MÉMOIRE

SUR

UNE SUITE DE POLYNÔMES ENTIERS

ET SUR

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Présenté à la Classe des sciences, le 15 décembre 1880.)

MÉMOIRE

SUR

UNE SUITE DE POLYNÔMES ENTIERS

ET SUR

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES (*).

Dans les *Exercices de Schlömilch* (**), on trouve cette formule curieuse :

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \cdots$$

Il est facile de la généraliser. Soit, par exemple,

$$y = 1 + 2^4x + 3^4x^2 + 4^4x^3 + 5^4x^4 + \cdots$$

Si l'on multiplie les deux membres par $(1-x)^5$, l'égalité devient

$$y(1-x)^5 = 1 + 11x + 11x^2 + x^3.$$

(*) Un extrait de ce petit Mémoire a été communiqué au Congrès de Reims.
(**) 1868, p. 201.

En effet, le coefficient de x^4, dans le produit, est

$$5^4 - 5.4^4 + 10.3^4 - 10.2^4 + 5.1^4 = \Delta^5(0^4) = 0.$$

De même, tous les coefficients suivants sont nuls. On est donc conduit au problème suivant, que j'ai proposé, il y a déjà longtemps, aux élèves de l'École des Mines de Liége :

Déterminer A, B, C, ..., G, *de manière que*

$$\frac{1 + Ax + Bx^2 + \cdots + Gx^{p-1}}{(1-x)^{p+1}} = 1 + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \cdots (*).$$

M. Bombled, l'un d'eux, en a donné une solution (**) qui ne laisse rien à désirer, sous le rapport de la simplicité. Le travail actuel a pour objet, surtout, l'étude des polynômes analogues à

$$1 + Ax + Bx^2 + \cdots + Gx^{p-1}.$$

Ces polynômes, qui rappellent les célèbres fonctions X_n, jouissent, comme celles-ci, d'un grand nombre de propriétés remarquables.

Luzarches, 20 juillet 1880.

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, seconde édition, p. 78. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 96. — Tout récemment, j'ai reconnu que le problème général a été traité par Abel (*OEuvres d'Abel*, t. II, p. 41).

(**) *N. C. M.*, t. V, p. 95.

PRÉLIMINAIRES.

1. Sommation d'une série. Soit, en général,

$$y_p = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \cdots + n^p x^{n-1} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Multipliant les deux membres par $(1 - x)^{p+1}$, on trouve, comme il vient d'être indiqué,

$$y_p(1 - x)^{p+1} = 1 + a_p x + b_p x^2 + \cdots + l_p x^{p-2} + x^{p-1}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$a_p, b_p, \ldots, l_p$ étant des *nombres entiers*. Ainsi

$$y_p = \frac{P_p}{(1-x)^{p+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

P_p désignant un polynôme à coefficients *entiers et positifs*, dont le degré est $p - 1$. Les premières valeurs sont :

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 1 + x, \quad P_3 = 1 + 4x + x^2, \quad P_4 = 1 + 11x + 11x^2 + x^3,$$
$$P_5 = 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4,$$
$$P_6 = 1 + 57x + 302x^2 + 302x^3 + 57x^4 + x^5,$$
$$P_7 = 1 + 120x + 1\,191x^2 + 2\,416x^3 + 1\,191x^4 + 120x^5 + x^6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On voit que, dans chacun de ces polynômes, *les coefficients des termes également éloignés des extrêmes sont égaux entre eux*. En outre, pour $x = 1$:

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 1.2, \quad P_3 = 1.2.3, \quad P_4 = 1.2.3.4, \quad \ldots\ldots (^*).$$

(*) Ces propriétés, nous le montrerons bientôt, sont générales. Il résulte, de la première (ou de la théorie des *équations réciproques*), que P_p *est divisible par* $1 + x$ *quand* p *est pair.*

2. Transformation de y_p. On a, par des formules connues :

$$1^p = \Delta(0^p),$$
$$2^p = 2\Delta(0^p) + \Delta^2(0^p),$$
$$3^p = 3\Delta(0^p) + 3\Delta^2(0^p) + \Delta^3(0^p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^p = \frac{n}{1}\Delta(0^p) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2(0^p) + \cdots + \Delta^n(0^p).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y_p = {} & \Delta(0^p)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots) \\ & + x\Delta^2(0^p)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots) \\ & + x^2\Delta^3(0^p)(1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \cdots) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{aligned}$$

ou

$$y_p = \frac{1}{(1-x)^2}\Delta(0^p) + \frac{x}{(1-x)^3}\Delta^2(0^p) + \frac{x^2}{(1-x)^4}\Delta^3(0^p) + \cdots + \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{p+1}}\Delta^p(0^p) \text{ (*)}. \quad (4)$$

3. Autres expressions de P_p. D'après les formules (3), (4) :

$$P_p = (1-x)^{p-1}\Delta(0^p) + (1-x)^{p-2}x\Delta^2(0^p) + \cdots + x^{p-1}\Delta(0^p); \quad \ldots \quad (5)$$

et, si l'on fait

$$\frac{x}{1-x} = t: \quad \ldots \quad (6)$$

$$P_p = (1-x)^{p-1}\left[1 + t\Delta^2(0^p) + t^2\Delta^3(0^p) + \cdots + t^{p-1}\Delta^p(0^p)\right]; \quad \ldots \quad (7)$$

ou encore, en supposant

$$T_p = 1 + t\Delta^2(0^p) + t^2\Delta^3(0^p) + \cdots + t^{p-1}\Delta^p(0^p): \quad \ldots \quad (8)$$

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p-1}}. \quad \ldots \quad (9)$$

(*) Voir, dans la *N. C. M.* (t. VI, p. 283), une Note de M. Leinekugel.

4. Remarques. — I. De la formule (6), on conclut :

$$x = \frac{t}{1+t}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+t}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

puis, au lieu des relations (1), (3) :

$$y_p = 1^p + 2^p \frac{t}{1+t} + 3^p \frac{t^2}{(1+t)^2} + \cdots, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

$$y_p = P_p (1+t)^{p+1};$$

ou, par l'égalité (9) :

$$y_p = T_p (1+t)^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

II. *La série* (11), *à termes fractionnaires, a pour somme un polynôme entier.*

III. Si $t = 1$, x égale $\frac{1}{2}$. Donc, en vertu des formules (1), (12) :

$$1^p + \frac{1}{2} \cdot 2^p + \frac{1}{4} \cdot 3^p + \frac{1}{8} \cdot 4^p + \cdots = \mathfrak{M} \cdot 4.$$

IV. De même, $t = 2, 3, 4, \ldots$ donne $x = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; puis

$$1^p + \frac{2}{3} \cdot 2^p + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3^p + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 4^p + \cdots = \mathfrak{M} \cdot 9,$$

$$1^p + \frac{3}{4} \cdot 2^p + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3^p + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 4^p + \cdots = \mathfrak{M} \cdot 16,$$

$$1^p + \frac{4}{5} \cdot 2^p + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 3^p + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 4^p + \cdots = \mathfrak{M} \cdot 25,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (*).$$

5. Relation entre P_p et P_{p+1}. De l'égalité (1), on tire, en multipliant

(*) Ces propriétés me semblent assez curieuses : ont-elles été remarquées ?

par x, et en prenant les dérivées,

$$(xy_p)' = 1^{p+1} + 2^{p+1}x + 3^{p+1}x^2 + \cdots,$$

ou

$$y_{p+1} = (xy_p)' \text{ (*)}. \qquad (13)$$

Par suite, à cause de la formule (3) :

$$\frac{P_{p+1}}{(1-x)^{p+2}} = \left[\frac{xP_p}{(1-x)^{p+1}}\right]'; \qquad (14)$$

ou, après quelques simplifications,

$$P_{p+1} = (px+1)P_p + (x - x^2)\frac{dP_p}{dx}. \qquad (15)$$

6. Remarque. Si $x = 1$, cette égalité se réduit à

$$P_{p+1} = (p+1)P_p;$$

et celle-ci démontre l'une des propriétés énoncées (1).

