SUR

L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 5 août 1882.)

SUR

L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Le petit travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie peut être considéré comme un complément à deux Notes, déjà anciennes, relatives à la même question (*). Aujourd'hui, après avoir reproduit une partie de la seconde Note (en y faisant quelques corrections), je déduis, de la méthode qui y était indiquée, la plupart des formules connues; après quoi je donne diverses propriétés du *triangle de Lagrange*, et une interprétation géométrique de la *transformation de Landen*.

I. Intégrale d'Euler.

1. L'équation

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

étant mise sous la forme

$$\Delta(y)dx + \Delta(x)dy = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

observons que, pour rendre le premier terme intégrable, on peut le multiplier par $\frac{1}{\cos^2 x}$, ou encore par $\frac{1}{\cos^2 x\,[1 + \mathrm{tg}^2 x\,(\Delta y)^2]}$.

(*) *Bulletins*, février 1869; *Comptes rendus*, 25 mai 1874.

En effet,

$$\int \frac{\frac{\Delta(y)dx}{\cos^2 x}}{1+\operatorname{tg}^2 x(\Delta y)^2} = \operatorname{arc\,tg}\left[(\Delta y)\operatorname{tg} x\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Or,

$$\cos^2 x\left[1+\operatorname{tg}^2 x(\Delta y)^2\right] = 1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 y\left[1+\operatorname{tg}^2 y(\Delta x)^2\right].$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu de l'équation (2),

$$\frac{\Delta(y)dx}{\cos^2 x\left[1+\operatorname{tg}^2 x(\Delta y)^2\right]} + \frac{\Delta(x)dy}{\cos^2 y\left[1+\operatorname{tg}^2 y(\Delta x)^2\right]} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Soient, d'après la formule (3) :

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} x(\Delta y), \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} y(\Delta x); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et, par conséquent, en posant

$$1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y = \mathrm{L} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \frac{(\Delta y)dx}{\mathrm{L}} - c^2 \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y dy}{\mathrm{L}(\Delta y)}, \\ d\beta &= \frac{(\Delta x)dy}{\mathrm{L}} - c^2 \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y dx}{\mathrm{L}(\Delta x)}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

puis, en vertu des équations (1), (2) :

$$d\alpha + d\beta = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

L'intégrale cherchée est donc, indifféremment, $\alpha + \beta =$ *const.*, ou $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) =$ *const.*; savoir :

$$\operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg} x(\Delta y)\right] + \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg} y(\Delta x)\right] = \mu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{A})$$

$$\frac{\sin x \cos y(\Delta y) + \sin y \cos x(\Delta x)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y(\Delta x)(\Delta y)} = \operatorname{tg}\mu \; (^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{B})$$

(*) Après avoir démontré cette formule, Legendre ajoute : « Si l'on prenait deux angles » auxiliaires α, β, tels que

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} x\Delta(y), \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} y\Delta(x),$$

» il en résulterait

$$\mu = \alpha + \beta,$$

» ce qui est un moyen de calculer aisément par les Tables de sinus. » Comment l'illustre auteur du *Traité des fonctions elliptiques* ne s'est-il pas aperçu que ces variables α, β réduisent l'équation (1) à la forme (8) ?

2. *Remarque.* D'après les valeurs (7) :

$$d(\alpha + \beta) = \left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Ainsi, *pour transformer, en une différentielle exacte, le premier membre de la proposée, il suffit de le multiplier par*

$$\lambda = \frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Tout à l'heure, nous reviendrons sur ce sujet.

3. *Diverses formes de l'intégrale.* Dans (B), la somme des carrés des deux termes de la fraction est

$$\begin{gathered}\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y\,(1 - c^2 \sin^2 x)(1 - c^2 \sin^2 y) \\ + \sin^2 x \cos^2 y\,(1 - c^2 \sin^2 y) + \sin^2 y \cos^2 x\,(1 - c^2 \sin^2 x).\end{gathered}$$

Si l'on écrit ainsi cette quantité :

$$Ac^4 + Bc^2 + C,$$

on a :

$$\begin{aligned}&A = \sin^4 x \sin^4 y,\\ &B = -\sin^2 x \sin^2 y\,(\sin^2 x + \sin^2 y) - \sin^2 x \sin^2 y\,(\cos^2 x + \cos^2 y) = -2\sin^2 x \sin^2 y,\\ &C = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \cos^2 x + \sin^2 x \sin^2 y = 1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Ac^4 + Bc^2 + C = (1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y)^2.$$

