NOUVELLES PROPRIÉTÉS

DES FONCTIONS X_n;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 décembre 1887.)

NOUVELLES PROPRIÉTÉS

DES FONCTIONS X_n (*).

I. *Première propriété.* — Soit

$$S_p = 1 - \frac{2}{3}C_{p,1} + \frac{2^2}{5}C_{p,2} - \cdots \pm \frac{2^p}{2p+1}; \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

ou, par une sommation facile,

$$S_p = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Si l'on fait $x = \sin\varphi$, on trouve

$$S_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p 2\varphi \, . \cos\varphi d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Cette intégrale est celle qui entre dans la formule (F) (**). Donc

$$\int_0^1 x^p(X_p + X_{p-2} + \cdots)\, dx = \int_0^1 (1 - 2x^2)^p dx \quad \ldots \ldots \quad (A)$$

II. *Deuxième propriété.* — L'intégration par parties, effectuée sur l'égalité (2), donne aisément

$$(2p + 1)S_p - 2pS_{p-1} = (-1)^p \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

En conséquence :

$$\int_0^1 \left[(2p + 1)x^p(X_p + X_{p-2} + \cdots) - 2px^{p-1}(X_{p-1} + X_{p-3} + \cdots)\right] dx = (-1)^p \quad . \quad (B)$$

(*) Addition à la *Seconde Note sur les fonctions* X_n (Académie de Belgique, août 1886).
(**) *Seconde Note sur les fonctions* X_n, p. 9.

III. *Troisième propriété.* — Si, dans l'équation (4), on change p en $p-1$, $p-2, \ldots, 1$, on trouve, par addition,

$$(2p+1)S_p = S_{p-1} + S_{p-2} + \cdots + S_0 + \frac{1}{0}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

selon que p est *pair* ou *impair* (*). Par suite,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 \Big[(2p+1)x^p(X_p + X_{p-2} + \cdots) - x^{p-1}(X_{p-1} + X_{p-3} + \cdots)\\ &- x^{p-2}(X_{p-2} + X_{p-4} + \cdots) - \cdots - X_0\Big]dx = \textit{un ou zéro } (^{**}).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (C)$$

IV. *Suite.* — La relation (5) équivaut à

$$\int_0^1 \left[(2p+1)(1-2x^2)^p - (1-2x^2)^{p-1} - \cdots - (1-2x^2) - 1\right]dx = \frac{1}{0}.$$

Dans la parenthèse, la partie négative égale $\frac{(1-2x^2)^p - 1}{(1-2x^2)-1}$. Si donc la différentielle est représentée par $F(x)dx$, on a

$$F(x) = \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{-2x^2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

La fraction est la dérivée de $\frac{1-(1-2x^2)^{p+1}}{2x}$. Par conséquent :

$$\int_0^x \frac{(2p+1)(1-2x^2)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2}dx = \frac{(1-2x^2)^{p+1} - 1}{x} \quad \ldots \quad (D)$$

$$\int_0^1 \frac{(2p+1)(1-2x^p)^{p+1} - 2(p+1)(1-2x^2)^p + 1}{x^2}dx = (-1)^{p+1} - 1 \quad \ldots \quad (E)$$

V. *Autres intégrales.* — Faisons, comme précédemment, $x = \sin\varphi$. Nous aurons :

$$\int_0^\varphi \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = \frac{\cos^{p+1}2\varphi - 1}{\sin\varphi}, \quad \ldots \quad (D')$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+1)\cos^{p+1}2\varphi - 2(p+1)\cos^p 2\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi = (-1)^{p+1} - 1. \quad \ldots \quad (E')$$

(*) A cause de $S_0 = 1$.
(**) On arrive au même résultat en faisant varier p dans l'égalité (B).

VI. *Remarques.* — 1° Le second membre de (E′) ne change pas, quand on y remplace p par $p+2$. Conséquemment,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2p+5)\cos^3 2\varphi - (2p+6)\cos^2 2\varphi - (2p+1)\cos 2\varphi + 2p+2}{\sin^2\varphi} \cos^p 2\varphi \,.\, \cos\varphi d\varphi = 0.$$

Le numérateur est divisible par $1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$. Donc, sous une forme plus simple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2p+2+\cos^2\varphi - (2p+5)\cos^2 2\varphi\right] \cos^p 2\varphi \,.\, \cos\varphi d\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{F})$$

