NOUVELLES PROPRIÉTÉS

DES FONCTIONS X_n

(SUPPLÉMENT);

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 mars 1888.)

NOUVELLES PROPRIÉTÉS

DES FONCTIONS X_n.

XXI (*). THÉORÈME. — *Si les* $2p+1$ *inconnues* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *satisfont, de toutes les manières possibles, à la condition*

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda=n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

on a

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\sum X_\alpha X_\beta \ldots X_\lambda = \frac{d^p X_{n+p}}{dx^p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A')$$

Cette propriété, généralisation du Théorème IX (*premier Mémoire*), se démontre comme celui-ci.

Soit, en effet, *l'équation de définition :*

$$(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty X_n z^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Si l'on prend les dérivées d'ordre p, elle donne

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\, z^p (1-2zx+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{d^p X_n}{dx^p} z^n;$$

ou, en supposant $n \overline{>} p$:

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\,(1-2zx+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{d^p X_n}{dx^p} z^{n-p};$$

(*) Nous suivons l'ordre des paragraphes et des équations, adopté dans deux précédentes communications.

ou encore, en changeant n en $n + p$:

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}(1-2zx+z^2)^{-\frac{2p+1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d^pX_{n+p}}{dx^p} z^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Le premier membre égale

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}(X_0 + X_1z + X_2z^2 + \cdots + X_\lambda z^\lambda + \cdots)^{2p+1}.$$

Dans le développement de la puissance $2p + 1$, le coefficient de z^n est

$$\sum X_\alpha X_\beta \ldots X_\lambda\,;$$

etc.

XXII. *Une modification.* La formule

$$X_n = \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

dans laquelle le second membre est supposé *réduit à sa partie réelle* (*), peut être remplacée par celle-ci :

$$X_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^n\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{B}')$$

En effet, si l'on développe la puissance $n^{\text{ième}}$ de $x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi$, les termes contenant des puissances *impaires* de $\cos\varphi$ donneront des intégrales nulles; et les autres, des intégrales dont les éléments sont égaux, deux à deux; etc. (**).

XXIII. Problème. — *Évaluer* $\frac{d^qX_n}{dx^q}$.

On a, immédiatement,

$$\frac{d^qX_n}{dx^q} = \frac{2^n}{\pi} n(n-1)\ldots(n-q+1)\int_0^{\pi} \sin^{n+q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n-q}d\varphi \quad . \quad (\mathrm{C}')$$

(*) *Premier Mémoire*, p. 12.

(**) Cette formule (B′), que *j'aurais dû* trouver en 1875, me paraît bien préférable à celle de Jacobi. Malgré toutes mes recherches, j'ignore si elle est *nouvelle* (*mai* 1888).

XXIV. *Application.* — Si l'on prend $q = p$, et qu'on change n en $n + p$, on a

$$\frac{d^pX_{n+p}}{dx^p} = \frac{2^{n+p}}{\pi}(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)\int_0^{\pi} \sin^{n+2p}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi. \quad (22)$$

Telle est la valeur du second membre de l'égalité (A′).

XXV. *Remarque.* — On a aussi, par la formule (21) :

$$\frac{d^pX_{n+p}}{dx^p} = \frac{2^{n+p+1}}{\pi}(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2p}(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n d\varphi; \quad (23)$$

le second membre étant *réduit à sa partie réelle.*

XXVI. Théorème

$$1.3.5\dots\overline{2p-1}\int_{-1}^{+1} dx \sum X_\alpha X_\beta \dots X_\lambda = \left[\frac{d^{p-1}X_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{-1}^{+1} \quad \dots\dots \quad (D')$$

Si l'on multiplie par dx les deux membres de (A′), et qu'on intègre, on a la formule (D′).

XXVII. *Remarque.* — Si n est *impair*, les éléments de l'intégrale sont, deux à deux, égaux et de signes contraires. Par conséquent,

$$\left[\frac{d^{p-1}X_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{-1}^{+1} = 0; \quad \dots\dots\dots\dots \quad (24)$$

comme on le reconnaît directement (*).

XXVIII *suite.* — Si n est *pair*,

$$\left[\frac{d^{p-1}x_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{-1}^{+1} = 2\left[\frac{d^{p-1}x_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{(x=1)}.$$

(*) Tous les termes de la dérivée sont de même parité que $2 + p - (p-1) = n + 1$: cette dérivée est donc une fonction *paire*.

Or, si l'on prend la formule (23), en y changeant p en $p-1$, n en $n+1$, on a

$$\left[\frac{d^{p-1}x_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{(x=1)}=\frac{2^{n+p+1}}{\pi}(n+p)(n+p-1)\ldots(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2p-1}\varphi(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1}d\varphi\ ;$$

ou, par la formule de Moivre :

$$\left[\frac{d^{p-1}x_{n+p}}{dx^{p-1}}\right]_{(x=1)}=\frac{2^{n+p+1}}{\pi}(n+p)(n+p-1)\ldots(n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2p-1}\varphi\,.\cos(n+1)\varphi d\varphi. \quad (25)$$

Mais nous pouvons simplifier le second membre.