7. Pour vérifier l'autre, supposons

$$P_p = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + dx^{p-5} + cx^{p-4} + bx^{p-3} + ax^{p-2} + x^{p-1};$$

puis appliquons la formule (15). Il en résulte :

$$P_{p+1} = 1 + \left.\begin{matrix} 2a \\ + p \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} 3b \\ +(p-1)a \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} 4c \\ +(p-2)b \end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix} 5d \\ +(p-3)c \end{matrix}\right| x^4 + \cdots$$

$$\begin{matrix} +(p-3)c \\ +5d \end{matrix}\left| x^{p-4} + \begin{matrix} (p-2)b \\ +4c \end{matrix}\right| x^{p-3} + \left.\begin{matrix} (p-1)a \\ +3b \end{matrix}\right| x^{p-2} + \left.\begin{matrix} p \\ +2a \end{matrix}\right| x^{p-1} + x^p.$$

Donc, la propriété dont il s'agit, admise pour P_p, subsiste pour P_{p+1}.

(*) Équation aux *différences mêlées*.

8. Relation entre T_p et T_{p+1}. En vertu de la formule (12), on peut écrire ainsi l'égalité (13) :

$$T_{p+1}(1+t)^2 = \frac{d\left[(t+t^2)T_p\right]}{dx}.$$

Mais (4)

$$dx = \frac{dt}{(1+t)^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

donc

$$T_{p+1} = \left[(t+t^2)T_p\right]'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Cette relation remarquable, beaucoup plus simple que la formule (13), donne, comme on le verra, la plupart des propriétés dont jouissent les polynômes P_p et T_p.

9. Valeurs de T_p. D'après la formule (8), $T_1 = 1$; donc :

$$T_2 = (t+t^2)' = 1 + 2t,$$
$$T_3 = \left[(t+t^2)(1+2t)\right]' = 1 + 6t + 6t^2,$$
$$T_4 = \left[(t+t^2)(1+6t+6t^2)\right]' = 1 + 14t + 36t^2 + 24t^3,$$
$$T_5 = \left[(t+t^2)(1+14t+36t^2+24t^3)\right]' = 1 + 30t + 150t^2 + 240t^3 + 120t^4,$$
$$T_6 = 1 + 62t + 540t^2 + 1\,560t^3 + 1\,800t^4 + 720t^5,$$
$$T_7 = 1 + 126t + 1\,806t^2 + 8\,400t^3 + 16\,800t^4 + 15\,120t^5 + 5\,040t^6,$$

etc.

10. Vérifications. Le calcul direct donne

$$\Delta(0^2) = 1, \quad \Delta^2(0^2) = 2;$$
$$\Delta(0^3) = 1, \quad \Delta^2(0^3) = 6, \quad \Delta^3(0^3) = 6;$$
$$\Delta(0^4) = 1, \quad \Delta^2(0^4) = 14, \quad \Delta^3(0^4) = 36, \quad \Delta^4(0^4) = 24;$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Par conséquent (8) :

$$T_2 = 1 + 2t, \quad T_3 = 1 + 6t + 6t^2, \quad T_4 = 1 + 14t + 36t^2 + 24t^3, \quad \text{etc.}$$

II

QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX DIFFÉRENCES.

11. Différences de 0^p. Dans le premier membre de l'égalité

$$T_{p+1} = \left[(t + t^2)T_p\right]', \quad \ldots \quad (17)$$

le coefficient de t^k est, par la formule (8), $\Delta^{k+1}(0^{p+1})$. Dans le second membre, ce coefficient égale

$$(k+1)\Delta^{k+1}(0^p) + (k+1)\Delta^k(0^p).$$

Donc, si l'on change k en $k-1$, p en $p-1$:

$$\Delta^k(0^p) = k\left[\Delta^{k-1}(0^{p-1}) + \Delta^k(0^{p-1})\right]. \quad \ldots \quad (18)$$

Cette formule, probablement connue, donne un moyen simple de construire la *table des différences successives de* 0^p.

12. Différences de 1^p. Si l'on fait attention que *l'identité*

$$\Delta(0^{p-1}) = 1^{p-1} - 0^{p-1},$$

donne

$$\Delta^k(0^{p-1}) = \Delta^{k-1}(1^{p-1}) - \Delta^{k-1}(0^{p-1}),$$

ou

$$\Delta^{k-1}(0^{p-1}) + \Delta^k(0^{p-1}) = \Delta^{k-1}(1^{p-1}), \quad \ldots \quad (19)$$

on trouve

$$\Delta^{k-1}(1^{p-1}) = \frac{1}{k}\Delta^k(0^p). \quad \ldots \quad (20)$$

Ainsi, la *table des différences successives de* 1^{p-1} *se déduit, très aisément, de la table des différences successives de* 0^p (*).

(*) Ce procédé indirect est plus simple que celui dont j'ai fait usage autrefois (*Sur les différences de* 1^p, *et sur le calcul des Nombres de Bernoulli.* — Annali di Matematica. 1859).

13. Autres identités. Dans le Mémoire cité en note, nous avons donné la relation générale

$$u_1 - \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 - \cdots \pm \Delta^k u_1 = u_0 \pm \Delta^{k+1} u_0, \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

dont la démonstration est aussi simple que celle de la formule (19). Il en résulte, en particulier,

$$1^p = \Delta(1^p) - \Delta^2(1^p) + \Delta^3(1^p) - \cdots \pm \Delta^p(1^p) \text{ (*)}. \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

III

FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

14. Fonction génératrice de y_p. Soit

$$u = \frac{1}{1 - e^{\alpha}x} = 1 + e^{\alpha}x + e^{2\alpha}x^2 + e^{3\alpha}x^3 + \cdots \text{ (**)}. \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Ordonnons le second membre suivant les puissances de α (***).

1° Le coefficient de α^0 est $1 + x + x^2 + \cdots\cdots = y_0$;

2° » » » α^1 » $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots\cdots = xy_1$;

3° » » » α^2 » $\frac{1}{1.2}[x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots] = \frac{xy_2}{1.2}$;

. . . .

En général, le coefficient de α^p est $\frac{xy_p}{1.2\ldots p}$.

(*) Le dernier terme est *négatif* quand p est *pair*.

(**) On suppose, bien entendu, le module de $e^{\alpha}x$ inférieur à 1.

(***) *Question* proposée dans la *N. C. M.* (t. VI, p. 192). Si l'exposant α est positif, ainsi que x, le second membre, développé, a tous ses termes positifs. Donc, d'après un théorème de Dirichlet, on peut les grouper arbitrairement. Dans les autres cas, la même conclusion subsiste, à plus forte raison.