La formule (B) donne donc, si l'on prend convenablement les signes :

$$\frac{\sin x \cos y\,(\Delta y) + \sin y \cos x\,(\Delta x)}{L} = \sin\mu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

$$\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y\,(\Delta x)(\Delta y)}{L} = \cos\mu. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

4. *Suite.* Pour $x = 0$, $y = \mu$, λ se réduit à $(\Delta\mu) = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\mu}$. Je dis que l'on a toujours

$$\frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{L} = (\Delta\mu); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

de sorte que l'équation (E) est encore une intégrale. Cette proposition connue, assez visible *à priori*, sera démontrée si l'on vérifie que l'on a, identiquement (*),

$$\left[(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y\right]^2+c^2\left[\sin x\cos y\,(\Delta y)+\sin y\cos x\,(\Delta x)\right]^2=(1-c^2\sin^2 x\sin^2 y)^2, \quad (11)$$

ou

$$\begin{gathered}(1-c^2\sin^2 x)(1-c^2\sin^2 y)+c^4\sin^2 x\cos^2 x\sin^2 y\cos^2 y\\ +c^2\sin^2 x\cos^2 y(1-c^2\sin^2 y)+c^2\sin^2 y\cos^2 x(1-c^2\sin^2 x)=1-2c^2\sin^2 x\sin^2 y+c^4\sin^4 x\sin^4 y;\end{gathered}$$

etc. (**).

5. *Remarque*. On a, simultanément,

$$\left.\begin{aligned}(1-c^2\sin^2 x\sin^2 y)^2&=\left[\sin x\cos y\,(\Delta y)+\sin y\cos x\,(\Delta x)\right]^2+\left[\cos x\cos y-\sin x\sin y\,(\Delta x)(\Delta y)\right]^2\\ &=\left[(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y\right]^2+\left[c\sin x\cos y\,(\Delta y)+c\sin y\cos x\,(\Delta x)\right]^2\end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

Voici donc *un carré décomposé, de deux manières différentes, en une somme de deux carrés.*

6. *Une transformée de l'équation* (1). D'après l'intégrale (C) :

$$d\left[\frac{\sin x\cos y\,(\Delta y)+\sin y\cos x\,(\Delta x)}{L}\right]=0,$$

ou

$$\sin x\,d\left[\frac{\cos y\,(\Delta y)}{L}\right]+\sin y\,d\left[\frac{\cos x\,(\Delta x)}{L}\right]+\frac{\cos x\cos y}{L}\left[(\Delta y)\,dx+(\Delta x)\,dy\right]=0;$$

ou, en vertu de la proposée,

$$\sin x\,d\left[\frac{\cos y\,(\Delta y)}{L}\right]+\sin y\,d\left[\frac{\cos x\,(\Delta x)}{L}\right]=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (13)$$

Cette équation (13) est la *transformée* dont il s'agit. Comme on peut l'établir *à priori* (***), il en résulte une *seconde méthode* d'intégration, sur laquelle nous n'insisterons pas.

(*) En vertu de (C).
(**) Nous supprimons ce dernier calcul : il n'offre aucune difficulté.
(***) Par un calcul assez long.

7. *Courbes intégrales.* Chacune des équations (A), (B), (C), (D), (E), si l'on y attribue à μ une valeur déterminée, représente une certaine courbe. *Ces cinq courbes sont identiques.* En effet, elles coupent, en un même point, l'axe des ordonnées (*); et chacune pourrait être construite, par points, au moyen de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\Delta y)}{(\Delta x)}.$$

Cette *courbe intégrale* coïncide encore avec les lignes ayant pour équations, soit

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y\, (\Delta x)\, (\Delta y) = \cos \mu, \qquad \text{(F)}$$

soit

$$\int_0^x \frac{dx}{(\Delta x)} + \int_0^y \frac{dy}{(\Delta y)} = \int_0^\mu \frac{dz}{(\Delta z)} \; (^{**}) \qquad \text{(G)}$$

J'ignore si la discussion de ces *courbes intégrales,* probablement très épineuse, a été faite.