En effet,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n'}\varphi\cos(n'-2p')\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2^{n'+1}}C_{n',p'}\ (*);$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2p-1}\varphi\cos(n+1)\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2^{n+2p}}C_{n+2p-1,\,p-1}=\frac{\pi}{2^{n+2p}}\frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+p+1)};\quad (26)$$

puis, au lieu de la formule (24) :

$$\left[\frac{d^{p-1}X_{n+1}}{dx^{p-1}}\right]_{(x=1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+2)}\quad\ldots\ldots\ldots\quad (27)$$

La relation (D') devient donc finalement, si n est *pair*,

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\int_{-1}^{+1}dx\sum X_\alpha X_\beta\ldots X_\lambda=\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}\frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(p)\Gamma(n+2)}\quad\ldots\quad (E')$$

XXIX. *Application.* — Soient $p=1$, $n=4$. L'équation (18) est

$$\alpha+\beta+\gamma=4.$$

(*) *Premier Mémoire*, p. 14.

Si l'on néglige les solutions dans lesquelles on aurait :

$$\alpha > \beta + \gamma, \quad \text{ou} \quad \beta > \alpha + \gamma, \quad \text{ou} \quad \gamma > \alpha + \beta \ (^*);$$

on peut se contenter de prendre :

$$\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \gamma = 2;\quad \alpha = 2,\ \beta = 0,\ \gamma = 2;\quad \alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = 0;$$
$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 2;\quad \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 1;\quad \alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 1.$$

Dès lors, (E') se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} [3X_2^2 + 3X_1^2X_2]\,dx = 2;$$

c'est-à-dire, à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(3x^2-1)}{2}\frac{(3x^2-1)}{2}\,dx = \frac{1}{3};$$

ce qui est exact.

XXX. *Une sommation.* — Si l'on suppose les deux membres de (A') ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, le premier terme du second membre est (22)

$$\frac{2^{n+p+1}}{\pi}(n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2p}\varphi\, d\varphi,$$

ou (XXVIII) :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p}\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)}\,C_{2n+2p,\,n+p}\,x^n,$$

ou encore :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+p}\frac{\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)}\,x^n.$$

D'ailleurs, par la formule (21), le premier terme de X_n est

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}x^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi\, d\varphi,$$

(*) Les intégrales correspondantes sont nulles, en vertu d'un théorème de Jacobi.

ou

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n C_{2n,\,n}.$$

De même, les premiers termes de X_α, X_β, ... X_λ sont, respectivement :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha C_{2\alpha,\,\alpha},\quad \left(\frac{x}{2}\right)^\beta C_{2\beta,\,\beta},\quad \ldots\quad \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda C_{2\lambda,\,\lambda}.$$

Par conséquent, l'égalité (A′) donne celle-ci :

$$1.3.5\ldots\overline{2p-1}\sum C_{2\alpha,\,\alpha},\ C_{2\beta,\,\beta},\ \ldots\ C_{2\lambda,\,\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)};$$

ou, par une transformation connue (*),

$$\sum C_{2\alpha,\,\alpha},\ C_{2\beta},\ \ldots\ C_{2\lambda,\,\lambda} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma(n+p+1)};\quad \ldots\quad (F')$$

sommation annoncée.

XXXI. *Application.* — Soient $n=3$, $p=1$. Le second membre est

$$\frac{\Gamma(2)\Gamma(9)}{\Gamma(4)\Gamma(3)\Gamma(5)} = 140.$$

L'équation

$$\alpha+\beta+\gamma=3$$

admet les solutions suivantes :

$\alpha=3,\ \beta=0,\ \gamma=0;\quad \beta=3,\ \alpha=0,\ \gamma=0;\quad \gamma=3,\ \alpha=0,\ \beta=0;$
$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=0;\quad \alpha=2,\ \beta=0,\ \gamma=1;\quad \beta=2,\ \alpha=1,\ \gamma=0;$
$\beta=2,\ \gamma=1,\ \alpha=0;\quad \gamma=2,\ \alpha=1,\ \beta=0;\quad \gamma=2,\ \beta=1,\ \alpha=0;$
$\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1.$

Donc le premier membre de (E′) a pour valeur (**) :

$$3C_{6,3} + 6C_{4,2}\,.\,C_{2,1} + [C_{2,1}]^3 = 3\,.\,20 + 6\,.\,6\,.\,2 + 8 = 140.$$

(*) $2.6.10\ldots\overline{4p-2} = (p+1)(p+2)\ldots 2p = \dfrac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)}.$

(**) On doit supposer $C_{0,0}=1$.

