QUELQUES

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 5 juillet 1884.)

QUELQUES

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

1. THÉORÈME I (Théorème de Lionnet (*)). *Soit*

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

p *étant un nombre entier, plus grand que zéro. Si le nombre* n, *supérieur à* p + 1, *est premier, il divise* S_p.

On a

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

D'après les hypothèses, n surpasse 2 : n est *impair*, et au moins égal à 3. Donc

$$S_1 = \mathfrak{M}.n.$$

Supposons

$$S_2 = \mathfrak{M}.n, \quad S_3 = \mathfrak{M}.n, \quad \ldots, \quad S_{p-1} = \mathfrak{M}.n:$$

il s'agit de vérifier que S_p est un multiple de n.

(*) En 1842, M. Lionnet, alors Professeur au Collège Louis le Grand, publia, dans le premier volume des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, le théorème auquel nous croyons devoir donner le nom de notre vénérable ancien collègue.

Or, la relation générale (*)

$$(n+1)\left[(n+1)^p-1\right]=\frac{p+1}{1}S_p+\frac{(p+1)^p}{1.2}S_{p-1}+\cdots+\frac{p+1}{1}S_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

devient, par ce qui précède, et à cause de $(n+1)^p-1=\mathfrak{M}.n$:

$$(p+1)S_p=\mathfrak{M}.n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le nombre n, étant premier, doit diviser $p+1$ ou S_p. Il surpasse $p+1$; donc *il divise* S_p (**).

2. Théorème II. *Si* n + 1 *est un nombre premier, supérieur à* p + 1, *il divise* S_p.

Le nombre $n+1$, supposé premier, surpasse 2; donc n est *pair :* $S_1=\mathfrak{M}.(n+1)$. Si toutes les sommes S_2, S_3, ..., S_{p-1} sont des multiples de $n+1$, l'égalité (1), dans laquelle le premier membre est divisible par $n+1$, donne

$$(p+1)S_p=\mathfrak{M}.(n+1);$$

etc.

3. Théorème III. *Si* n *est un nombre premier, la quantité* S_{n-1} *est un multiple de* n, *diminué de l'unité.*

On a

$$S_{n-1}=1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(n-1)^{n-1}+n^{n-1}.$$

D'après le théorème de Fermat,

$$1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(n-1)^{n-1}=\mathfrak{M}.n+(n-1)=\mathfrak{M}.n-1;$$

donc

$$S_{n-1}=\mathfrak{M}.n-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 70.

(**) Cette démonstration ne diffère pas de celle qui a été donnée par M. Lionnet.

4. Lemme I. *Si* n *est un nombre premier, égal ou inférieur à* p (*), *et que l'on fasse*

$$p = (n-1)q + r,$$

on a, si r *n'est pas nul,*

$$S_p = \mathfrak{M}.n + S_r;$$

et

$$S_p = \mathfrak{M}.n - 1,$$

si r = 0.

De

$$S_p = 1^p + 2^p + \cdots + f^p + (n-1)^p + n^p,$$

on conclut

$$S_p = 1^p + 2^p + \cdots + f^p + \cdots + (n-1)^p + \mathfrak{M}.n. \qquad (5)$$

Mais, par le théorème de Fermat :

$$f^{n-1} = \mathfrak{M}.n + 1,$$
$$f^{(n-1)q} = \mathfrak{M}.n + 1.$$

Donc, en multipliant par f^r :

$$f^p = \mathfrak{M}.n + f^r;$$

puis

$$1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p = \mathfrak{M}.n + 1^r + 2^r + \cdots + (n-1)^r. \qquad (6)$$

Cela posé, si r n'est pas nul, on peut ajouter n^p au premier membre, n^r au second; et l'on a

$$S_p = \mathfrak{M}.n + S_r \qquad (7)$$

Si $r = 0$, le second membre de l'égalité (6) a la forme $\mathfrak{M}.n + (n-1) = \mathfrak{M}.n - 1$. Donc, ajoutant $n^p = \mathfrak{M}.n$:

$$S_p = \mathfrak{M}.n - 1 \text{ (**)}. \qquad (8)$$

(*) Nous venons d'examiner le cas de $n = p + 1$.