Par conséquent,

$$\frac{1}{1-e^{\alpha}x} = y_0 + xy_1\frac{\alpha}{1} + xy_2\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots + xy_p\frac{\alpha^p}{1.2\ldots p} + \cdots, \quad \ldots \quad (24)$$

ou

$$\frac{1}{1-e^{\alpha}x} = \frac{1}{1-x} + \frac{P_1 x}{(1-x)^2}\frac{\alpha}{1} + \frac{P_2 x}{(1-x)^3}\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots + \frac{P_p x}{(1-x)^{p+1}}\frac{\alpha^p}{1.2\ldots p} + \cdots, \quad (25)$$

ou encore, après multiplication par $1-x$,

$$\frac{e^{\alpha}-1}{1-e^{\alpha}x} = \sum_1^{\infty}\frac{P_p}{(1-x)^p}\frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

15. Cas particulier remarquable. Si, dans l'équation (25), on suppose $x = -1$, elle devient

$$\frac{1}{1+e^{\alpha}} = \frac{1}{2} - \frac{P_1}{2^2}\cdot\frac{\alpha}{1} - \frac{P_2}{2^3}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{P_3}{2^4}\cdot\frac{\alpha^3}{1.2.3} - \cdots,$$

pourvu que l'on remplace P_1, P_2, P_3, ... par leurs valeurs.

En premier lieu, $P_p = 0$, si p est pair (1, *note*).

D'autre part, afin d'éviter toute ambiguïté, représentons par g_1, $-g_3$, $+g_5$, ... les résultats de la substitution de -1 à x, dans P_1, P_3, P_5, ...; savoir (1):

$$g_1 = 1, \quad -g_3 = -2, \quad g_5 = 16, \quad -g_7 = -272, \ \ldots\ldots$$

Nous aurons, au lieu de la précédente formule, en multipliant par α:

$$\frac{\alpha}{1+e^{\alpha}} = \frac{\alpha}{1} - \frac{g_1}{2^2}\frac{\alpha^2}{1} + \frac{g_3}{2^4}\frac{\alpha^4}{1.2.3} - \frac{g_5}{2^6}\frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5} + \cdots \quad \ldots \quad (27)$$

Mais, par une formule connue,

$$\frac{\alpha}{1+e^{\alpha}} = \frac{\alpha}{2} - (2^2-1)B_1\frac{\alpha^2}{1.2} - (2^4-1)B_3\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - (2^6-1)B_5\frac{\alpha^6}{1.2\ldots6} - \cdots;$$

B_1, B_3, B_5, ... étant les Nombres de Bernoulli. Donc, en général,

$$g_{2q-1} = \pm \frac{4^q(4^q - 1)}{2q} B_{2q-1} \dots\dots\dots\dots \quad (28)$$

D'après cette formule, les *nombres entiers* g_1, g_3, g_5, ... ne diffèrent pas des nombres y_1, y_3, y_5, ... que j'ai considérés en diverses occasions (*).

16. Remarque. Lorsque $x = \pm 1$, la série (1) devient *divergente*, et, en conséquence, l'égalité

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \cdots$$

n'a plus de sens. Si l'on prétendait l'appliquer encore, on trouverait ces résultats *absurdes*, admis par quelques Géomètres :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \frac{1}{4},$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots = 0;$$

etc. (**).

17. Fonction génératrice de T_p. D'après les formules (9) et (10) :

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p-1}}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+t}, \quad x = \frac{t}{1+t},$$

l'égalité (26) peut être écrite ainsi :

$$\frac{e^\alpha - 1}{1 - t(e^\alpha - 1)} = \sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}; \dots\dots\dots \quad (29)$$

et, lorsque $t = 1$:

$$\frac{e^\alpha - 1}{2 - e^\alpha} = \sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)};$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 127; *Notes d'Algèbre et d'Analyse*, p. 127; etc.
(**) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, p. 3.

ou, plus simplement,

$$\frac{1}{2-e^{\alpha}} = 1 + \sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

18. Remarque. Lorsque $t=1$, les valeurs trouvées ci-dessus (9) se réduisent à $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 13$, $T_4 = 75$, $T_5 = 541$, $T_6 = 4\,683$, $T_7 = 47\,293$, ... Donc la dernière formule, développée, devient

$$\frac{1}{2-e^{\alpha}} = 1 + \frac{\alpha}{1} + 3\frac{\alpha^2}{1.2} + 13\frac{\alpha^3}{1.2.3} + 75\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + 541\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}$$
$$+ 4\,683\frac{\alpha^6}{1.2\ldots 6} + 47\,293\frac{\alpha^7}{1.2\ldots 7} + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Comme les coefficients entiers augmentent fort rapidement, la série n'est pas toujours convergente. En effet, d'après le Théorème de Cauchy, *la fonction* $\frac{1}{2-e^{\alpha}}$ *est développable, suivant les puissances de* α, *seulement pour les valeurs, de cette variable, dont le module est inférieur à* 1.2. Ainsi l'on doit prendre $\alpha < 1.2$, *en valeur absolue.*

19. Équations aux différences finies. Si l'on écrit ainsi l'équation (29) :

$$\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots + \frac{\alpha^p}{1.2\ldots p} + \cdots =$$
$$\left\{1 - t\left[\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots + \frac{\alpha^p}{1.2\ldots p} + \cdots\right]\right\}\left\{T_1\frac{\alpha}{1} + T_2\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots + T_p\frac{\alpha^p}{1.2\ldots p} + \cdots\right\},$$

et que l'on identifie les deux membres, on trouve

$$\frac{1}{1.2\ldots p} = T_p\frac{1}{1.2\ldots p} - t\left\{\frac{T_{p-1}}{1.1.2\ldots\overline{p-1}} + \frac{T_{p-2}}{1.2.1.2\ldots\overline{p-2}} + \cdots + \frac{T_1}{1.2\ldots\overline{p-1}.1}\right\},$$

ou

$$T_p = t\left[\frac{p}{1}T_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}T_{p-2} + \cdots + \frac{p}{1}T_1\right] + 1. \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Cette formule peut tenir lieu de la relation (17); néanmoins, elle est moins simple que celle-ci.

20. Cas particulier. Lorsque $t = 1$:

$$\mathrm{T}_p = \frac{p}{1}\mathrm{T}_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}\mathrm{T}_{p-2} + \cdots + \frac{p}{1}\mathrm{T}_1 + 1. \qquad (33)$$

Au moyen de cette nouvelle formule, on peut calculer les *nombres* T_p, sans déterminer, préalablement, les *polynômes* T_p.

21. Relation entre les différences de 0^p, 0^{p-1}, 0^{p-2}, ... Dans l'égalité (32), remplaçons T_p, T_{p-1}, ... par leurs valeurs, déduites de la formule (8), puis égalons les coefficients de t^k. Nous obtenons ainsi :

$$\Delta^{k+1}(0^p) = \mathrm{C}_{p,1}\Delta^k(0^{p-1}) + \mathrm{C}_{p,2}\Delta^k(0^{p-2}) + \cdots + \mathrm{C}_{p,k}\Delta^k(0^k); \qquad (34)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\Delta^{k+1}(0^p) = \Delta^k\left[\mathrm{C}_{p,1}(0^{p-1}) + \mathrm{C}_{p,2}(0^{p-2}) + \cdots + \mathrm{C}_{p,k}(0^k)\right],$$

ou enfin

$$\Delta^k(1^p) = \Delta^k\left[(0^p) + \mathrm{C}_{p,1}(0^{p-1}) + \mathrm{C}_{p,2}(0^{p-2}) + \cdots + \mathrm{C}_{p,k}(0^k)\right]. \qquad (35)$$

Cette formule est un cas particulier de la relation

$$\Delta^k\left[(x+1)^p\right] = \Delta^k\left[x^p + \mathrm{C}_{p,1}x^{p-1} + \mathrm{C}_{p,2}x^{p-2} + \cdots + \mathrm{C}_{p,k}x^k\right],$$

laquelle est à peu près évidente.

IV

INTÉGRALES DÉFINIES.