XXXII. *Remarque.* — En opérant d'une manière un peu différente, on trouve

$$\sum C_{2\alpha,\alpha},\ C_{2\beta,\beta},\ \ldots\ C_{2\lambda,\lambda} = \frac{(4p+2)(4p+6)\ldots(4p+4n-2)}{1.2.3\ldots\ldots n} \quad . \ . \ . \quad (G')$$

Ainsi :

1° $$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+2p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p+1)\Gamma(n+p+1)} = \frac{(4p+2)(4p+6)\ldots(4p+4n-2)}{1.2.3\ldots\ldots n}; \ . \quad (27)$$

2° *Le produit de* n *termes consécutifs, de la progression*

$$2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \ldots$$

est divisible par le produit des n *premiers nombres entiers* (*).

XXXIII. *Autres remarques.* — 1° *Le nombre entier*

$$N = \frac{(4p+2)(4p+6)\ldots(4p+4n-2)}{1.2\ldots\ldots n}$$

est pair.

Dans le numérateur, composé de n facteurs, chacun d'eux est le *double d'un nombre impair ;* donc ce numérateur contient n fois le facteur 2.

Dans le dénominateur, le facteur 2 entre un nombre de fois marqué par

$$\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{8}\right) + \cdots$$

Or, cette somme est inférieure à n (**).

2° *Si* n *est la somme de* k *puissances de 2, le quotient de* N, *par* 2^k, *est impair* (***).

(*) On a ainsi une solution (particulière) du problème suivant, peut-être bien difficile à résoudre généralement :

Pour quelles valeurs entières de a *et de* b *le produit*

$$(a+b)(a+2b)\ldots(a+\overline{n-1}b)$$

est-il divisible par le produit des n *premiers nombres entiers ?*

(**) *Mémoire sur certaines décompositions en carrés*, p. 64.

(***) *Loc. cit.*

XXXIV. Théorème. — *Le rapport des intégrales*

$$\int_0^{\pi} \sin^{n-q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n+q}d\varphi, \quad \int_0^{\pi} \sin^{n+q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n-q}d\varphi$$

est égal à $(x^2 - 1)^q$.

A cause de

$$X_n = k\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \text{ (*)},$$

la relation (B′) équivaut à

$$\frac{d^{n+q}(x^2-1)^n}{dx^{n+q}} = A\int_0^{\pi} \sin^{n+q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n-q}d\varphi;$$

A étant indépendant de x.

De même,

$$\frac{d^{n-q}(x^2-1)^n}{dx^{n-q}} = B\int_0^{\pi} \sin^{n-q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n+q}d\varphi.$$

D'après un théorème démontré dans le dernier petit Mémoire (**),

$$\frac{\int_0^{\pi} \sin^{n-q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n+q}d\varphi}{\int_0^{\pi} \sin^{n+q}\varphi(x\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^{n-q}d\varphi} = C(x^2-1)^q.$$

Mais, dans chacun des termes de la fraction, le coefficient de la plus haute puissance de x est $\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi$; donc $C = 1$; etc.

XXXV. Corollaire. — *La partie réelle de*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{2n}d\varphi$$

(*) Formule de Rodrigues.

(**) Page 9.

égale

$$(x^2-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varphi d\varphi.$$

XXXVI. *Suite.* — Cette partie réelle, développée, devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\left[x^{2n}\cos^{2n}\varphi - C_{2n,2}x^{2n-2}\cos^{2n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_{2n,4}x^{2n-4}\cos^{2n-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots\right],$$

ou

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{2n,2\lambda}x^{2n-2\lambda}(-1)^\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2\lambda}\varphi\sin^{2\lambda}\varphi d\varphi;$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{2n,2\lambda}x^{2n-2\lambda}(-1)^\lambda\frac{\Gamma\left(n-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)}.$$

L'intégrale qui multiplie $(x^2-1)^n$ a pour valeur

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)}.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{2n,2\lambda}x^{2n-2\lambda}(-1)^\lambda\Gamma\left(n-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) &= (x^2-1)^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} C_{n,\lambda}x^{2n-2\lambda}(-1)^\lambda;\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

et, en identifiant :

$$C_{2n,2\lambda}\Gamma\left(n-\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) = C_{n,\lambda}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ (*) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G')$$

(*) Pour vérifier cette égalité, il suffit d'appliquer la formule de Legendre.

XXXVII. Théorèmes d'arithmétique. — 1° *Les nombres entiers*

$$C_{2n, 2p}, \quad C_{n, p}$$

contiennent, un même nombre de fois, le facteur 2 (*).

2° *Si* n + 1 *est un nombre premier, supérieur à* 2p — 1, *on a*

$$\sum C_{2\alpha, \alpha}, \ C_{2\beta, \beta}, \ldots C_{2\lambda, \lambda} = \mathfrak{M}(n+1) \ (^{**}) \ldots \ldots \ldots \ (\mathrm{H}')$$

XXXVIII. Problème (***). — *Trouver*

$$S = \sum_0^{\infty} C_{kn, n} x^n \ (^{\mathrm{IV}}) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ (29)$$

On a (XXVI)

$$C_{kn, n} = \frac{2}{\pi} 2^{kn} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{kn}\varphi \cos(kn - 2n)\varphi d\varphi ;$$

donc

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sum_0^{\infty} 2^{kn} x^n \cos^{kn}\varphi \cos(kn - 2n)\varphi \ \ldots \ldots \ldots \ (30)$$