(**) Quand $n = 2$, la démonstration est en défaut; mais la proposition subsiste. En effet, $1^p + 2^p = \mathfrak{M}.2 + 1 = \mathfrak{M}.2 - 1$.

5. Lemme II. *Si* n + 1 *est un nombre premier, égal ou inférieur à* p + 1(*), *et que l'on fasse*

$$p = nq' + r',$$

on a, si r' *n'est pas nul,*

$$S_p = \mathfrak{M}(n+1) + S_{r'};$$

et

$$S_p = \mathfrak{M}(n+1) - 1,$$

si r' = 0.

Un simple changement de lettres donne, pour le premier cas :

$$\begin{aligned} f^n &= \mathfrak{M}(n+1) + 1, \\ f^{nq'} &= \mathfrak{M}.(n+1) + 1, \\ f^p &= \mathfrak{M}.(n+1) + f^{r'}, \\ S_p &= \mathfrak{M}(n+1) + S_{r'} \ldots\ldots \end{aligned} \qquad (9)$$

Si, au contraire, $r' = 0$:

$$f^p = f^{nq'} = \mathfrak{M}.(n+1) + 1;$$

puis

$$S_p = \mathfrak{M}.(n+1) + n,$$

ou

$$S_p = \mathfrak{M}.(n+1) - 1 \ldots\ldots \qquad (10)$$

6. Théorème IV. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *ne divise point* p, S_p *est multiple de* n.

Dans l'égalité (7), r est le reste de la division de p par $n - 1$, reste qui n'est pas nul. Ainsi, $r < n - 1$, ou $n > r + 1$. D'après le Théorème I, $S_r = \mathfrak{M}.n$. Donc aussi

$$S_p = \mathfrak{M}.n.$$

7. Théorème V. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *divise* p, S_p *est un multiple de* n, *diminué de l'unité.*

(*) On vient de voir ce qui se rapporte à $n + 1 = p + 1$.

8. Théorème VI. *Si* n + 1 *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n *ne divise point* p, S_p *est multiple de* n + 1.

Mêmes démonstrations : Il suffit de remplacer la relation (7) par la relation (9), et le Théorème I par le Théorème II.

9. *Remarque.* Le Théorème II est un corollaire du Théorème VI; ou plutôt ces deux théorèmes n'en font qu'un. En effet, d'après le second :

$$1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p + n^p = \mathfrak{M}\,(n+1),$$

si n + 1 *est premier et que* n *ne divise point* p.

Changeant n en $n - 1$, on a cette proposition :

$$1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p = \mathfrak{M}\,.\,n,$$

si n *est premier et que* n — 1 *ne divise point* p. Ajoutant n^p au premier membre, on retrouve le Théorème II.

10. Théorème VII. *Si* n + 1 *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n *divise* p, S_p *est un multiple de* n + 1, *diminué de l'unité.*

Cette propriété est comprise dans le Lemme II.

11. Lemme III. a *étant un nombre impair, soit*

$$S(a^\alpha, p) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (a^\alpha)^p.$$

On a

$$S(a^\alpha, p) = \mathfrak{M}\,.\,a^\alpha + a^{\alpha-1}\,S(a,p) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Pour fixer les idées et simplifier l'écriture, prenons $a = 5$, $\alpha = 4$; de manière que

$$S(5^4, p) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + 625^p.$$

Décomposons le second membre en 5 groupes, composés, chacun, de 125 termes, savoir :

$$1^p + 2^p + \cdots + 125^p,\quad 126^p + 127^p + \cdots + 250^p,\quad 251^p + 252^p + \cdots + 375^p,$$
$$376^p + 377^p + \cdots + 500^p,\quad 501^p + 502^p + \cdots + 625^p.$$

On a, par la formule du binôme :

$$126^p = \mathfrak{M} . 125 + p . 125^2 . 1^{p-1} + 1^p,$$
$$127^p = \mathfrak{M} . 125^2 + p . 125 . 2^{p-1} + 2^p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$250^p = \mathfrak{M} . 125^2 + p . 125 . 125^{p-1} + 125^p;$$

puis, en observant que 125^2 est un multiple de 625 :

$$126^p + 127^p + \cdots + 250^p = \mathfrak{M} . 625 + p\ 125 . S(125, p-1) + S(125, p). \quad (12)$$

