X_0\frac{dX_1}{dx}+\frac{1}{2.3}X_1\frac{dX_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}X_{n-1}\frac{dX_n}{dx}+\cdots \quad \ldots \quad (50)$$

a pour limite zéro.

Conséquence du Corollaire I.

(*) On ne compte pas $X_0=1$.

51. Corollaire IV. x *étant compris entre* 0 *et* 1, *la série*

$$\frac{1}{1\,.\,2}X_2\frac{dX_1}{dx}+\frac{1}{2\,.\,3}X_3\frac{dX_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}X_{n+1}\frac{dX_n}{dx}+\cdots \quad \ldots \quad (51)$$

a pour limite — 1.

Conséquence du Corollaire II.

52. Théorème VII. *On a, entre* n + 2 *fonctions consécutives, la relation*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{3}(X_0^2-X_2^2)+\frac{1}{5}(X_1^2-X_3^2)+\cdots+\frac{1}{2n+1}(X_{n-1}^2-X_{n+1}^2)\\&=n(X_n^2-X_{n-1}X_{n+1})+(n+2)[X_{n+1}^2-X_nX_{n+2}]-(1-x^2).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (Z)$$

Si l'on combine, par addition, les égalités (48), (49), on trouve,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{1\,.\,2}(X_0+X_2)\frac{dX_1}{dx}+\frac{1}{2\,.\,3}(X_1+X_3)\frac{dX_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}(X_{n-1}+X_{n+1})\frac{dX_n}{dx}\\&=\left(\frac{n}{n+1}X_n-\frac{n+2}{n+1}X_{n+2}\right)\frac{dX_{n+1}}{dx}+X_{n+1}\frac{dX_{n+2}}{dx}-X_{n+1}\frac{dX_n}{dx}-1.\end{aligned}\right\} \quad . \quad (52)$$

Mais les formules

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX_n}{dx}&=\frac{n+1}{1-x^2}(xX_n-X_{n+1}),\\ \frac{dX_n}{dx}&=\frac{n}{1-x^2}(X_{n-1}-xX_n)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

donnent

$$\frac{1}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx}=\frac{X_{n-1}-X_{n+1}}{(2n+1)(1+x^2)} \quad \ldots \quad (53)$$

Au moyen de cette valeur, l'égalité (52) se transforme en la relation (Z).

53. *Vérification.* Si l'on change n en $n-1$, et qu'on retranche, on doit donc avoir

$$\begin{aligned}X_{n-1}^2-X_{n+1}^2=(2n+1)\,[(n+2)(X_{n+1}^2-X_nX_{n+2})]+n(X_n^2-X_{n-1}X_{n+1})\\-(n+1)(X_n^2-X_{n-1}X_{n+1})-(n-1)(X_{n-1}^2-X_{n-2}X_n);\end{aligned}$$

ou, après quelques réductions :

$$\left.\begin{aligned}&(2n^2+5n+3)X_{n+1}^2-n(2n-1)X_{n-1}^2+(2n+1)_nX_n^2\\&=(2n+1)\,[(2n+3)X_nX_{n+1}x-X_{n-1}X_{n+1}-(n-1)X_{n-2}X_n].\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (54)$$

Si l'on remplace $(n-1)X_{n-2}$ par $(2n-1)xX_{n-1}-nX_n$ (*), on obtient

$$\left.\begin{aligned}(n+1)(2n+3)X_{n+1}^2-(2n+1)[(2n+3)X_nx-X_{n-1}]X_{n+1}\\+(2n-1)X_{n-1}[(2n+1)X_n-nX_{n-1}]=0.\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Regardons X_{n+1} comme une inconnue. L'une des racines est $\frac{(2n+1)X_nx-nX_{n-1}}{n+1}$; donc l'autre doit être $\frac{2n-1}{2n+3}X_{n-1}$ (**).

En effet,

$$\frac{(2n+1)X_nx-nX_{n-1}}{n+1}+\frac{2n-1}{2n+3}X_{n-1}=\frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)}[(2n+3)X_nx-X_{n-1}].$$

Ainsi, l'égalité (55) est une conséquence de la relation (14); et, par suite, il en est de même pour l'équation (54). Enfin, l'égalité (Z) se vérifie très facilement quand $n=1$. Elle est donc générale.

54. Théorème IX. x *étant compris entre* 0 *et* 1, *la série*

$$\frac{1}{3}(X_0^2-X_2^2)+\frac{1}{5}(X_1^2-X_3^2)+\frac{1}{7}(X_2^2-X_4^2)+\frac{1}{2n+1}(X_{n-1}^2-X_{n+1}^2)+\cdots \quad . \quad . \quad (56)$$

a pour limite x^2-1.

D'après les Corollaires III et IV :

$$\frac{1}{1.2}(X_0+X_2)\frac{dX_1}{dx}+\frac{1}{2.3}(X_1+X_3)\frac{dX_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}(X_{n-1}+X_{n+1})\frac{dX_n}{dx}+\cdots=-1. \quad (57)$$

Transformant, comme ci-dessus, $\frac{dX_1}{dx}, \frac{dX_2}{dx}, \ldots, \frac{dX_n}{dx}$, on trouve, au lieu du premier membre,

$$\frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{1}{3}(X_0^2-X_2^2)+\frac{1}{5}(X_1^2-X_3^2)+\cdots+\frac{1}{2n+1}(X_{n-1}^2-X_{n+1}^2)+\cdots\right\};$$

etc.