La somme de la nouvelle série, que nous représenterons par Σ (V), est la partie réelle de

$$\frac{1}{1 - 2^k x \cos^k\varphi e^{(k-2)\varphi\sqrt{-1}}} = \frac{1 - 2^k x \cos^k\varphi e^{-(k-2)\varphi\sqrt{-1}}}{1 - 2^{k+1} x \cos^k\varphi \cos(k-2)\varphi + 4^k x^2 \cos^{2k}\varphi}.$$

(*) La démonstration *directe* est fort simple. Il en est de même pour cette généralisation remarquable, qui m'a été communiquée par M. Neuberg, mon savant Collègue :

q *étant premier, les quantités*

$$C_{nq, pq}, \quad C_{n, p}$$

contiennent, un même nombre de fois, le facteur q.

(**) Ce que nous venons de dire s'applique à ce second théorème. Si l'on emploie la relation (E'), on reconnaît aisément que le second membre est divisible par $n + 1$.

(***) Suggéré par ce qui précède.

(IV) On verra, plus loin, quelles sont les conditions de convergence, pour $k=1$, $k=2$, $k=3$.

(V) Si l'on suppose $2^k x > 1$, cette série est divergente ou indéterminée. Si $2^k x = 1$, elle se réduit à

$$1 + \cos^k\varphi \cos(k-2)\varphi + \cos^{2k}\varphi \cos(2k-4)\varphi + \cos^{3k}\varphi \cos(3k-6)\varphi + \cdots$$

Convergente pour $\varphi > 0$, celle-ci devient divergente quand $\varphi = 0$. Nous devrons donc, dans ce qui suit, prendre $x < \frac{1}{2^k}$.

Ainsi

$$\sum = \frac{1 - 2^k x \cos^k\varphi \cos(k-2)\varphi}{1 - 2^{k+1} x \cos^k\varphi \cos(k-2)\varphi + 4^k x^2 \cos^{2k}\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

XXXIX. *Discussion.* — 1° $k = 1$. Alors

$$\sum = \frac{\sin^2\varphi + (1-2x)\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi + (1-2x)^2\cos^2\varphi};$$

puis

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi + (1-2x)\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi + (1-2x)^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

On sait que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a(a+b)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{b(a+b)}.$$

Donc

$$S = \frac{1}{1-x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

La condition de convergence (*) est, comme on vient de le voir, $x < 1$.

2° $k = 2$. La formule (31) donne

$$\sum = \frac{1 - 4x\cos^2\varphi}{1 - 8x\cos^2\varphi + 16x^2\cos^4\varphi} = \frac{1}{1 - 4x\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi + (1-4x)\cos^2\varphi}.$$

Conséquemment,

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \left(x < \frac{1}{4}\right) (^{**}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

(*) Évidente *a priori*.

(**) Lorsque $k = 2$, la série considérée est

$$S = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

Or :

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{2}.4, \quad \frac{3.4}{1.2} = \frac{1.3}{2.4}4^2, \quad \frac{4.5.6}{1.2.3} = \frac{1.3.5}{2.4.6}4^3, \ldots$$

Ainsi :

$$S = 1 + \frac{1}{2}(4x) + \frac{1.3}{2.4}(4x)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}(4x)^3 + \cdots;$$

et cette nouvelle série, quand elle est convergente, est le développement de $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$; etc.

3° $k = 3$. On a

$$\sum = \frac{1 - 8x\cos^4\varphi}{1 - 16x\cos^4\varphi + 64x^2\cos^6\varphi};$$

ou, en faisant $8x = z$:

$$\sum = \frac{1 - z\cos^4\varphi}{1 - 2z\cos^4\varphi + z^2\cos^6\varphi} \qquad (34)$$

Donc

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - z\cos^4\varphi}{1 - 2z\cos^4\varphi + z^2\cos^6\varphi}\,d\varphi; \qquad (35)$$

expression sur laquelle nous allons revenir.

XL. *Suite.* — k étant égal à 3, la formule (29) devient

$$S = 1 + \frac{3}{1}x + \frac{6.5}{1.2}x^2 + \frac{9.8\,7}{1.2.3}x^3 + \cdots \qquad (36)$$

De

$$u_{n+1} = C_{3n,\,n}\,x^n, \qquad (37)$$

on déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}\,\frac{(3n-1)(3n-2)}{n(2n-1)}\,x; \qquad (38)$$

puis, n croissant indéfiniment,

$$lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{27}{4}\,x.$$

Par conséquent, *la série* (36) *est convergente pour* $x < \frac{4}{27}$ (*). Mais, dans la formule (35), on doit prendre $z < 1$.