De même :

$$251^p + 252^p + \cdots + 375^p = \mathfrak{M} . 625 + p . 250\, S(125, p-1) + S(125, p),$$
$$376^p + 377^p + \cdots + 500^p = \mathfrak{M} . 625 + p . 375\, S(125, p-1) + S(125, p),$$
$$501^p + 502^p + \cdots + 625^p = \mathfrak{M} . 625 + p . 500\, S(125, p-1) + S(125, p).$$

Conséquemment :

$$1^p + 2^p + \cdots + 625^p = \mathfrak{M} . 625 + p . 125\,(1 + 2 + 3 + 4) S(125, p-1) + 5 S(125, p).$$

La somme $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4.5}{2}$ est un multiple de 5 (*). Donc

$$S(625, p) = \mathfrak{M} . 625 + 5 S(125, p),$$

ou

$$S(5^4, p) = \mathfrak{M} . 5^4 + 5 S(5^3, p) \ (^{**}).$$

De même :

$$S(5, p) = \mathfrak{M} . 5^3 + 5 S(5^2, p),$$
$$S(5^2, p) = \mathfrak{M} . 5^2 + 5 S(5, p).$$

Éliminant $S(5^3, p)$ et $S(5^2, p)$, on a

$$S(5^4, p) = \mathfrak{M} . (5^4) + 5^3 S(5, p).$$

C. Q. F. D.

*) Dans le cas général, cette somme devient $1 + 2 + 3 + \cdots + (a-1) = \frac{(a-1)a}{2} = \mathfrak{M} . a$, puisque a est *impair*.

(**) En général

$$S(a^x, p) = \mathfrak{M} . a^x + a S(a^{x-1}, p).$$

11. LEMME IV. *Soit* a *un nombre premier, supérieur à* 2 :

1° *Si* a — 1 *ne divise point* p, $S(a^\alpha, p) = \mathfrak{M} . a^\alpha$;

2° *Si* a — 1 *divise* p, $S(a^\alpha, p)$ *est divisible par* $a^{\alpha-1}$, *mais non divisible par* a^α.

1° D'après le Théorème IV, si $a - 1$ ne divise point p, $S_p = \mathfrak{M} . a$. Conséquemment, la relation

$$S(a^\alpha, p) = \mathfrak{M} . a^\alpha + a^{\alpha-1} S(a, p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

prend la forme

$$S(a^\alpha, p) = \mathfrak{M} . a^\alpha + \mathfrak{M} . a^\alpha = \mathfrak{M} . a^\alpha.$$

2° Si $a - 1$ divise p, $S(a, p) = \mathfrak{M} . a - 1$ (Théorème V). Donc

$$S(a^\alpha, p) = \mathfrak{M} . a^\alpha + \mathfrak{M} . a^\alpha - a^{\alpha-1} = \mathfrak{M} . a^\alpha - a^{\alpha-1} = \mathfrak{M} . a^{\alpha-1}.$$

En outre, la première partie de $S(a^\alpha, p)$ est divisible par a^α; la seconde ne l'est pas.

12. LEMME V. a, b, c, ... g *étant des nombres impairs, premiers entre eux, deux à deux, on a*

$$\begin{aligned} S(abc \dots g, p) &= \mathfrak{M} . a + bc \dots g . S(a, p) \\ &= \mathfrak{M} . b + ac \dots g . S(b, p) \\ &= . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Considérons seulement trois nombres, a, b, c. Un groupement analogue à celui qui a été employé ci-dessus (10) donne

$$\begin{aligned} S(abc, p) = &\left[1^p + 2^p + \cdots + a^p\right] + \left[(a+1)^p + \cdots + (2a)^p\right] + \left[(2a+1)^p + \cdots + (3a)^p\right] + \cdots \\ &+ \left[(abc - a)^p + (abc - a + 1)^p + \cdots + (abc)^p\right]. \end{aligned}$$

Chaque groupe est un multiple de a, augmenté de $1^p + 2^p + \cdots + a^p = S(a, p)$. D'ailleurs, il y a bc groupes; donc

$$\begin{aligned} S(abc, p) &= \mathfrak{M}.a + bc\, S(a, p). \qquad (12)\\ &= \mathfrak{M}.b + ca\, S(b, p),\\ &= \mathfrak{M}.c + ab\, S(c, p). \end{aligned}$$

13. Lemme VI. *Les mêmes choses étant posées que dans le Lemme V :*

1° *Si les sommes* $S(a, p)$, $S(b, p)$, $S(c, p)$, ... *sont, respectivement, divisibles par* $a, b, c, \ldots$, *la somme* $S(abc \ldots g, p)$ *est divisible par* $abc \ldots g$;

2° *Dans le cas contraire,* $S(abc \ldots g, p)$ *n'est point divisible par* $abc \ldots g$.