(*) Formule (14).

(**) Le produit des racines égale $\frac{2n-1}{(n+1)(2n+3)}X_{n-1}[(2n+1)X_n-xX_{n-1}]$.

55. *Remarques.* — I. $x^2 - 1 = X_1^2 - 1$. Donc, si l'on transpose le terme $\frac{1}{3} X_0^2 = \frac{1}{3}$, le dernier théorème donne lieu à cette remarquable formule

$$\frac{1}{1.5} X_1^2 + \frac{1}{3.7} X_2^2 + \frac{1}{5.9} X_3^2 + \cdots = \frac{1}{3} \qquad (58)$$

II. Ce résultat, trouvé en supposant $x < 1$, subsiste pour $x = 1$.

En effet, la série

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{7.11} + \cdots$$

a pour limite $\frac{1}{3}$ (*).

III. Soit $x = 0$. La fonction X_n s'annule si n est *impair ;* et, si n est *pair*, elle devient $\pm \frac{1.3.5\ldots\overline{n-1}}{2.4.6\ldots n}$. Conséquemment,

$$\frac{1}{3.7}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{7.11}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{11.15}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{3} \qquad (59)$$

IV. D'après le Théorème IX, le premier membre de l'égalité (Z) tend vers $x^2 - 1$, quand n augmente indéfiniment. Ceci exige que l'autre partie du second membre tende vers zéro. Ainsi : x *étant compris entre* 0 *et* 1, *et* n *croissant indéfiniment, la fonction*

$$n(X_n^2 - X_{n-1}X_{n+1}) + (n+2)(X_{n+1}^2 - X_nX_{n+2})$$

a pour limite zéro (**).

56. Théorème X. x *étant plus petit que* 1, *on a*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx}\left[X_n\left(\frac{X_{n-1}}{n} + \frac{X_{n+1}}{n+1}\right)\right] = -1 \qquad (\Omega)$$

(*) Résultat connu, facile à vérifier.

(**) Cette propriété est loin d'être évidente. Il serait, peut-être, assez difficile de la démontrer *directement*.

De la formule

$$X_{n-1}^2 - X_n^2 = (1 - x^2)\frac{1}{n}\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx} \ (^*),$$

on tire

$$X_{n-1}^2 - X_{n+1}^2 = (1 - x^2)\left[\frac{1}{n}\frac{d(X_{n-1}X_n)}{dx} + \frac{1}{n+1}\frac{d(X_nX_{n+1})}{dx}\right].$$

Substituant dans la série (56), et supprimant le facteur $1 - x^2$ (**), on trouve la formule (Ω).

57. Corollaire

$$\sum_1^\infty \frac{X_n}{2n+1}\left(\frac{X_{n-1}}{n} + \frac{X_{n+1}}{n+1}\right) = -x \ (^{***}) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (60)$$

58. *Remarque.* Le premier membre est la même chose que

$$\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)X_1X_2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)X_2X_3 + \cdots$$

ou

$$\frac{1}{3}X_1 + \frac{4}{3 \cdot 5}X_1X_2 + \frac{4}{5 \cdot 7}X_2X_3 + \cdots$$

Le second membre $= - X_1$. Donc, si l'on transpose, et qu'on supprime le facteur 4, la formule (60) devient

$$\sum_1^\infty \frac{X_{n-1}X_n}{(2n-1)(2n+1)} = 0. \quad (x < 1) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (61)$$

Liége, 30 mars 1890.

(*) *Premier Mémoire*, p. 35.
(**) Ceci suppose x différent de ± 1.
(***) Cette formule est en défaut pour $x = 1$. Au contraire, si $x = 0$, elle est identique : tous les termes de la série sont nuls.

UNE RECTIFICATION.

On lit, dans le *Premier Mémoire* (p. 5) :

« L'équation (3), aux dérivées partielles, a pour intégrale générale

$$u=(x-z)\varphi\frac{x-z}{\sqrt{1-x^2}}.\text{ »}$$

Cette égalité, résultat d'une faute d'attention, doit être remplacée par celle-ci :

$$u(x-z)=\varphi\left(\frac{x-z}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

En effet, si l'on prend les dérivées partielles, on trouve :

$$(x-z)\frac{du}{dz}+u=\frac{1-xz}{(1-x^2)\frac{3}{2}}\varphi',$$

$$(x-z)\frac{du}{dz}-u=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\varphi';$$

et, par l'élimination de φ' :

$$\frac{(x-z)\dfrac{du}{dx}+u}{(x-z)\dfrac{du}{dz}-u}=-\frac{1-xz}{2-x^2},$$

ou

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}+(1-xz)\frac{du}{dz}=ux\ :$$

ce qui est l'équation (3).

ERRATUM.

Dans la valeur de $[q_3, q_2, q_1]$ (p. 16), on a imprimé $\frac{3}{22}$, au lieu de $\frac{3}{2^2}$.