Soit, par exemple, $z = \frac{3}{8}$, auquel cas

$$S = \frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 - 3\cos^4\varphi}{64 - 48\cos^4\varphi + 9\cos^6\varphi}\,d\varphi = \frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 - 3\cos^4\varphi}{(4 - 3\cos^2\varphi)(16 + 12\cos^2\varphi - 3\cos^4\varphi)}\,d\varphi.$$

(*) Lorsque $x = \frac{4}{27}$, *il y a doute.* Mais la règle connue (*Traité élémentaire des séries*, p. 23), prouve qu'alors *la série est divergente.*

Si l'on fait, suivant l'usage, $tg\varphi = t$, on trouve

$$S = \frac{16}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{8t^4 + 16t^2 + 5}{(4t^2 + 1)(16t^4 + 44t^2 + 25)}\,dt,$$

ou

$$S = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{8t^4 + 16t^2 + 5}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)(t^2 + \gamma^2)}.$$

Dans cette formule :

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = \frac{11}{4}, \quad \beta^2\gamma^2 = \frac{25}{16};$$

puis :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta + \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{21}, \quad \beta\gamma = \frac{5}{4}.$$

On a ensuite (*) :

$$\int_0^{\infty} \frac{8t^4 + 16t^2 + 5}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)(t^2 + \gamma^2)}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{5(\alpha + \beta + \gamma) + 16\alpha\beta\gamma + 8\alpha\beta\gamma\left[\alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma\right]}{\alpha\beta\gamma(\beta + \gamma)\left[\alpha^2 + (\beta + \gamma)\alpha + \beta\gamma\right]}$$
$$= \frac{8\pi}{35}(7 + 3\sqrt{21});$$

et, finalement :

$$S = \frac{2}{35}(7 + 3\sqrt{21}) = 1,185\,583\ldots$$

Telle est la somme de la série

$$1 + \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{64} + \frac{6.5}{1.2}\left(\frac{3}{64}\right)^2 + \frac{9.8.7}{1.2.3}\left(\frac{3}{64}\right)^3 + \cdots \quad (^{**})$$

(*) Poisson, *Journal de Liouville,* tome II, p. 225.

(**) En essayant une vérification, je trouve, comme somme des *six* premiers termes :

$$1 + 0,140\,479 + 0,032\,959 + 0,008\,650 + 0,002\,590 + 0,000\,142;$$

savoir : 1,184 620. Cette valeur diffère, de S, de moins de 0,001. Ainsi, la série proposée est très convergente.

XLI. *Une intégrale double.* — Dans le *second* (*) *Mémoire sur les fonctions* X_n, nous avons démontré ce théorème (**) : n *étant impair, et* Θ_n *représentant ce que devient* X_n *quand on y remplace* x *par* $\cos\theta$, *on a :*

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \Theta_n \left[\frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n+1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right] d\theta \text{ (***)} \quad \ldots \quad (39)$$

La formule

$$X_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi \sin^n\varphi(\cos\alpha\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi \quad \ldots \quad (B')$$

donne

$$\Theta_n = \frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi \sin^n\varphi(\cos\theta\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi. \quad \ldots \quad (40)$$

Par conséquent, la relation (39) est transformée en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^n\varphi(\cos\theta\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n \left[\frac{\sin(n+1)(\theta+\alpha)}{\sin(\theta+\alpha)} + \frac{\sin(n+1)(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}\right] d\varphi d\theta \\ = 2\pi\int_0^\pi \sin^n\varphi(\cos\alpha\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n d\varphi,\end{aligned}\right\} (41)$$

qu'il serait, peut-être, difficile de vérifier (IV).

XLII. *Développement de* $X_{2n} - X_{4n}$. On sait que

$$X_{2n} = \frac{1}{4^n}\sum_{q=0} (-1)^p C_{2n,p} \cdot C_{4n-2p,2n} x^{2n-2p} \text{ (V)} \quad \ldots \quad (42)$$

(*) Devenu le *deuxième.*

(**) Page 66.

(***) On ne doit pas oublier que $x = \cos\alpha$.

(IV) Si, dans le premier membre, on suppose effectuée l'intégration relative à θ, il prend la forme $\int_0^\pi \sin^n\varphi f(\varphi)d\varphi$. Est-il sûr que la fonction $f(\varphi)$ soit égale à

$$2\pi(\cos\alpha\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)^n \;?$$

Je ne le pense pas. Néanmoins, l'*identification* réussit quand $n = 1$.

(V) *Premier Mémoire*, p. 11.

Donc, par le changement de p en $n - q$:

$$X_{2n}=\frac{1}{4^n}\sum_{q=0}^{q=n}(-1)^{n-q}C_{2n,\,n-q}\,.\,C_{2n+2q,2q}x^{2q}\,,\qquad X_{4n}=\frac{1}{16^n}\sum_{q=0}^{q=2n}(-1)^{2n-q}C_{4n,\,2n-q}\,.\,C_{4n+2q,\,2q}x^{2q}. \quad (43)$$

On conclut, de ces valeurs,

$$16^n(X_{2n} - X_{4n}) = \sum_{q=0}^{q=2n} N_{2q}x^{2q}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

en posant

$$N_{2q} = (-1)^{q+1}\left[4^n C_{2n,\,n-q}\,.\,C_{2n+2q,\,2q} \pm C_{4n,\,2n-q}\,.\,C_{4n+2q,\,2q}\right]; \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

selon que n est *impair* ou *pair*.