1° Soient :

$$S(a, p) = \mathfrak{M}.a, \quad S(b, p) = \mathfrak{M}.b, \ldots$$

Les relations (12) deviennent :

$$S(abc, p) = \mathfrak{M}.a = \mathfrak{M}.b = \mathfrak{M}.c.$$

Donc, par un théorème connu,

$$S(abc, p) = \mathfrak{M}(abc).$$

2° Si, dans la première de ces relations, $S(a, p)$ n'est point divisible par a, $S(abc, p)$ ne l'est pas non plus. Donc, etc.

14. Théorème VIII. *Soit* $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, $a, b, c, \ldots$ *étant premiers, inégaux et impairs :*

1° *Si aucun des nombres* $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$, ... *ne divise* p, $S_p = \mathfrak{M}.n$;

2° *Dans le cas contraire,* S_p *n'est pas divisible par* n.

15. *Corollaire. Si les nombres* n, p *sont impairs, et que* p *soit premier,*

$$S_p = \mathfrak{M}.n.$$

16 REMARQUE. Si l'on applique au nombre 2 les considérations précédentes, on trouve, en observant que $S(2,p)=1^p+2^p=\mathfrak{M}.2+1$:

1° $S(2^\lambda,p)=\mathfrak{M}.2^{\lambda-1}.(\lambda>1)$;

2° *Soit* $n=2^\lambda a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ *Si aucun des nombres* $a-1, b-1, c-1, \ldots$ *ne divise* p, $S_p=\mathfrak{M}.(\frac{n}{2})$;

3° *Dans le cas contraire,* S_p *n'est point divisible par* $\frac{n}{2}$.

17. *Vérifications.* I. $n=3^2.5^3=1125$, $p=3$. On a

$$S_3=\left(\frac{1125\,.\,1126}{2}\right)^2=1125^2.563^2=\mathfrak{M}.1125.$$

II. $n=3^2.5^3=1125$, $p=4$.
La formule

$$S_4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

devient, dans ce cas particulier,

$$S_4=\frac{1125.1126\;2251\,[\mathfrak{M}.1125-1]}{30}=75.563.2251\,[\mathfrak{M}.1125-1]:$$

il est clair que le second membre n'est pas divisible par 1125.

III. $n=5^3.7=875$, $p=5$.
On a

$$S_5=\frac{875^2.876^2\,[\mathfrak{M}.875-1]}{12}=875^2.876.73\,[\mathfrak{M}.875-1]=\mathfrak{M}.875.$$

IV. $n=5^3.7=875$, $p=4$.
D'après ces valeurs,

$$S_4=\frac{875.876.1751\,[\mathfrak{M}.875-1]}{30}=175.146.1751\,[\mathfrak{M}.875-1]:$$

le second membre n'est pas divisible par 875.

V. $n = 2.5^3.7 = 1750$, $p = 5$.

Par suite,

$$S_5 = \frac{1}{12} 1750^2 . 1751^2 [2 . 1750^2 + 2 . 1750 - 1]$$
$$= \frac{1}{5} 875^2 . 1751^2 . 5\,059\,001 = 875^2 . 1751^2 . 1\,019\,667 = \mathfrak{M} . \left(\frac{n}{2}\right).$$

VI. $n = 2.5^3.7 = 1750$, $p = 4$.

On trouve

$$S_4 = \frac{1}{30} 1750 . 1751 . 3501 [\mathfrak{M} . 1750 - 1] = 175 . 1751 . 1167 [\mathfrak{M} . 1750 - 1]:$$

ce nombre n'est pas divisible par $\frac{n}{2}$.

18. Théorème IX. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *ne divise point* p + p', *la quantité*

$$S = 1^p (n-1)^{p'} + 2^p (n-2)^{p'} + \cdots + (n-1)^p 1^{p'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

est multiple de n.