22. Transformation de la formule (26). Posons

$$\alpha = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi. \qquad (36)$$

Le second membre de la formule

$$\frac{e^{\alpha}-1}{1-e^{\alpha}x}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_p}{(1-x)^p}\,\frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

devient

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_p}{(1-x)^p}\,\frac{\cos p\varphi+\sqrt{-1}\sin p\varphi}{\Gamma(p+1)}.$$

Le premier membre égale

$$\frac{e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-1}{1-xe^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}}=\frac{(e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-1)(1-xe^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi})}{(1-xe^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi})(1-xe^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi})}.$$

Soit $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$ la seconde fraction. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} &= e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-1-xe^{2c\ \varphi}+xe^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}\\
&= e^{\cos\varphi}\left[(1+x)\cos(\sin\varphi)+\sqrt{-1}\,(1-x)\sin(\sin\varphi)\right]-1-xe^{2\cos\varphi}\\
&= -1+(1+x)e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)-xe^{2\cos\varphi}+\sqrt{-1}\,(1-x)e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= 1-x\left(e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}+e^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}\right)+x^2e^{2\cos\varphi}\\
&= 1-2xe^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+x^2e^{2\cos\varphi}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (26) se partage en

$$\frac{-1+(1+x)e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)-xe^{2\cos\varphi}}{1-2xe^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+x^2e^{2\cos\varphi}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_p}{(1-x)^p}\,\frac{\cos p\varphi}{\Gamma(p+1)},$$

$$\frac{e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)}{1-2xe^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+x^2e^{2\cos\varphi}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_p}{(1-x)^{p+1}}\,\frac{\sin p\varphi}{\Gamma(p+1)};$$

équations que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{-e^{-\cos\varphi}+(1+x)\cos(\sin\varphi)-xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi}-2x\cos(\sin\varphi)+x^2e^{\cos\varphi}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_p}{(1-x)^p}\,\frac{\cos p\varphi}{\Gamma(p+1)}, \quad \ldots \quad (57)$$

$$\frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi}-2x\cos(\sin\varphi)+x^2e^{\cos\varphi}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{P}_p}{(1-x)^{p+1}}\,\frac{\sin p\varphi}{\Gamma(p+1)}. \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

23. Expressions de P_p. Des deux dernières relations, on déduit, par la méthode connue :

$$\frac{P_p}{(1-x)^p} = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{-e^{-\cos\varphi}+(1+x)\cos(\sin\varphi)-xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi}-2x\cos(\sin\varphi)+x^2e^{\cos\varphi}}\cos p\varphi d\varphi, \quad . \quad (39)$$

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = y_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi}-2x\cos(\sin\varphi)+x^2e^{\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi. \quad . \quad (40)$$

Ainsi, en particulier, la série

$$1^p + 2^p x + 3^p x^2 + \cdots + n^p x^{n-1} + \cdots$$

est exprimée par une intégrale définie. Ce résultat nous servira plus loin.

24. Remarques. — I. La comparaison des deux expressions de P_p donne

$$\int_0^\pi \frac{-e^{-\cos\varphi}+(1+x)\cos(\sin\varphi)-xe^{\cos\varphi}}{e^{-\cos\varphi}-2x\cos(\sin\varphi)+x^2e^{\cos\varphi}}\cos p\varphi d\varphi = (1-x)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi}{e^{-\cos\varphi}-2x\cos(\sin\varphi)+x^2e^{\cos\varphi}}. (41)$$

II. Quand x égale zéro, y_p se réduit à 1; donc

$$\int_0^\pi e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

III. Par suite, la formule (39) devient

$$\int_0^\pi \left[-1+e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)\right]\cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)};$$

ou, plus simplement,

$$\int_0^\pi e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)\cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

IV. Si l'on remplace φ par $\pi - \varphi$, on déduit, des deux dernières égalités :

$$\int_0^\pi (e^{\cos\varphi}+e^{-\cos\varphi})\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)}, \quad (p \textit{ impair}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

$$\int_0^\pi (e^{\cos\varphi}+e^{-\cos\varphi})\cos(\sin\varphi)\cos p\varphi d\varphi = \frac{\pi}{\Gamma(p+1)}, \quad (p \textit{ pair}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

V. Si, dans la formule (40), on substitue $\frac{t}{1+t}$ à x, elle se transforme en

$$y_p = \frac{2}{\pi}(1+t)^2\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi}{(1+t)^2 e^{-\cos\varphi} - 2t(1+t)\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{\cos\varphi}}.$$

Et comme

$$y_p = \mathrm{T}_p(1+t)^2, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

on a

$$\mathrm{T}_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi}{(1+t)^2 e^{-\cos\varphi} - 2t(1+t)\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{\cos\varphi}} (^*). \quad \ldots \quad (46)$$

VI. Cette relation se simplifie dans deux cas particuliers :

1° Lorsque $t = 1$,

$$\mathrm{T}_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi}{4e^{-\cos\varphi} - 4\cos(\sin\varphi) + e^{\cos\varphi}}: \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

le premier membre est alors un *nombre entier*;

2° Si $t = -1$, $\mathrm{T}_p = (-1)^{p-1}$ (**). Donc

$$\int_0^\pi e^{-\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi = \pm\frac{\pi}{2\Gamma(p+1)} (^{***}). \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

VII. Enfin, si p est *pair*, il résulte, des formules (42) et (48) :

$$\int_0^\pi (e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi})\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi = 0; \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

résultat visible.

25. Autre intégrale définie. On a, par une formule connue,

$$\frac{\sin(\sin\varphi)}{1 - 2xe^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{2\cos\varphi}} = \sum_0^\infty x^n e^{n\cos\varphi}\sin(\overline{n+1}\sin\varphi).$$

(*) Il est remarquable que cette intégrale se réduise à un *polynôme entier*.

(**) Cette propriété, presque évidente, sera démontrée plus loin.

(***) + si p est *impair*.

Donc, si l'on développe, suivant les puissances de x, le second membre de l'équation

$$y_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)}{1-2xe^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+x^2e^{2\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi, \quad . \ . \ . \quad (40)$$

le coefficient de x^{n-1} sera

$$\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi e^{n\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi.$$

Dans le premier membre, ce coefficient est n^p. Conséquemment,

$$n^p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi e^{n\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi \ (^*). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (50)$$

V

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS.

26. Première expression de S_p. D'après les relations (1), (2) et la propriété démontrée (7) :

$$\begin{gathered} 1^p + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \cdots = \\ \left[1 + a_p x + b_p x^2 + c_p x^3 + \cdots + c_p x^{p-4} + b_p x^{p-3} + a_p x^{p-2} + x^{p-1}\right] \times \\ \left[1 + C_{p+1,1}x + C_{p+2,2}x^2 + \cdots + C_{p+n-1,n-1}x^{n-1} + \cdots\right]. \end{gathered}$$

Si l'on effectue le produit, et que l'on identifie avec le premier membre, on trouve

$$n^p = C_{p+n-1,p} + a_p C_{p+n-2,p} + b_p C_{p+n-3,p} + \cdots + C_{n,p} \ (^{**}). \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (51)$$

(*) Après avoir trouvé cette formule, j'ai reconnu qu'elle a été donnée par Poisson, dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies* (Journal de l'École polytechnique, XIXe Cahier, p. 493).

(**) Cette égalité suppose $n \overline{\overline{>}} p$. Dans le cas contraire, le dernier terme est celui qui contient $C_{p,p} = 1$.