La quantité entre parenthèses, développée, est

$$4^n\frac{2n(2n-1)\ldots(n+q+1)}{1.2\ldots(n-q)}\times\frac{(2n+2q)\ldots(2n+1)}{1.2\ldots2q}$$
$$\pm\frac{4n(4n-1)\ldots(2n+q+1)}{1.2\ldots(2n-q)}\times\frac{(4n+2q)\ldots(4n+1)}{1.2\ldots2q},$$

ou

$$\frac{1}{1.2\ldots2q}\left[4^n\frac{(n+q+1)(n+q+2)\ldots(2n+2q)}{1.2\ldots(n-q)}\pm\frac{(2n+q+1)(2n+q+2)\ldots(4n+2q)}{1.2\ldots(2n-q)}\right].$$

Les deux numérateurs sont divisibles par

$$(2n+q+1)(2n+q+2)\ldots(2n+2q).$$

Ainsi

$$N_{2q} = (-1)^{q+1}\frac{(2n+q+1)(2n+q+2)\ldots(2n+2q)}{1.2\ldots2q}$$
$$\times\left[4^n\frac{(n+q+1)\ldots(2n+q)}{1.2\ldots(n-q)}\pm\frac{(2n+2q+1)\ldots(4n+2q)}{1.2\ldots(2n-q)}\right],$$

ou

$$N_{2q} = (-1)^{q+1}\frac{(2n+q+1)\ldots(2n+2q)}{1.2\ldots2q\times1.2\ldots(2n-q)}H_{2q}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

pourvu que l'on fasse

$$H_{2q}=4^n(n+q+1)\ldots(2n+q)\times(n-q+1)(n-q+2)\ldots(2n-q)\pm(2n+2q+1)\ldots(4n+2q). \quad (47)$$

Dans le dernier produit, les facteurs *pairs* sont :

$$2n+2q+2=2(n+q+1),\quad 2n+2q+4=2(n+q+2),\quad \ldots\quad 4n+2q=2(2n+q)$$

De plus, il y en a n. Donc

$$\left.\begin{array}{l} H_{2q}=2^n(n+q+1)(n+q+2)\ldots(2n+q) \\ \times\left[(2n-2q+2)(2n-2q+4)\ldots(4n-2q)\pm(2n+2q+1)(2n+2q+3)\ldots(4n+2q-1)\right] \end{array}\right\}; \quad (48)$$

puis

$$\left.\begin{array}{l} N_{2q}=(-1)^{q+1}2^n\dfrac{(n+q+1)\ldots(2n+2q)}{1.2\ldots 2q\times 1.2\ldots(2n-q)} \\ \times\left[(2n-2q+2)(2n-2q+4)\ldots(4n-2q)\pm(2n+2q+1)(2n+2q+3)\ldots(4n+2q-1)\right] \end{array}\right\} \quad (49)$$

XLIII. Lemme. — *Soient* a, b, c *des nombres entiers, et*

$$N=(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)\pm(b+c)(b+2c)\ldots(b+nc)\ (^*).$$

On a

$$N=\mathfrak{M}\left[a+b+(n+1)c\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

En effet, la seconde partie de N peut être mise sous la forme :

$$\pm\left[a+b+(n+1)c-(a+nc)\right]\left[a+b+(n+1)c-(a+\overline{n-1}c)\right]\ldots\left[a+b+(n+1)c-(a+c)\right].$$

Donc

$$N=(a+c)(a+2c)\ldots(a+nc)\pm\mathfrak{M}\left[a+b+(n+1)c\right]-(a+nc)(a+\overline{n-1}c)\ldots(a+c);$$

etc. (**).

(*) On prend le signe +, si n est *impair*.

(**) La fonction N, rencontrée par hasard, suggère les questions suivantes :

1° *Discuter les cônes dont l'équation est*

$$(x+z)(x+2z)\ldots(x+nz)=(y+z)(y+2z)\ldots(y+nz);$$

2° *Discuter les lignes représentées par*

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n)=(y-1)(y-2)\ldots(y-n);$$

etc.

XLIV. *Application.* — Soient :

$$a + c = 2n - 2q + 2, \quad b + c = 2n + 2q + 1, \quad c = 2.$$

Alors, dans la formule (49), *le dernier facteur est divisible par* $6n + 1$.