Le terme général est

$$f^p (n-f)^{p'} = f^p [\mathfrak{M} . n + (-f)^{p'}] = \mathfrak{M} . n + (-1)^{p'} f^{p+p'}.$$

Donc

$$S = \mathfrak{M} . n + (-1)^{p'} [1^{p+p'} + 2^{p+p'} + \cdots + (n-1)^{p+p'}] = \mathfrak{M} . n + (-1)^{p'} [S_{p+p'} - n^{p+p'}]. \quad (12)$$

D'après le Théorème IV, $S_{p+p'} = \mathfrak{M} . n$; puis $S = \mathfrak{M} . n$.

19. Théorème X. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *divise* p + p', *la quantité* S *égale un multiple de* n, *diminué de* $(-1)^{p'}$.

On a, par le Théorème V :

$$S_{p+p'} = \mathfrak{M} . n.$$

Donc

$$S = \mathfrak{M} . n - (-1)^{p'}.$$

20. *Remarque.* S est une fonction *symétrique* de p et de p'; conséquemment,

$$S = \mathfrak{M} . n - (-1)^p \text{ (*)}.$$

*) $p + p'$ est *pair*; donc p et p' sont de *même parité*.

21. THÉORÈME XI. *Si* n *est un nombre impair, et que* p, p′ *soient de parités contraires,* n *divise* S.

Dans le second membre de la formule (11), la somme de deux termes également éloignés des extrêmes est

$$f^{p}(n-f)^{p'}+f^{p'}(n-f)^{p}=\mathfrak{M}.n+f^{p+p'}\left[(-1)^{p'}+(-1)^{p}\right]=\mathfrak{M}.n,$$

parce que le binôme entre parenthèses est nul. D'ailleurs, n étant *impair*, la somme S est composée d'un nombre *pair* de termes. Donc enfin

$$S=\mathfrak{M}.n.$$

22. THÉORÈME XII (Théorème d'Hermite (*)). n *étant un nombre entier, et* x *un nombre quelconque,*

$$E(x)+E\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+E\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=E(nx)\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(13)$$

Si l'on évalue x à moins de $\frac{1}{n}$, on aura

$$a+\frac{p}{n}\leqq x<a+\frac{p+1}{n};\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(14)$$

a étant la partie entière de x (**), et $\frac{p}{n}$ une fraction proprement dite.

De là résultent les valeurs suivantes :

$$E(x)=a,\quad E\left(x+\frac{1}{n}\right)=a,\ \ldots,\ E\left(x+\frac{n-p-1}{n}\right)=a,$$

$$E\left(x+\frac{n-p}{n}\right)=a+1\ (***),\quad E\left(x+\frac{n+1-p}{n}\right)=a+1,\ \ldots,\ E\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=a+1.$$

(*) L'illustre Géomètre a bien voulu me le communiquer.

(**) Elle peut être nulle.

(***) En effet, les relations (14) donnent

$$x+\frac{n-p}{n}\geqq a+1.$$

Donc

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{n}\right) + \cdots + E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = (n-p)\,a + p\,(a+1) = na + p. \quad (15)$$

Et comme, d'après les relations (14), nx est compris entre $na + p$ et $na + p + 1$, le second membre de l'égalité (15) se réduit à $E(nx)$.

23. Théorème XIII. *Si l'on conserve les dénominations employées dans le Théorème XII, et que l'exposant* k *soit un nombre entier, on aura*

$$[E(x)]^k + \left[E\left(x + \frac{1}{n}\right)\right]^k + \cdots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right]^k = (n-p)[E(x)]^k + p[1 + E(x)]^k. \quad (16)$$

Même démonstration.

24. *Corollaire. Si* x *est compris entre* 0 *et* 1 :

$$[E(x)]^k + \left[E\left(x + \frac{1}{n}\right)\right]^k + \cdots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right]^k = E(nx). \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

En effet, $E(x) = 0$; donc le second membre de l'égalité (16) se réduit à $p = E(nx)$.

25. *Remarque. La fonction de* k, *formant le premier membre, est indépendante de* k.