8. *Système orthogonal.* Ces courbes, *de première espèce,* que l'on peut représenter aussi par

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(y) = \mathrm{F}(\mu), \qquad \text{(H)}$$

sont orthogonales aux *courbes de seconde espèce,* ayant pour équation

$$-\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) = \mathrm{F}(\nu) \qquad \text{(K)}$$

En effet, pour les premières,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\Delta y)}{(\Delta x)};$$

et, pour les autres,

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{(\Delta x)}{(\Delta y)}.$$

(*) La constante μ est l'*ordonnée à l'origine.*

(**) Pour éviter toute difficulté, j'écris, sous le signe $\int$, z au lieu de μ.

II. Sur l'équation $Mdx + Ndy = 0$.

9. *Du multiplicateur* λ. Rappelons une proposition connue :

Si

$$\lambda(Mdx + Ndy) = du,$$

et que

$$\theta(Mdx + Ndy) = dv;$$

on a

$$\theta = \lambda f(u).$$

Voici une remarque complémentaire :

Si u *est fonction du multiplicateur* λ, *tout autre multiplicateur est donné par la formule*

$$\theta = \varphi(\lambda). \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

10. *Suite.* On a trouvé, ci-dessus :

$$\lambda = \frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{L}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$u = \frac{\sin x \cos y (\Delta y) + \sin y \cos x (\Delta x)}{L} \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

D'ailleurs, $\lambda = \Delta(\mu)$ est fonction de $u = \sin \mu$ (*). Conséquemment, la formule (14) est applicable, et l'on a ce théorème (**) :

1°
$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\varphi(\lambda)$$

est une différentielle exacte ;

2° *Si*

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\theta$$

est une différentielle exacte,

$$\theta = \varphi(\lambda);$$

(*) $\lambda^2 = 1 - c^2u^2$.

(**) Énoncé, en partie, dans les *Comptes rendus*.

3° *Si*

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right] \varphi(\lambda) = dv,$$

on peut prendre, comme intégrale de l'équation (1),

$$v = const.$$

11. *Application.* Soit

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 = \left[(\Delta\mu)\right]^2.$$

Alors

$$dv = \left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right] \left[(\Delta\mu)\right]^2.$$

Cette expression peut être réduite. En effet,

$$\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)} = \frac{d\mu}{(\Delta\mu)};$$

donc

$$dv = (\Delta\mu)\, d\mu = d\,.\,\mathrm{E}(\mu).$$

Et comme

$$d\,.\,\mathrm{E}(\mu) = (\Delta x)\, dx + (\Delta y)\, dy - c^2 d\,(\sin x \sin y \sin \mu) \ (^*),$$

il s'ensuit que :

1° *La quantité*

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right] \left[\frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right]^2$$

est une différentielle exacte, identiquement égale à

$$(\Delta x)\, dx + (\Delta y)\, dy - c^2 d\left[\sin x \sin y \frac{\sin x \cos y\,(\Delta y) + \sin y \cos x\,(\Delta x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right];$$

(*) *Legendre,* t. I, p. 43.

2° *Une intégrale de l'équation* (1) *est*

$$\int_0^x (\Delta x)\,dx + \int_0^y (\Delta y)\,dy - \int_0^\mu (\Delta z)\,dz = c^2 \sin x \sin y \frac{\sin x \cos y\,(\Delta y) + \sin y \cos x\,(\Delta x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} \text{ (*)}. \quad \text{(L)}$$

12. *Vérification.* La première partie du théorème consiste en l'égalité

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right](\Delta\mu)^2 = (\Delta x)\,dx + (\Delta y)\,dy - c^2 d.(\sin x \sin y \sin\mu) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Comme les deux membres sont des fonctions symétriques, il suffit de vérifier que

$$\frac{(\Delta\mu)^2}{(\Delta x)} = (\Delta x) - c^2 \sin y \left[\sin\mu \cos x + \sin x \cos\mu \frac{d\mu}{dx}\right].$$

Or,

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{(\Delta\mu)}{(\Delta x)} \text{ (**)}.$$

Donc l'égalité devient

$$(\Delta\mu)^2 = (\Delta x)^2 - c^2 \sin y \left[\sin\mu \cos x\,(\Delta x) + \sin x \cos\mu\,(\Delta\mu)\right].$$