XLV. *Remarque.* — D'après la *première* valeur de X_{2n} (43), *le coefficient* N_{2q} *est entier. Si donc* $6n + 1$ *est un nombre premier,*

$$N_{2q} = \mathcal{M}\,(6n + 1) \ (^*).$$

XLVI. *Vérification.* — Soit $n = 3$, auquel cas $6n + 1 = 19$. On a, par la formule (45) :

$$N_0 = -\left[64 \,.\, C_{6,5} + C_{12,6}\right] = -\left[64 \,.\, 20 + 924\right] = -2\,204 = -19 \,.\, 116,$$
$$N_2 = 64 \,.\, C_{6,2} \,.\, C_{8,2} + C_{12,5} \,.\, C_{14,2} = 64 \,.\, 15 \,.\, 28 + 792 \,.\, 91 = 98\,952 = 19 \,.\, 5\,208,$$
$$N_4 = -\left[64 \,.\, C_{6,1} \,.\, C_{10,4} + C_{12,4} \,.\, C_{16,4}\right] = -\left[64 \,.\, 6 \,.\, 210 + 495 \,.\, 1\,820\right] = -981\,540 = -19 \,.\, 51\,660,$$
$$N_6 = 64 \,.\, C_{12,6} + C_{12,3} \,.\, C_{18,6} = 64 \,.\, 9 \,.\, 4 + 220 \,.\, 18\,564 = 4\,143\,216 = 19 \,.\, 218\,064,$$
$$N_8 = -C_{12,2} \,.\, C_{20,8} = -66 \,.\, 125\,970 = -19 \,.\, 437\,580,$$
$$N_{10} = C_{12,1} \,.\, C_{22,10} = 12 \,.\, 22 \,.\, 7 \,.\, 19 \,.\, 17 \,.\, 13 = 19 \,.\, 408\,408,$$
$$N_{12} = -C_{24,12} = -14 \,.\, 19 \,.\, 17 \,.\, 13 \,.\, 46 = -19 \,.\, 142\,524.$$

XLVII. *Recherche d'un quotient.* — Reprenons l'égalité

$$16^n (X_{2n} - X_{4n}) = N_0 + N_2 x^2 + N_4 x^4 + \cdots + N_{4n} x^{4n}. \qquad (44)$$

Il en résulte :

$$16^n \frac{X_{2n} - X_{4n}}{1 - x^2} = \begin{array}{l|l|l|l} N_0 + N_0 & x^2 + N_0 & x^2 + \cdots + N_0 & x^{4n-2} \\ \quad + N_2 & \quad + N_2 & \qquad + N_2 & \\ & \quad + N_4 & \qquad \ldots & \\ & & \qquad + N_{4n-2} & \end{array} \qquad (51)$$

(*) En effet, ce nombre premier surpasse les facteurs $2q$ et $2n - q$, du dénominateur.

Lorsque $x=1$, la vraie valeur de la fraction est

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX_{2n}}{dx}\right)-\left(\frac{dX_{4n}}{dx}\right)\right]_{(x=1)};$$

c'est-à-dire (*) :

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{4n(4n+1)}{2}\right]=\frac{1}{2}n(6n+1).$$

D'un autre côté, le dernier terme du quotient cherché doit être $-N_{4n}x^{4n-2}$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

XLVIII. Théorème. — *Les coefficients* $N_0, N_2, \ldots N_{4n}$ *satisfont aux relations*

$$(2n)N_0+(2n-1)N_2+\cdots+N_{4n-2}=\frac{1}{2}16^n\,.\,n(6n+1), \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

$$N_0+N_2+N_4+\cdots+N_{4n}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

XLIX. *Vérification.* — Lorsque $n=3$, la première égalité devient, après suppression du facteur 19 :

$$-116\,.\,6+5\,208\,.\,5-51\,660\,.\,4+218\,064\,.\,3-437\,580\,.\,2+408\,408=\frac{3}{2}16^3;$$

ce qui est exact.

De même, la seconde se réduit à

$$-116+5\,208-51\,660+218\,064-437\,580+408\,408-142\,324=0,$$

ou

$$-631\,680+631\,680=0.$$

L. Lemme. — *Soit* f(x) *un polynôme entier, du degré* m. *Si l'équation* f(x) = 0 *a toutes ses racines réelles, l'équation* $f'^2-ff''=0$ *a toutes ses racines imaginaires* (**).

(*) *Premier Mémoire*, p. 19.

(**) Propriété presque évidente. Dans le tome III des *Mélanges mathématiques*, nous y reviendrons.

LI. Corollaire. — *L'équation*

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 - X_n \frac{d^2X_n}{dx} = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

dont le degré est $2n-2$, *n'a aucune racine réelle.*

Soit, par exemple, $n = 4$, auquel cas :

$$X_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad X' = \frac{20}{8}(7x^3 - 3x), \qquad X'' = \frac{60}{8}(7x^2 - 1).$$

L'équation (54) devient

$$20(7x^3 - 3x)^2 - 3(35x^4 - 30x^2 + 3)(7x^2 - 1) = 0\,,$$

ou

$$245x^6 - 105x^4 + 27x^2 + 9 = 0\,;$$

et les racines de celle-ci sont imaginaires.

LII. *Intégrale définie remarquable.* — Dans nos précédentes recherches sur les fonctions X_n, nous avons omis de mettre, sous forme d'intégrale définie, la quantité $u = (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, *fonction génératrice* de X_n. Le problème est facile à résoudre.