26. Théorème XIV. *Si le nombre entier* n *croît indéfiniment, la quantité*

$$\frac{1}{n}\left[x^p + \left(x + \frac{1}{n}\right)^p + \cdots + \left(x + \frac{n-1}{n}\right)^p\right]$$

tend vers

$$\frac{1}{p+1}\left[(x+1)^{p+1} - x^{p+1}\right] \; (*).$$

(*) Probablement, cette propriété n'est pas nouvelle. Quoi qu'il en soit, comme je l'écrivais, naguère, à M. Hermite : « depuis cinquante ans, j'aurais dû la découvrir ; mais on « pense rarement aux choses simples ».

En général,

$$(x+n\delta)^{p+1}-x^{p+1}=\frac{p+1}{1}\delta S_p+\frac{(p+1)p}{1.2}\delta^2 S_{p-1}+\cdots+\frac{p+1}{1}\delta^p S_1+n\delta^{p+1}\ (*).$$

Si donc $\delta=\frac{1}{n}$:

$$(x+1)^{p+1}-x^{p+1}=\frac{p+1}{1}\frac{S_p}{n}+\frac{(p+1)p}{1.2}\frac{S_{p-1}}{n^2}+\cdots+\frac{p+1}{1}\frac{S_1}{n_p}+\frac{1}{n^p}.$$

La somme S_{p-1} est comprise entre nx^{p-1} et $n(x+1)^{p-1}$; donc $\lim\frac{p-1}{n^2}=0$. De même pour tous les termes qui suivent le premier. Et comme le nombre de ces termes est *constant*, on a

$$(x+1)^{p+1}-x^{p+1}=(p+1)\lim\frac{S_p}{n}.$$

27. *Corollaire. Si* n *croît indéfiniment, la quantité*

$$\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^p$$

tend vers $\frac{1}{p+1}$.

28. Théorème XV. *α, β, γ,* p, q *étant des nombres entiers, soit*

$$A=(\alpha^2+\gamma^2)^2p^2-2\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\gamma^2-\alpha^2\beta^2\right]pq+(\beta^2+\gamma^2)^2q^2\quad\ldots\quad(18)$$

Le nombre A *est la somme de deux carrés :* 1° *si $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est un carré;* 2° *si* pq *est un carré.*

1° Multipliant les deux membres par $(\alpha^2+\gamma^2)^2$, on trouve

$$(\alpha^2+\gamma^2)^2A=\left\{(\alpha^2+\gamma^2)^2p-\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\gamma^2-\alpha^2\beta^2\right]q\right\}^2+4\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)q^2.\quad(19)$$

D'après l'hypothèse, le second membre est une somme de deux carrés; donc A, divisant cette somme, est aussi la somme de deux carrés;

2° L'égalité (18) équivaut à

$$A=\left[(\alpha^2+\gamma^2)p-(\beta^2+\gamma^2)q\right]^2+4\alpha^2\beta^2pq;$$

et la propriété est démontrée.

(*) *Cours d'Analyse*, p. 70. Ici, la notation S_p représente

$$x^p+(x+\delta)^p+(x+2\delta)^p+\cdots+(x+\overline{n-1}\,\delta)^p.$$

29. *Remarques.* I. Généralement, $(\alpha^2 + \gamma^2)^2 A$ est la *somme de quatre carrés.*

II. Si l'on suppose

$$p = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\gamma^2 - \alpha^2\beta^2, \quad q = (\alpha^2 + \gamma^2)^2,$$

chacun des nombres A, $(\alpha^2 + \gamma^2)^2 A$ devient une *somme de trois carrés.*

30. THÉORÈME XVI. *Soit*

$$B = (\alpha^2 + \gamma^2)^2 p^2 + 2\left[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\gamma^2 - \alpha^2\beta^2\right]pq + (\beta^2 + \gamma^2)^2 q^2 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

1° *Si* pq *est un carré,* B *égale la somme de quatre carrés;*

2° *Si, en outre,* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ *est un carré,* B *égale la somme de deux carrés.*

Pour établir ces deux propositions, il suffit d'écrire ainsi la dernière formule :

$$B = \left[(\alpha^2 + \gamma^2)p - (\beta^2 + \gamma^2)q\right]^2 + 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\gamma^2 pq.$$

P. S. (Septembre 1884.) M. F.-J. Lionnet, cité au commencement de cette Note, vient de mourir à Paris.