Il resterait à remplacer, par leurs valeurs, $\sin\mu$, $\cos\mu$, $(\Delta\mu)$. Mais il est plus court d'employer la formule

$$\sin y = \frac{\sin\mu \cos x\,(\Delta x) - \sin x \cos\mu\,(\Delta\mu)}{1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2 x}.$$

On trouve ainsi, après une réduction évidente,

$$\begin{aligned}(\sin^2 x - \sin^2\mu)(1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2 x) &= \sin^2 x \cos^2\mu\,(1 - c^2 \sin^2\mu) - \sin^2\mu \cos^2 x\,(1 - c^2 \sin^2 x)\\ &= (\sin^2 x - \sin^2\mu) - c^2 \sin^2\mu \sin^2 x\,(\cos^2\mu - \cos^2 x);\end{aligned}$$

ce qui est identique.

(*) Autrement dit, *l'intégrale immédiate*

$$\int_0^x \frac{dx}{(\Delta x)} + \int_0^y \frac{dy}{(\Delta y)} - \int_0^\mu \frac{dz}{(\Delta z)} = 0,$$

peut être remplacée par (L).

(**) On arrive à la même conclusion en observant que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} = \frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{\mathrm{L}\,(\Delta x)}.$$

13. *Remarque.* Le théorème précédent (11) semble en défaut dans le cas où, comme l'a fait M. Despeyrous (*), on met la proposée sous la forme

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right] \frac{\cos x \cos y\,(\Delta x)\,(\Delta y)}{\mathrm{L}} = 0.$$

En effet, le *multiplicateur,* $\frac{\cos x \cos y\,(\Delta x)\,(\Delta y)}{\mathrm{L}}$, *n'est pas fonction de*

$$\lambda = \frac{(\Delta x)\,(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{\mathrm{L}}.$$

Mais *la quantité*

$$\frac{\cos x \cos y\,(\Delta y)}{\mathrm{L}}\,dx + \frac{\cos y \cos x\,(\Delta x)}{\mathrm{L}}\,dy$$

n'étant pas une différentielle exacte (**), l'exception n'est qu'apparente.

(*) Sturm, *Cours d'Analyse,* t. II, p. 329.

(**) Cette proposition, assez visible par le calcul effectué au paragraphe (6), peut être prouvée directement, comme il suit.

La condition

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} = \frac{d\mathrm{N}}{dx}$$

devient, dans le cas actuel,

$$\cos x \left[\mathrm{L}\,(\Delta y) + \mathrm{L} \cos y \frac{c^2 \cos y}{(\Delta y)} + \cos y\,(\Delta y) \frac{c^2 \sin^2 x \cos y}{\mathrm{L}}\right] \sin y$$

$$= \cos x \left[\mathrm{L}\,(\Delta x) + \mathrm{L} \cos x \frac{c^2 \cos x}{(\Delta x)} + \cos x\,(\Delta x) \frac{c^2 \sin^2 y \cos x}{\mathrm{L}}\right] \sin x.$$

Or, pour $x = 0$, $y = \mu$, cette égalité, qui devrait être *identique*, se réduit à

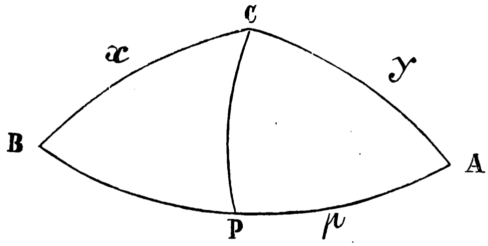
$$\left[(\Delta\mu) + c^2 \frac{\cos^2\mu}{(\Delta\mu)}\right] \sin\mu = 0;$$

puis à

$$\sin\mu = 0.$$

III. Sur le triangle de Lagrange (*).

14. *Préliminaires.* Soit ACB un triangle sphérique, dans lequel



$$AB = \mu, \quad CB = x, \quad CA = y.$$

Il en résulte (**) :

$$\cos C = -(\Delta\mu), \quad \cos A = (\Delta x), \quad \cos B = (\Delta y),$$

$$\frac{\sin A}{\sin x} = \frac{\sin B}{\sin y} = \frac{\sin C}{\sin \mu} = c.$$

De plus, si l'on abaisse l'arc CP perpendiculaire à BA, on a :

$$\cos A = \cot y \operatorname{tg} AP, \quad \cos B = \cot x \operatorname{tg} BP;$$

ou

$$\operatorname{tg} AP = \operatorname{tg} y\,(\Delta x), \quad \operatorname{tg} BP = \operatorname{tg} x\,(\Delta y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Ces valeurs sont celles que nous avons désignées par β, α (1) (***). Donc

$$BP = \alpha, \quad AP = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

(*) *Théorie des fonctions*, (1813), p. 116.