2° Cette égalité est une conséquence des formules (3), (4). On peut l'écrire ainsi :

$$\int_0^1 \left[1 - (4p+9)x^2 + (4p+10)x^4\right](1-2x^2)^p dx = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{G})$$

VII. *Généralisations.* — 1° Soit

$$\int_0^x \left[1 - (4p+9)x^2 + (4p+10)x^4\right](1-2x^2)^p dx = f(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Le polynôme $f(x)$ a une valeur fort simple. En effet, la quantité entre parenthèses équivaut à

$$(1-2x^2)(1-5x^2) - 4(p+1)(x^2-x^4).$$

Donc

$$f'(x) = (1-2x^2)^{p+1}(1-3x^2) - 4(p+1)(1-2x^2)^p(x^2-x^4); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

puis

$$f(x) = (1-2x^2)^{p+1}(x-x^3),$$

ou bien

$$\int_0^x \left[1 - (4p+9)x^2 + (4p+10)x^4\right](1-2x^2)^p dx = (1-2x^2)^{p+1}(x-x^3) \,. \quad . \quad (\mathrm{H})$$

2° La formule (4) donne, semblablement,

$$\int^x (1-2x^2)^{p-1}\left[1 - 2(2p+1)x^2\right] dx = (1-2x^2)^p x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{K})$$

VIII. *Relation combinatoire.* — Dans $f'(x)$, le coefficient de x^{2k} est

$$(-2)^k C_{p,k} - (4p+9)(-2)^{k-1} C_{p,k-1} + (4p+10)(-2)^{k-2} C_{p,k-2};$$

ou

$$-(-2)^{k-1}\left[2C_{p,k} + (4p+9)\,C_{p,k-1} + (2p+5)\,C_{p,k-2}\right].$$

Dans $f(x)$, le coefficient de x^{2k+1} est

$$-(-2)^{k-1}\left[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}\right].$$

Par conséquent,

$$2C_{p,k} + (4p+9)\,C_{p,k-1} + (2p+5)\,C_{p,k-2} = \mathfrak{M}(2k+1) \text{ (*)} \quad \ldots \ldots \quad \text{(L)}$$

Soient, par exemple, $p = 5$, $k = 3$. On doit trouver

$$2C_{5,3} + 29C_{5,2} + 15C_{5,1} = \mathfrak{M}(7),$$

ou

$$385 = \mathfrak{M}(7);$$

ce qui a lieu.

IX. Théorème. — *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$A_p(x^2-1)^p \frac{d^pX_n}{dx^p} = \frac{d\left[(x^p-1)^{p+1}\dfrac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}\right]}{dx}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(M)}$$

dans laquelle A_p *est un coefficient numérique.*

Dans la *Première Note sur les fonctions* X_n (**), j'ai donné la formule

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{x^2-1}{n(n+1)}\,\frac{dX_n}{dx}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

ou

$$n(n+1)X_n = \frac{d\left[(x^2-1)\dfrac{dX_n}{dx}\right]}{dx}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

(*) La valeur du second membre est $(2k+1)[2C_{p+1,k} + C_{p+1,k-1}]$. Si l'on en fait abstraction, l'égalité (L) paraît assez difficile à démontrer *directement*.

(**) *Académie de Belgique*, octobre 1880. Voir aussi le *second Mémoire*, p. 31.

Celle-ci est comprise dans la relation générale (M) : elle répond à $p=0$.

Supposons donc que l'égalité (M) ait été vérifiée pour une certaine valeur de p, et voyons si elle subsiste quand on y change p en $p+1$.

Après suppression du facteur $(x^2-1)^p$, (M) devient

$$A_p\frac{d^pX_n}{dx^p}=(x^2-1)\frac{d^{p+2}X_n}{dx^{p+2}}+2(p+1)x\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}.$$

Prenant les dérivées, nous avons

$$[A_p-2(p+1)]\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}=(x^2-1)\frac{d^{p+3}X_n}{dx^{p+3}}+2(p+2)x\frac{d^{p+2}X_n}{dx^{p+2}},$$

ou

$$A_{p+1}(x^2-1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}=(x^2-1)^{p+2}\frac{d^{p+3}X_n}{dx^{p+3}}+2(p+2)(x^2-1)^{p+1}x\frac{d^{p+2}X_n}{dx^{p+2}}.$$