Changeant n en $n-1$, $n-2$, ..., 1, et ajoutant, on obtient

$$S_p = C_{p+n,p+1} + a_p C_{p+n-1,p+1} + b_p C_{p+n-2,p+1} + \cdots + C_{n+1,p+1} \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

27. Remarque. De

$$P_p = 1 + a_p x + b_p x^2 + c_p x^3 + \cdots + a_p x^{p-2} + x^{p-1},$$

ou

$$x^{n+1} P_p = x^{n+1} + a_p x^{n+2} + b_p x^{n+3} + \cdots + a_p x^{n+p-1} + x^{n+p},$$

on conclut

$$\frac{d^{p+1}\left[x^{n+1}P_p\right]}{dx^{p+1}} = (n+1)n\ldots(n-p+1)x^{n-p} + (n+2)(n+1)\ldots(n-p+2)a_p x^{n-p+1} + \cdots;$$

puis, au lieu de la formule (52) :

$$S_p = \frac{1}{\Gamma(p+2)} \frac{d^{p+1}\left[x^{n+1}P_p\right]}{dx^{p+1}} (x=1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Si, par exemple, $n=5$, $p=3$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= \tfrac{1}{24}\left[6.5.4.3 + 4.7.6.5.4 + 8.7.6.5\right] \\ &= 15 + 140 + 70 = 225; \end{aligned}$$

ce qui est exact.

28. Valeurs des coefficients a_p, b_p, c_p, ... Dans l'égalité

$$y_p(1-x)^{p+1} = 1 + a_p x + b_p x^2 + \cdots + b_p x^{p-2} + x^{p-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

remplaçons y_p par sa valeur, puis effectuons la multiplication indiquée. En identifiant, nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned} a_p &= 2^p - C_{p+1,1} \cdot 1^p, \\ b_p &= 3^p - C_{p+1,1} \cdot 2^p + C_{p+1,2} \cdot 1^p, \\ c_p &= 4^p - C_{p+1,1} \cdot 3^p + C_{p+1,2} \cdot 2^p - C_{p+1,3} \cdot 1^p, \\ d_p &= 5^p - C_{p+1,1} \cdot 4^p + C_{p+1,2} \cdot 3^p - C_{p+1,3} \cdot 2^p + C_{p+1,4} \cdot 1^p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

(*) Formule analogue à celle que j'ai donnée dans les *Nouvelles Annales* (t. XV), mais peut-être un peu plus simple.

mais ces formules sont peu commodes. Il vaut mieux employer celles-ci :

$$a_p = 2a_{p-1} + (p-1), \quad b_p = 3b_{p-1} + (p-2)a_{p-1}, \quad c_p = 4c_{p-1} + (p-3)b_{p-1}, \quad \ldots, \tag{55}$$

démontrées précédemment (7). Il en résulte le tableau suivant :

p		a_p	b_p	c_p	d_p	e_p	f_p	g_p
2	1	1						
3	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	302	302	57	1		
7	1	120	1 191	2 416	1 191	120	1	
8	1	247	4 293	16 619	16 619	4 293	247	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

29. Remarque. Soit, pour fixer les idées, $p = 6$. Alors, par les formules (54) :

$$a_6 = 2^6 - 7 = 57, \quad b_6 = 3^6 - 7.2^6 + 21 = 302,$$
$$c_6 = 4^6 - 7.3^6 + 21.2^6 - 35 = 302 = b_6,$$
$$d_6 = 5^6 - 7.4^6 + 21.3^6 - 35.2^6 + 35 = 57 = a_6.$$

En général,

$$\left.\begin{array}{r} n^p - C_{p+1,1}(n-1)^p + C_{p+1,2}(n-2)^p - C_{p+1,3}(n-3)^p + \cdots = \\ (p-n+1)^p - C_{p+1,1}(p-n)^p + C_{p+1,2}(p-n-1)^p - C_{p+1,3}(p-n-2) + \cdots \end{array}\right\} \tag{56}$$

Par exemple,

$$4^9 - 10.3^9 + 45.2^9 - 120 = 6^9 - 10.5^9 + 45.4^9 - 120.3^9 + 210.2^9 - 252,$$

ou

$$262\,144 - 10.19\,683 + 45.512 - 120 =$$
$$10\,077\,696 - 10.1\,953\,125 + 45.262\,144 - 120.19\,683 + 210.512 - 252,$$

ou

$$10\,077\,696 - 19\,531\,250 + 11\,534\,336 - 2\,165\,130 + 84\,480 - 132 = 0,$$

ou enfin

$$21\,696\,512 - 21\,696\,512 = 0.$$

30. Autres expressions de a_p, b_p, c_p, ... Nous avons trouvé

$$P_p = (1-x)^{p-1}\Delta(0^p) + (1-x)^{p-2}x\Delta^2(0^p) + \cdots + x^{p-1}\Delta^p(0^p). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}
a_p &= -\frac{p-1}{1}\Delta(0^p) + \Delta^2(0^p),\\
b_p &= \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\Delta(0^p) - \frac{p-2}{1}\Delta^2(0^p) + \Delta^3(0^p),\\
c_p &= -\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}\Delta(0^p) + \frac{(p-2)(p-3)}{1.2}\Delta^2(0^p) - \frac{p-3}{1}\Delta^3(0^p) + \Delta^4(0^p),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

31. Seconde expression de S_p. D'après la formule

$$n^p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} e^{n\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

on a

$$n^p = -\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\,\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} e^{n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}\sin p\varphi d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

pourvu que l'on néglige la partie réelle de l'intégrale. Avec la même restriction, on peut donc écrire

$$S_p = -\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\,\Gamma(p+1)\int_0^{\pi}\frac{e^{(n+1)(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}-1}{e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-1}\sin p\varphi d\varphi.$$

La fraction égale

$$\frac{\left[e^{(n+1)(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}-1\right]\left[e^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}-1\right]}{\left(e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-1\right)\left(e^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}-1\right)}$$

$$=\frac{e^{(n+2)\cos\varphi+n\sqrt{-1}\sin\varphi}-e^{(n+1)(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}-e^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}+1}{e^{2\cos\varphi}-e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-e^{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}+1}.$$

La partie *imaginaire* de celle-ci est

$$\sqrt{-1}\,\frac{e^{(n+1)\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi)-e^{n\cos\varphi}\sin(\overline{n+1}\sin\varphi)+\sin(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi}-2\cos(\sin\varphi)+e^{-\cos\varphi}}.$$

La formule ci-dessus devient donc

$$S_p=\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi\frac{e^{(n+1)\cos\varphi}\sin(n\sin\varphi)-e^{n\cos\varphi}\sin(\overline{n+1}\sin\varphi)+\sin(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi}-2\cos(\sin\varphi)+e^{-\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi\,(^*). \quad (59)$$

32. Cas particulier. Pour $n=1$, la fraction se réduit à

$$\frac{e^{2\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)-e^{\cos\varphi}\sin(2\sin\varphi)+\sin(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi}-2\cos(\sin\varphi)+e^{-\cos\varphi}}=e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi).$$

Et comme $S_p=1$, on a ce résultat remarquable, signalé ci-dessus :

$$\int_0^\pi e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2\Gamma(p+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

33. Remarque. Les formules (50), (58), (59) sont en défaut pour $p=0$. C'est à quoi l'on devait s'attendre : les équations (37), (38), d'où elles sont tirées, supposent $p \overline{\gtrdot} 1$.

34. Expressions de $\Delta^n(0^p)$, en intégrale définie. On a, comme l'on sait,

$$\Delta^n(0^p)=n^p-\frac{n}{1}(n-1)^p+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^p-\cdots\pm\frac{n}{1}.1^p.$$

Donc, par la formule

$$n^p=-\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\,\Gamma(p+1)\int_0^\pi e^{n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}\sin p\varphi d\varphi : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

(*) Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, XIX[e] Cahier, p. 493. L'illustre Géomètre a cherché la *valeur de l'intégrale définie*, tandis que je me suis proposé de *transformer* S_p *en intégrale définie*. La concordance des résultats permet de supposer qu'ils sont exacts.

$$\Delta^n(0^p) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\,\Gamma(p+1)\int_0^\pi \left[e^{n\alpha} - \frac{n}{1}e^{(n-1)\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)\alpha} - \cdots \pm \frac{n}{1}e^{\alpha}\right]\sin p\varphi d\varphi;$$

α représentant $\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$.