(**) Legendre, *Fonct. ellipt.*, t. I, p. 20.

(***) Legendre ne fait pas cette dernière remarque; mais, après avoir fait observer que la considération du triangle de Lagrange conduit à

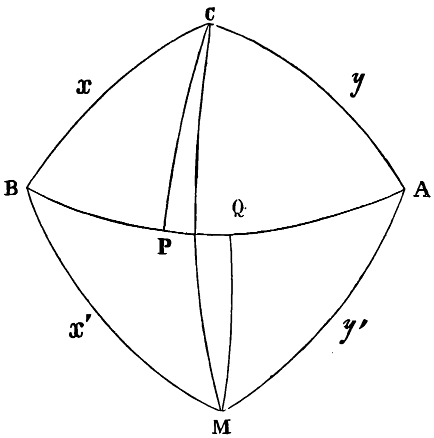
$$\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)} = 0,$$

il ajoute :

« Ainsi, une application fort simple de la trigonométrie sphérique aurait suffi pour trouver » l'intégrale algébrique complète de l'équation transcendante

$$\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)} = 0. »$$

15. *Suite.* Si l'arc AB, dont la longueur est constante, glisse entre les côtés de l'angle C, cet arc enveloppe une certaine courbe sphérique, facile à construire par points. Menons, en effet, les arcs AM, BM, respectivement perpendiculaires à CA, CB; et soit M leur point d'intersection. Il est visible que M est, relativement à BA, le *centre instantané de rotation* (*). Conséquemment, *le point* Q, *commun à l'enveloppée* AB *et à l'enveloppe, est la projection sphérique de* M.



Cela posé, soient

$$BQ = \alpha', \quad AQ = \beta', \quad BM = x', \quad AM = y':$$

il s'agit d'évaluer α' ou β'.

On a, par les triangles rectangles CBM, CAM,

$$\cos x \cos x' = \cos y \cos y'.$$

Le triangle BAM donne

$$\cos x' = \cos\mu \cos y' + \sin\mu \sin y' \sin A.$$

De plus, dans le triangle AQM,

$$\operatorname{tg}\beta' = \sin A \operatorname{tg} y'.$$

On tire, des deux premières équations, en éliminant $\cos x'$,

$$\operatorname{tg} y' = \frac{\cos y - \cos x \cos\mu}{\cos x \sin\mu \sin A};$$

(*) Si cette proposition n'est pas admise *à priori*, on peut la démontrer au moyen de l'angle tétraèdre OACBM, O étant le centre de la sphère. Quand l'angle OAB glisse entre les faces du dièdre OBCA, il tourne autour de la droite OM; etc.

ou, parce que le numérateur égale sin x sin μ cos B :

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} x \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Conséquemment,

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} x \cos B,$$

ou

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} x\, (\Delta y); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

et, à cause de la symétrie,

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} y\, (\Delta x). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Chacune des formules (18), (19) détermine la position du point Q sur le côté mobile AB.

16. *Remarque.* La comparaison des valeurs (16), (18), (19) donne :

$$AQ = BP, \quad BQ = AP.$$

Ainsi :

Quand un quadrilatère sphérique a deux angles opposés droits A, B; *les projections* (sphériques) *de deux côtés opposés, sur la diagonale* AB, *sont égales* (*).