En effet, si l'on écrit, par exemple,

$$X_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x, \theta)\, d\theta\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

on aura, par la sommation de la série

$$\left.\begin{aligned} &f_0(x, \theta) + zf_1(x, \theta) + z^2 f_2(x, \theta) + \cdots\,, \\ &u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S\,d\theta\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

S désignant la somme dont il s'agit. Seulement, la quantité $f_n(x, \theta)$ doit être convenablement choisie.

La solution la plus simple résulte, croyons-nous, de la formule

$$X_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi)^n (x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n\, d\varphi\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (21)$$

dont nous avons déjà montré l'utilité.

Soit donc, en négligeant le facteur $\frac{2}{\pi}$,

$$S = 1 + 2z\cos\varphi(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + (2z\cos\varphi)^2(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^2 + \cdots;$$

le second membre étant, bien entendu, réduit à sa partie réelle.

Opérant comme nous l'avons fait ci-dessus (XXXVI), on trouve

$$S = \frac{1}{1 - 2z\cos\varphi(x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)} = \frac{1 - 2zx\cos^2\varphi}{(1 - 2zx\cos^2\varphi)^2 + 4z^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi};$$

puis, au lieu de la formule (56) :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2zx\cos^2\varphi}{(1 - 2zx\cos^2\varphi)^2 + 4z^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\, d\varphi\,,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2zx\cos^2\varphi}{1 + 4(z - x)z\cos^2\varphi + 4z^2(x^2 - 1)\cos^4\varphi}\, d\varphi \quad . \quad . \qquad (K')$$

Voici donc une intégrale définie qui satisfait à la question proposée (*). Comme elle contient deux paramètres, on pourra, si l'on veut, en déduire des séries d'autres intégrales, plus ou moins remarquables.

(*) La formule de Jacobi réussit moins bien. Il en est de même, à peu près, pour l'expression de X_n, donnée à la page 13 du *premier Mémoire*.

Dans la *Théorie des fonctions sphériques*, du regretté Heine, on trouve (T. I, p. 36), cette autre formule, plus simple que (K') :

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{zx - z\cos\varphi\sqrt{x^2 - 1} - 1}\,.$$

Tout récemment, M. Hermite m'en a donné une démonstration simple et élégante.

LIII. *Vérification.* — L'intégrale considérée est la même chose que

$$H=\int_0^{\infty}\frac{t^2+1-2zx}{(t^2+1)^2+4(z-x)(t^2+1)z+4z^2(x^2-1)}dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Si l'on suppose le dénominateur décomposé en $(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)$, on a :

$$\alpha^2+\beta^2=2+4(z-x)z,\qquad \alpha^2\beta^2=1+4(z-x)z^2+4z^2(x^2-1)=(1-2zx)^2;$$

puis :

$$\alpha\beta=1-2zx,\qquad \alpha+\beta=2\sqrt{1-2zx+z^2}.$$

La fraction étant remplacée par

$$\frac{A}{t^2+\alpha^2}+\frac{B}{t^2+\beta^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

on trouve, après une réduction facile :

$$A=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\qquad B=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Mais, évidemment,

$$H=\frac{\pi}{2}\left(\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}\right)=\frac{\pi}{\alpha+\beta}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-2zx+z^2}}.$$

Donc le second membre de (K') égale $\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}$.

LIV. *Autre intégrale définie.* — Au moyen des abréviations précédentes, la formule (57) se réduit à

$$H=\int_0^{\infty}\frac{t^2+\alpha\beta}{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}dt.$$

Par conséquent,

$$\frac{\pi}{\alpha+\beta}=\int_0^{\infty}\frac{t^2+\alpha\beta}{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (L')$$

Cette formule, presque évidente, en rappelle une autre, bien connue :

$$\frac{1}{\alpha + \beta} = \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)x} dx .$$

LV. *Remarque.* — La relation (L') suppose $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Si l'on faisait d'autres hypothèses sur ces paramètres, on s'exposerait à de graves erreurs. Soit, par exemple, $\beta = 0$. On trouve

$$\frac{\pi}{\alpha} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \alpha^2};$$

ce qui est *faux*. De même, pour $\beta = -\alpha$, l'égalité (L') devient

$$\frac{\pi}{0} = \int_0^\infty \frac{t^2 - \alpha^2}{(t^2 + \alpha^2)^2} dt ;$$

etc. La raison de ces *irrégularités* est facile à saisir : dans les expressions (57) et suivantes, 1° la fraction $\frac{t^2 + \alpha\beta}{(t^2 + \alpha^2)(t^2 + \beta^2)}$ a été supposée irréductible ; 2° β^2 a été supposé différent de α^2.

P. S. En terminant, je m'aperçois que la formule (K') donne lieu à une foule de *nouvelles* questions. Le lecteur pourra se les poser ; et, peut-être, en résoudre quelques-unes. Qu'il me permette de quitter un sujet sur lequel, depuis douze ans, j'ai publié bon nombre de travaux.

Liége, 29 février 1888.