Le second membre est la dérivée de

$$(x^2-1)^{p+2}\frac{d^{p+2}X_n}{dx^{p+2}}.$$

Ainsi,

$$A_{p+1}(x^2-1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}=\frac{d\left[(x^2-1)^{p+2}\frac{d^{p+2}X_n}{dx^{p+2}}\right]}{dx};$$

etc. De plus,

$$A_{p+1}=A_p-2(p+1)\quad\ldots\ldots\quad(11)$$

Et comme $A_0=n(n+1)$:

$$A_p=(n-p)(n+p+1).\quad\ldots\ldots\quad(12)$$

X. Corollaire. — *Si l'on fait*

$$(x^2-1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}=U_p,$$

on a

$$U_{p+1}=A_p\int_{-1}^{x}U_pdx\quad\ldots\ldots\quad(N)$$

XI. *Application.* — Soit $n=5$, auquel cas

$$U_0=X_5=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x);$$

puis, par application de la formule (N) :

$$U_1 = \frac{A_0}{8}\int_{-1}^{x}(63x^5 - 70x^3 + 15x)dx = \frac{A_0}{16}(21x^6 - 35x^4 + 15x^2 - 1),$$

$$U_2 = \frac{A_0A_1}{16}\int_{-1}^{x}(21x^7 - 35x^4 + 15x^2 - 1)dx = \frac{A_0A_1}{16}(3x^7 - 7x^5 + 5x^3 - x),$$

$$U_3 = \frac{A_0A_1A_2}{16}\int_{-1}^{x}(3x^7 - 7x^5 + 5x^3 - x)dx = \frac{A_0A_1A_2}{784}(9x^8 - 28x^6 + 30x^4 - 12x^2 + 1),$$

etc.

XII. Théorème. — *La fonction* X_n *satisfait à l'équation*

$$B_p\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}dx \ldots \int_{-1}^{x}X_n dx = (x^2 - 1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p}; \quad \ldots \ldots \quad \text{(P)}$$

p *désignant le nombre des intégrations.*

Lorsque $p = 1$, cette égalité se réduit à la formule (9). Voyons donc si, en partant de (N), nous pouvons conclure

$$B_{p+1}\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}dx \ldots \int_{-1}^{x}X_n dx = (x^2 - 1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}; \quad \ldots \quad (13)$$

le nombre des intégrations étant, cette fois, $p + 1$.

En vertu de la relation (N), l'égalité (13) devient

$$\frac{B_{p+1}}{B_p}\int_{-1}^{x}dx(x^2 - 1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p} = (x^2 - 1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}};$$

ou, si nous prenons les dérivées,

$$\frac{B_{p+1}}{B_p}(x^2 - 1)^p\frac{d^pX_n}{dx^p} = \frac{d\left[(x^2 - 1)^{p+1}\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}\right]}{dx}. \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Cette égalité est identique avec (M), si l'on suppose

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} = A_p : \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

la relation (N) est donc démontrée.

XIII. *Remarque.* — Si l'on fait abstraction d'un facteur numérique (*), on a

$$X_n = \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Donc l'égalité (P) peut être écrite ainsi :

$$B_p \cdot \frac{d^{n-p}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-p}} = (x^2 - 1)^p \frac{d^{n+p}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (Q)$$

En conséquence, on a la proposition suivante, énoncée par *M. Lucien Lévy,* dans le *Journal* de *M. de Longchamps* (1884, p. 71) :

XIV. Théorème. — *Si l'on prend les dérivées successives de la fonction* $(x^2 - 1)^n$, *la dérivée d'ordre* $n - p$ *est divisible, algébriquement, par la dérivée d'ordre* $n + p$: *le quotient égale* $(x^2 - 1)^p$ (**).

Liège, 1er décembre 1887.

ADDITION.

XV. *Une sommation.* — On connaît, depuis longtemps, la somme de la série

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n + \cdots \; (***);$$

Mais il n'en est pas de même, peut-être, pour la quantité

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S_n;$$

bien qu'il soit assez facile d'en trouver la valeur.

(*) Il est commun aux deux membres de (N).

(**) J'ignore comment M. L. Lévy est parvenu à cette remarquable proposition, qui complète mes recherches sur les fonctions X_n. On voit qu'elle résulte, fort simplement, de l'équation (9).

(***) *Premier Mémoire,* p. 60.