La fonction entre parenthèses égale $(e^{\alpha} - 1)^n \pm 1$. Ainsi

$$\Delta^n(0^p) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\,\Gamma(p+1)\int_0^\pi \left\{\left[e^{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} - 1\right]^n \pm 1\right\}\sin p\varphi d\varphi; \quad . \quad . \quad (60)$$

pourvu que l'on néglige, toujours, la partie *réelle* de l'intégrale (*).

Posons

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = e^{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi} - 1 = e^{\cos\varphi}\left[\cos(\sin\varphi) + \sqrt{-1}\sin(\sin\varphi)\right] - 1,$$

ou

$$\rho\cos\theta = e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) - 1, \quad \rho\sin\theta = e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

ou encore :

$$\rho^2 = e^{\cos\varphi} - 2e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) + 1, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sin(\sin\varphi)}{\cos(\sin\varphi) - e^{\cos\varphi}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

L'intégrale ci-dessus est transformée en

$$\int_0^\pi \left\{\rho^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta) \pm 1\right\}\sin p\varphi d\varphi.$$

Par conséquent,

$$\Delta^n(0^p) = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \rho^n \sin n\theta \sin p\varphi d\varphi\ (^{**}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

(*) On peut donc, si l'on veut, faire abstraction du terme $\pm\sin p\varphi$.

(**) Dans son *Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies* (Journal de l'École polytechnique, XXVIII^e Cahier), Cauchy donne des expressions de $\Delta^m(0^s)$, lesquelles, en général, me paraissent inexactes. Par exemple, à la page 216, on lit :

$$« \ \Delta^n s^a = \frac{2^{m+1}\Gamma(a+1)\cos\frac{a+1}{2}\pi}{x^{a+1}} \int \frac{\sin^m \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{2s+m}{2}x + \frac{m}{2}\pi\right)}{\pi}dx,$$

$$» \ \Delta^m s^a = \frac{2^{m+1}\Gamma(a+1)\sin\frac{a+1}{2}\pi}{x^{a+1}} \int \frac{\sin^m \frac{1}{2}x \sin\left(\frac{2s+m}{2}x + \frac{m}{2}\pi\right)}{\pi}dx. \ »$$

Si, après avoir corrigé *l'étonnante* faute typographique contenue dans ces formules, on sup-

35. Autre expression de T_p, en intégrale définie. Des formules (8) et (63), on conclut

$$T_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \rho \sin p\varphi . A_p . d\varphi,$$

en supposant

$$A_p = \sin\theta + t\rho\sin 2\theta + t^2\rho^2\sin 3\theta + \cdots + t^{p-1}\rho^{p-1}\sin p\theta.$$

Mais, par une formule connue (que l'on pourrait déduire du calcul précédent) :

$$A_p = \frac{\sin\theta - t^p\rho^p\sin(p+1)\theta + t^{p+1}\rho^{p+1}\sin p\theta}{1 - 2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2} \ (^*).$$

Conséquemment,

$$T_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \rho\frac{\sin\theta - t^p\rho^p\sin(p+1)\theta + t^{p+1}\rho^{p+1}\sin p\theta}{1 - 2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2}\sin p\varphi d\varphi. \quad . \quad . \quad (64)$$

36. Remarques. — I. En appliquant les formules (63), (64), on ne doit pas oublier que

$$\rho\cos\theta = e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) - 1, \quad \rho\sin\theta = e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

etc.

pose $s = 0$, elles deviennent

$$\Delta^m(0^a) = \frac{1}{\pi}2^{m+1}\Gamma(a+1)\cos\frac{a+1}{2}\pi\int_0^\infty \frac{\sin^m\frac{x}{2}\cos\frac{m}{2}(\pi+x)}{x^{a+1}}dx,$$

$$\Delta^m(0^a) = \frac{1}{\pi}2^{m+1}\Gamma(a+1)\sin\frac{a+1}{2}\pi\int_0^\infty \frac{\sin^m\frac{x}{2}\sin\frac{m}{2}(\pi+x)}{x^{a+1}}dx.$$

Or, $\cos\frac{a+1}{2}\pi$ est *nul* lorsque a est *pair;* $\sin\frac{a+1}{2}\pi$ est *nul* lorsque a est *impair*; donc ces égalités sont *inadmissibles.*

(*) Pour *vérifier* cette formule, évidente lorsque $p = 1$, il suffit d'employer l'*identité :*

$$\sin(p+1)\theta = \frac{t^2\rho^2\sin(p+1)\theta - t\rho[\sin(p+2)\theta + \sin p\theta] + \sin(p+1)\theta}{1 - 2t\rho\cos\theta + t^2\rho^2}.$$

II. Nous avons trouvé, précédemment,

$$T_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi)}{(1+t)^2 e^{-\cos\varphi} - 2t(1+t)\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi. \quad . \quad (46)$$

Dans la première expression, le coefficient de $\sin p\varphi d\varphi$ est

$$\frac{e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi) - t^p\rho^{p+1}\sin(p+1)\theta + t^{p+1}\rho^{p+2}\sin p\theta}{1 - 2t\left[e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) - 1\right] + t^2\left[e^{2\cos\varphi} - 2e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) + 1\right]}$$

$$= \frac{\sin(\sin\varphi) - t^p\rho^{p+1}e^{-\cos\varphi}\sin(p+1)\theta + t^{p+1}\rho^{p+2}e^{-\cos\varphi}\sin p\theta}{(1+t)^2 e^{-\cos\varphi} - 2t(1+t)\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{\cos\varphi}}.$$

Ainsi, au lieu de la formule (64), on peut adopter celle-ci :

$$T_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi \frac{\sin(\sin\varphi) - t^p\rho^{p+1}e^{-\cos\varphi}\sin(p+1)\theta + t^{p+1}\rho^{p+2}e^{-\cos\varphi}\sin p\theta}{(1+t)^2 e^{-\cos\varphi} - 2t(1+t)\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi. \quad (65)$$

Il en résulte, par la comparaison avec la valeur (46) :

$$\int_0^\pi \rho^{p+1}\frac{t\rho\sin p\theta - \sin(p+1)\theta}{(1+t)^2 - 2t(1+t)e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{2\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi = 0\ (^*). \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

VI

APPLICATION AUX NOMBRES DE BERNOULLI.

37. Première expression de B_{p-1}. Suivant la définition de Lacroix (**), *le* $(p-1)^{\text{ième}}$ *nombre de Bernoulli*, B_{p-1}, *est le coefficient de* n, *dans le*

(*) Le calcul précédent a été effectué de diverses manières : il y a donc lieu de croire que la dernière formule est exacte. Néanmoins, il me paraît difficile de la démontrer *a priori*, même si l'on suppose $p=1$, $t=0$.

(**) Il y a, aujourd'hui, au moins *quatre* définitions différentes des *Nombres de Bernoulli*; c'est pourquoi, afin d'éviter toute équivoque, j'énonce celle dont je continue à faire usage.

développement de S_p; savoir (52) :

$$B_{p-1} = \frac{1}{1.2\ldots p(p+1)}\left[p(p-1)\ldots 1-(p-1)(p-2)\ldots 1.1.a_p+(p-2)(p-3)\ldots 1.1.2b_p-\cdots\pm 1.2.3\ldots(p-1)\right] \text{(*)},$$

ou

$$B_{p-1} = \frac{1}{p+1}\left[1-\frac{1}{p}a_p+\frac{1.2}{p(p-1)}b_p-\frac{1.2.3}{p(p-1)(p-2)}c_p+\cdots-\frac{1}{p}\right]. \quad (67)$$

Cette formule donne, successivement,

$$B_1 = \frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{5}\left[1-\frac{11}{4}+\frac{11}{6}-\frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{1}{7}\left[1-\frac{57}{6}+\frac{302}{15}-\frac{302}{20}+\frac{57}{15}-\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{42},$$

etc.