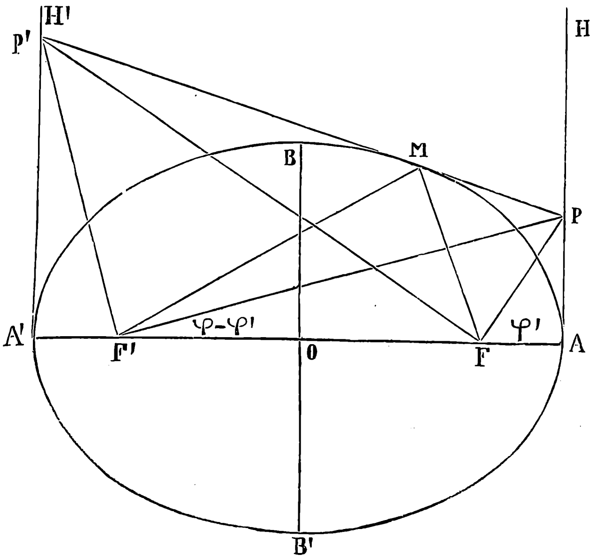
IV. Substitution de Landen.

17. Jacobi a donné une élégante interprétation géométrique de la *formule de Landen* (**). En voici une autre, moins simple que celle de l'illustre Géomètre, mais assez remarquable.

(*) Pour le quadrilatère plan, cette propriété est *intuitive*.

(**) Ou *Échelle de Lagrange*. Bertrand, *Calcul intégral*, p. 657.

Soit une ellipse $ABA'B'$, dans laquelle



$$OA = OA' = 1, \quad OF = OF' = c.$$

1° Si l'on mène les rayons vecteurs relatifs à un point quelconque de la courbe, et que l'on fasse

$$MFA = 2\varphi', \quad MF'A = 2\varphi' - 2\varphi,$$

on a

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{1 - c}{1 + c} \operatorname{tg}\varphi'. \quad (20)$$

En effet, PP' étant la tangente en M, limitée aux tangentes indéfinies HA, $A'H'$, en A, A'; PF, PF' sont, d'après une propriété connue, les bissectrices de AFM, $AF'M$. De plus,

$$AP = AF \operatorname{tg}\varphi' = AF' \operatorname{tg}(\varphi - \varphi');$$

etc. (*).

2° Les bissectrices FP, FP', des angles AFM, $A'FM$, sont perpendiculaires entre elles. *Si donc l'angle droit* PFP' *tourne autour de* F, *l'hypoténuse* PP', *du triangle variable* PFP', *enveloppe l'ellipse.* De même pour $PF'P'$. En outre, le point de contact M est facile à déterminer. Enfin, l'angle $P'PH$ égale φ.

3° On a, dans le triangle MFF' :

$$FM = 2c\,\frac{\sin(2\varphi - 2\varphi')}{\sin(4\varphi' - 2\varphi)}, \quad F'M = 2c\,\frac{\sin 2\varphi'}{\sin(4\varphi' - 2\varphi)};$$

(*) Le théorème exprimé par l'équation (20), assez peu connu, je crois, peut être énoncé ainsi :

Dans toute ellipse, les tangentes des demi-anomalies vraies, d'un même point, ont un rapport constant.

On déduit facilement, de cette propriété, la relation entre *l'anomalie vraie* et *l'anomalie excentrique.*

donc

$$\sin(4\varphi' - 2\varphi) = c\left[\sin(2\varphi - 2\varphi') + \sin 2\varphi'\right];$$

ou, par la suppression d'un facteur commun,

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

formule de Landen ou de Lagrange (*).

4° On tire, de l'équation (20),

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{4c}{(1+c)^2}\sin^2\varphi'}},$$

ou

$$\cos\varphi' = \cos(\varphi - \varphi')\,\Delta(c', \varphi'); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

pourvu que l'on suppose

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

5° L'équation (21) donne, immédiatement,

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta(c, \varphi); \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

et, si l'on divise par $\cos\varphi$ les deux membres,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi'}{c + \cos 2\varphi'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

6° On déduit, de cette valeur :

$$\sin\varphi = \frac{\sin 2\varphi'}{(1+c)\Delta(c', \varphi')}, \quad \cos\varphi = \frac{c + \cos 2\varphi'}{(1+c)\Delta(c', \varphi')}; \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

(*) *Legendre*, t. I, p. 79. On voit qu'il est plus simple de prendre d'abord la relation (20), mise, si l'on veut, sous la forme

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = b' \operatorname{tg}\varphi'.$$

puis, à cause de

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \cos\varphi \cos 2\varphi' + \sin\varphi \sin 2\varphi' :$$