On a, entre trois fonctions consécutives, la relation

$$X_n = \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\ (^*), \quad \ldots \quad (16)$$

que l'on peut écrire sous ces formes successives :

$$X_n - 2(1-x)\frac{dX_n}{dx} = \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx},$$

$$\frac{X_n}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}\,\frac{dX_n}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left[\frac{dX_{n-1}}{dx} - 2\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right],$$

$$\frac{d\left(X_n\sqrt{1-x}\right)}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left[\frac{dX_{n-1}}{dx} - 2\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}\right] \quad \ldots \quad (17)$$

Si, après avoir multiplié par dx, on intègre, on a donc la *formule nouvelle :*

$$X_n\sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\frac{dX_{n-1}}{dx} - 2\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}\,dx = 0\ (^{**}) \quad \ldots \quad (R)$$

XVI. *Suite.* — Dans cette relation générale, changeons n en $n-1, n-2, \ldots,$ 3, 2, 1 ; puis ajoutons les résultats. Sous le signe d'intégration, tous les termes se détruisent, sauf trois d'entre eux (***). Donc, à cause de $\frac{dx_1}{dx} = 1$:

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_1^x \frac{1 + \frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad \ldots \quad (S)$$

Telle est la formule que nous nous proposions d'établir (IV).

(*) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 358.

(**) Le premier terme s'annulant quand $x = 1$, il en doit être de même du second. D'ailleurs, pour ne pas effectuer un changement de signe, nous prenons, comme *limite inférieure* de l'intégrale, le *maximum de* x.

(***) On pourrait remplacer le numérateur par $\Delta^2\frac{dX_{n-1}}{dx}$; mais cette transformation ne ferait qu'allonger le calcul, très simple, indiqué dans le texte.

(IV) Nous y sommes parvenu par un procédé très différent de celui-ci.

XVII. *Remarques.* — 1° On a

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}.$$

Par conséquent,

$$1 + X_1 + \cdots + X_n = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \int_1^x \frac{\dfrac{dX_n}{dx} - \dfrac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx \quad \ldots\ldots \quad (T)$$

2° Faisons croître n indéfiniment. La limite du premier membre est $\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$ (*).

Donc

$$\lim \int_1^x \frac{\dfrac{dX_n}{d_n} - \dfrac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}} dx = \sqrt{2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (U)$$

puis

$$\lim\left(\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n+1}}{dx}\right) = 0 \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

En d'autres termes :

La quantité

$$\frac{[nX_{n-1} - (n+1)X_n] - [nX_n - (n+1)X_{n+1}]x}{1-x^2}$$

tend vers zéro quand n *croît indéfiniment* (***).

Cette proposition n'est pas évidente *a priori.*

(*) *Premier Mémoire,* p. 60.

(**) Généralement, *si*

$$F(x, \lambda) = \int_a^\lambda f(x, \lambda)\, dx,$$

on a

$$\lim F(x, \lambda) = \int_a^x \lim f(x, \lambda)\, dx;$$

les limites se rapportant au paramètre λ. Je crois inutile de démontrer ce Lemme connu.

(***) Bien entendu, x est supposé différent de ± 1.

XVIII. *Autre sommation.* — La formule (T) donne, immédiatement,

$$(n+1)X_0 + nX_1 + \cdots + X_n = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_1^x \frac{\frac{dX_{n+1}}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx; \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

formule plus simple que la première.

XIX. *Remarques.* — 1° Le premier membre est un polynôme entier, du degré n. Donc l'intégrale a la forme $P_n\sqrt{1-x}$, P_n étant un polynôme entier.

2° Plus généralement,

$$\int_1^x \frac{A_1\frac{dX_1}{dx} + A_2\frac{dX_2}{dx} + \cdots + A_n\frac{dX_n}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx = Q_{n-1}\sqrt{1-x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Y)$$

Q_{n-1} désignant un polynôme entier, du degré $n-1$.

XX. *Application.* — Soit $Q_3 = x^3$. On trouve :

$$A_1 = \frac{3}{5}, \quad A_2 = -\frac{1}{4}, \quad A_3 = \frac{2}{5}, \quad A_4 = \frac{1}{5};$$

puis

$$\int_1^x \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\frac{dX_2}{dx} + \frac{2}{5}\frac{dX_3}{dx} - \frac{1}{5}\frac{dX_4}{dx}}{\sqrt{1-x}}dx = x^3\sqrt{1-x},$$

ou

$$\int_1^x \frac{3x^2 - \frac{7}{2}x^3}{\sqrt{1-x}}dx = x^3\sqrt{1-x};$$

ce qui est exact (*).

Liège, 14 décembre 1887.

(*) A propos de cette relation (Y), nous renvoyons aux dernières pages du *troisième Mémoire*.