38. Expression de B_{p-1}, en intégrale définie. Le second membre de l'avant-dernière formule peut être écrit ainsi :

$$\frac{1}{\Gamma(p+2)}\left[\Gamma(p+1)\Gamma(1)-\Gamma(p)\Gamma(2)a_p+\Gamma(p-1)\Gamma(3)b_p-\cdots-\Gamma(2)\Gamma(p)\right].$$

En général,

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}} \text{(**)};$$

donc

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1)}{\Gamma(p+2)} = \int_0^\infty \frac{x^p dx}{(1+x)^{p+2}}, \quad \frac{\Gamma(p)\Gamma(2)}{\Gamma(p+2)} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+2}}, \ldots\ldots$$

$$\frac{\Gamma(2)\Gamma(p)}{\Gamma(p+2)} = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x)^{p+2}}.$$

(*) Si p est *impair*, $B_{p-1} = 0$. Nous supposerons donc que p soit *pair*. Dans ce cas, le dernier terme est *négatif*.

(**) Bierens de Haan, t. XVIII.

La quantité précédente devient

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^{p+2}}\left[x^{p-1} - a_p x^{p-2} + b_p x^{p-3} - \cdots - 1\right];$$

ou, par le changement de x en $-x$:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{(1-x)^{p+2}}\left[x^{p-1} + a_p x^{p-2} + b_p x^{p-3} + \cdots + 1\right].$$

Le polynôme entre parenthèses est P_p. Ainsi déjà

$$B_{p-1} = \int_{-\infty}^0 \frac{P_p x dx}{(1-x)^{p+2}} \text{ (*)}. \qquad (68)$$

39. Suite. Pour simplifier cette expression, j'emploie les relations

$$P_p = \frac{T_p}{(1+t)^{p-1}}, \quad x = \frac{t}{1+t}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+t}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Il en résulte

$$B_{p-1} = \int_{-1}^0 T_p t dt. \qquad (69)$$

Mais

$$T_p = 1 + t\Delta^2(0^p) + t^2\Delta^3(0^p) + \cdots + t^{p-1}\Delta^p(0^p); \qquad (8)$$

donc

$$B_{p-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Delta^2(0^p) - \frac{1}{4}\Delta^3(0^p) + \frac{1}{5}\Delta^4(0^p) - \cdots + \frac{1}{p+1}\Delta^p(0^p). \qquad (70)$$

Cette formule, *peut-être* nouvelle, ne diffère pas, au fond, de celle-ci :

$$B_{p-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \cdots - \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}) \text{ (**)}. \qquad (71)$$

(*) Si je ne me trompe, cette formule est la première qui donne les Nombres de Bernoulli sous la forme d'une intégrale de *différentielle algébrique*.

(**) *Sur les différences de* 1^p, *et sur le calcul des Nombres de Bernoulli.*

En effet, à cause de

$$\Delta^k(0^p) = k\Delta^{k-1}(1^{p-1}), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

la première équivaut à

$$B_{p-1} = -\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{3}\right)\Delta(1^{p-1}) - \left(1-\frac{1}{4}\right)\Delta^2(1^{p-1}) + \cdots + \left(1-\frac{1}{p+1}\right)\Delta^{p-1}(1^{p-1}),$$

égalité que l'on peut écrire ainsi :

$$\begin{aligned} B_{p-1} = {} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \cdots - \frac{1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}) \\ & - 1 + \Delta(1^{p-1}) - \Delta^2(1^{p-1}) + \cdots + \Delta^{p-1}(1^{p-1}). \end{aligned}$$

Or, la seconde ligne est nulle (21).

40. Combinaisons des valeurs précédentes. Des formules (70), (71), on conclut, par l'application de l'égalité (20) :

$$\left.\begin{aligned} 2B_{p-1} &= \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) - \frac{2}{4}\Delta^2(1^{p-1}) + \frac{3}{5}\Delta^3(1^{p-1}) - \cdots\cdots + \frac{p-1}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ 3B_{p-1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) + \frac{2}{5}\Delta^3(1^{p-1}) - \frac{3}{6}\Delta^4(1^{p-1}) + \cdots + \frac{p-2}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ 4B_{p-1} &= 1 - \frac{1}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{5}\Delta^3(1^{p-1}) - \frac{2}{6}\Delta^4(1^{p-1}) + \cdots + \frac{p-3}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ 5B_{p-1} &= \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \frac{1}{6}\Delta^4(1^{p-1}) + \cdots + \frac{p-4}{p+1}\Delta^{p-1}(1^{p-1}), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p+1)B_{p-1} &= \frac{p-1}{2} - \frac{p-2}{3}\Delta(1^{p-1}) + \frac{p-3}{4}\Delta^2(1^{p-1}) - \cdots + \frac{1}{p}\Delta^{p-2}(1^{p-1}). \end{aligned}\right\} (72)$$

41. Autre expression de B_{p-1}, en intégrale définie. Reprenons les formules

$$B_{p-1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{P_p x dx}{(1-x)^{p+2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

$$\frac{P_p}{(1-x)^{p+1}} = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi}{e^{-\cos\varphi} - 2x\cos(\sin\varphi) + x^2 e^{\cos\varphi}}. \quad \ldots \quad (40)$$

Il en résulte

$$-B_{p-1}=\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi e^{-\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi d\varphi\int_{-\infty}^0\frac{xdx}{(x-1)\left[x^2-2xe^{-\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+e^{-2\cos\varphi}\right]}.$$

L'intégrale indéfinie, relative à x, a la forme

$$\mathrm{A}l(x-1)+\mathrm{B}l\left[x^2-2xe^{-\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+e^{-2\cos\varphi}\right]+\mathrm{C}.\operatorname{arc\,tg}\frac{x-e^{-\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)}{e^{-\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)}.$$

On trouve

$$\mathrm{A}=\frac{1}{1-2e^{-\cos\varphi}\cos(\sin\varphi)+e^{-2\cos\varphi}},\quad \mathrm{A}+2\mathrm{B}=0,\quad \mathrm{C}=\mathrm{A}\frac{e^{-\cos\varphi}-\cos(\sin\varphi)}{\sin(\sin\varphi)};$$

puis, tous calculs faits :

$$-B_{p-1}=\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi\frac{e^{-\cos\varphi}\sin\varphi+\sin(\sin\varphi-\varphi)}{e^{\cos\varphi}-2\cos(\sin\varphi)+e^{-\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi. \quad .\ .\ .\ . \quad (73)$$

42. Remarque. En partant de la formule

$$S_p=-\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\,\Gamma(p+1)\int_0^\pi\frac{e^{(n+1)(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}-1}{e^{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}-1}\sin p\varphi d\varphi \ (\mathbf{31}),$$

développant suivant les puissances de n, et prenant le coefficient de la première puissance, j'obtiens

$$B_{p-1}=\frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^\pi\frac{e^{\cos\varphi}\sin\varphi-\sin(\sin\varphi+\varphi)}{e^{\cos\varphi}-2\cos(\sin\varphi)+e^{-\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi, \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (74)$$

expression qui s'accorde avec la première. En effet, la combinaison des deux conduit à l'égalité

$$0=\int_0^\pi\frac{(e^{\cos\varphi}+e^{-\cos\varphi})\sin\varphi-2\sin\varphi\cos(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi}-2\cos(\sin\varphi)+e^{-\cos\varphi}}\sin p\varphi d\varphi,$$

ou

$$0=\int_0^\pi\sin\varphi\sin p\varphi d\varphi.$$

Or, p étant *pair*,

$$\sin(\pi - \alpha)\sin(p\pi - p\alpha) = -\sin\alpha \sin p\alpha;$$

etc.