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \frac{c \cos 2\varphi' + 1}{(1 + c)\Delta(c', \varphi')} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Mais

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta(c, \varphi); \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

donc

$$(1 + c)\Delta(c, \varphi)\Delta(c', \varphi') = 1 + c \cos 2\varphi' \text{ (*)}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

7° En différenciant l'équation (21), on a

$$\cos(2\varphi' - \varphi)(2d\varphi' - d\varphi) = c \cos\varphi d\varphi,$$

ou

$$2\Delta(c, \varphi) d\varphi' = \left[c \cos\varphi + \cos(2\varphi' - \varphi)\right] d\varphi.$$

D'après les formules (25), (26), le coefficient de $d\varphi$ est

$$\frac{c^2 + 2c\cos 2\varphi' + 1}{(1 + c)\Delta(c', \varphi')} = \frac{(1 + c)^2 - 4c \sin 2\varphi'}{(1 + c)\Delta(c', \varphi')} = (1 + c)\Delta(c', \varphi');$$

donc l'équation différentielle, entre φ' et φ, se réduit à

$$\frac{d\varphi'}{\Delta(c', \varphi')} = \frac{1 + c}{2} \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

En conséquence,

$$F(c', \varphi') = \frac{1 + c}{2} F(c, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Ce dernier calcul me semble, non plus court, mais plus simple que celui que l'on trouve dans le *Traité des fonctions elliptiques*.

(*) On arrive plus rapidement à cette relation, peut-être nouvelle, en exprimant que P'F *est la somme des projections de* P'F' *et de* FF'.

ADDITION.

V. Éléments d'un quadrilatère sphérique.

18. Dans la figure de la page 13, on a

$$\cos \mathrm{CM} = \cos x \cos x'.$$

Nous avons trouvé

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} x \frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}.$$

Mais :

$$\sin \mathrm{A} = c \sin x, \qquad \cos \mathrm{B} = (\Delta y);$$

donc

$$\operatorname{tg} y' = \frac{(\Delta y)}{c \cos x} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (30)$$

On tire, de cette formule,

$$\sin y' = \frac{(\Delta y)}{\sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}}, \qquad \cos y' = \frac{c \cos x}{\sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}}; \quad (31)$$

puis, par un changement de lettres :

$$\sin x' = \frac{(\Delta x)}{\sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}}, \qquad \cos x' = \frac{c \cos y}{\sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}}. \quad (32)$$

Conséquemment,

$$\cos \mathrm{CM} = \frac{c \cos x \cos y}{\sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}} \quad \dots\dots\dots \quad (33)$$

Il résulte, de cette valeur :

$$\left.\begin{aligned}\sin \mathrm{CM} &= \sqrt{\frac{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}{1 + c^2 - c^2 \sin^2 x + \sin^2 y)}}, \\ \cot \mathrm{CM} &= \frac{c \cos x \cos y}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

19. Représentons par θ, ψ les angles BMC, AMC, dont la somme est AMC $=$ M. Les triangles rectangles BMC, AMC donnent :

$$\cos\theta = \cot \mathrm{MC} \cdot \operatorname{tg} x', \qquad \cos\psi = \cot \mathrm{MC} \cdot \operatorname{tg} y';$$

c'est-à-dire :

$$\cos\theta = \frac{\cos x (\Delta x)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}}, \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

$$\cos\psi = \frac{\cos y (\Delta y)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}}. \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$\sin\theta = \sin x \sqrt{\frac{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

$$\sin\varphi = \sin y \sqrt{\frac{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

20. On a

$$\sin \mathrm{M} = \sin\theta \cos\psi + \cos\theta \sin\psi,$$

ou

$$\sin \mathrm{M} = \sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y} \left[\frac{\sin x \cos y (\Delta y) + \sin y \cos x (\Delta x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right]$$

Le second facteur équivaut à $\sin\mu$.

Donc, finalement,

$$\frac{\sin M}{\sin \mu} = \sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)} \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

(*) Pour vérifier ce résultat, il suffit d'observer que, dans le triangle AMB :

$$\frac{\sin M}{\sin \mu} = \frac{\cos A}{\sin x'} = \frac{(\Delta x)}{\sin x'}.$$