VII

PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES T_p.

43. Première propriété. 1° *L'équation* $T_p = 0$ *a toutes ses racines réelles ;* 2° *ces racines, comprises entre* -1 *et* 0, *sont séparées par les racines de* $T_{p-1} = 0$ (*).

Considérons l'équation $T_3 = 0$, ou

$$6t^2 + 6t + 1 = 0.$$

Les deux racines, $-a$ et $-b$, sont : 1° *réelles;* 2° *comprises entre* -1 *et* 0. Conséquemment, *les quatre racines* de l'équation

$$(t^2 + t)(6t^2 + 6t + 1) = 0$$

jouissent des mêmes propriétés.

Cela posé, on a

$$T_4 = \left[(t^2 + t)(6t^2 + 6t + 1)\right]'; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

donc, par le théorème de Rolle, les quantités -1, $-a$, $-b$, 0 séparent les racines de $T_4 = 0$: *ces trois racines sont réelles.* Le raisonnement est général; ainsi la proposition peut être regardée comme démontrée.

44. Deuxième propriété. *Si* p *est pair,* T_p, T''_p, T^{IV}_p, ... *sont divisibles par* $2t + 1$; *et, si* p *est impair,* T'_p, T'''_p, T^{V}_p, ... *sont divisibles par ce binôme.*

(*) Cette théorie est toute semblable à celle de l'équation $X_n = 0$. (*Mémoire sur les fonctions* X_n, *de Legendre*, p. 51.)

De la formule

$$T_p = [(t^2 + t)T_{p-1}]', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ou

$$T_p = (t^2 + t)T'_{p-1} + (2t + 1)T_{p-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17^{bis})$$

on tire :

$$T'_p = (t^2 + t)T''_{p-1} + 2(2t + 1)T'_{p-1} + 2T_{p-1},$$

$$T''_p = (t^2 + t)T'''_{p-1} + 3(2t + 1)T''_{p-1} + 6T'_{p-1},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \;;$$

et, pour $t = -\frac{1}{2}$:

$$T_p = -\frac{1}{4} T'_{p-1},$$

$$T'_p = -\frac{1}{4} T''_{p-1} + 2T_{p-1},$$

$$T''_p = -\frac{1}{4} T'''_{p-1} + 6T'_{p-1},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

1° *Si l'on a :*

$$T'_{p-1} = 0, \quad T'''_{p-1} = 0, \quad T^{\mathrm{v}}_{p-1} = 0, \quad \ldots\ldots,$$

on aura, aussi :

$$T_p = 0, \quad T''_p = 0, \quad T^{\mathrm{iv}}_p = 0, \quad \ldots\ldots;$$

2° *Si l'on a :*

$$T_{p-1} = 0, \quad T''_{p-1} = 0, \quad T^{\mathrm{iv}}_{p-1} = 0, \quad \ldots\ldots,$$

on aura, aussi :

$$T'_p = 0, \quad T'''_p = 0, \quad T^{\mathrm{v}}_p = 0, \quad \ldots\ldots$$

Or,

$$T'_3 = 0, \quad T'''_3 = 0, \quad T^{\mathrm{v}}_3 = 0, \quad \ldots\ldots;$$

donc

$$T_4 = 0, \quad T''_4 = 0, \quad T^{\mathrm{iv}}_4 = 0, \quad \ldots\ldots,$$

puis

$$T'_5 = 0, \quad T'''_5 = 0, \quad T^{\mathrm{v}}_5 = 0, \quad \ldots\ldots,$$

etc.

45. Troisième propriété (*). *Pour* $t = -1$, $T_p = \mp 1$, *selon que* p *est pair ou impair.*

De l'équation

$$T_p = (t^2 + t)T'_{p-1} + (2t + 1)T_{p-1},$$

on conclut encore, en faisant $t = -1$:

$$T_p = -T_{p-1}.$$

Or, pour cette valeur de t, $T_2 = -1$; donc

$$T_3 = +1, \quad T_4 = -1, \quad \text{etc.}$$

46. Remarque. Cette propriété peut être ainsi énoncée :

Le reste de la division de T_p, *par* $t + 1$, *est* ± 1.

47. Quatrième propriété. *Si* $-k$, $-l$ *sont deux racines quelconques de* $T_{p-1} = 0$, *on a*

$$\int_{-k}^{-l} T_p dt = 0 \text{ (**)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

Cette formule résulte, immédiatement, de l'égalité

$$T_p = [(t + t^2)T_{p-1}]' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

48. Remarque. On a aussi, à cause du facteur $t + t^2$:

$$\int_{-1}^{0} T_p dt = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

pourvu que p surpasse l'unité.

49. Cinquième propriété. *Les racines de l'équation* $T_p = 0$ *sont conjuguées deux à deux, de manière que leur somme égale* -1.

Soit Z_p ce que devient T_p quand on fait $t = -\frac{1}{2} + z$.

L'égalité (17) se transforme en

$$Z_p = [(z^2 - \tfrac{1}{4})Z_{p-1}]'.$$

(*) Indiquée ci-dessus (p. 18).

(**) Nouvelle analogie entre les polynômes T_p et les fonctions X_n. (*Mémoire sur les fonctions* X_n *de Legendre*, p. 44.)

En partant de $Z_2 = 2z$, on trouve

$$Z_3 = 6z^2 - \tfrac{1}{2}, \quad Z_4 = 24z^3 - 4z, \quad \ldots\ldots$$

Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on reconnaît que :

1° *Les racines de* $Z_p = 0$ *sont, deux à deux, égales et de signes contraires ;*

2° *Si* p *est pair, cette équation a une racine nulle.*

Cette remarque démontre la propriété énoncée.

VIII

RELATIONS SIMPLES ENTRE DEUX SÉRIES.

50. D'après un théorème de M. Holmboë (*), si l'on fait

$$u = \frac{1}{1 - e^{\alpha} x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

on a, *identiquement*,

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + 3\frac{du}{d\alpha} + 2u = 2u^3. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

Nous avons trouvé

$$u = \frac{1}{1-x} + \frac{P_1 x}{(1-x)^2}\frac{\alpha}{1} + \frac{P_2 x}{(1-x)^3}\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{P_3 x}{(1-x)^4}\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots; \quad \ldots \quad (25)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$u = 1 + t + (t + t^2)\left[T_1\frac{\alpha}{1} + T_2\frac{\alpha^2}{1.2} + T_3\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots\right] (^{**}). \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

(*) *OEuvres d'Abel*, t. II, p. 274. — *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 381.

(**) Cette formule ne diffère pas, au fond, de la relation (29); mais, pour la solution du problème actuel, elle est plus commode que celle-ci.

Par conséquent :

$$\frac{du}{d\alpha} = (t + t^2)\left[T_1 + T_2\frac{\alpha}{1} + T_3\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots\right],$$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = (t + t^2)\left[T_2 + T_3\frac{\alpha}{1} + T_4\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots\right];$$

puis

$$\begin{aligned} 2u + 3\frac{du}{d\alpha} + \frac{d^2u}{d\alpha^2} = 2(t + t) &+ 2(t + t^2)\left[T_1\frac{\alpha}{1} + T_2\frac{\alpha^2}{1.2} + T_3\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots\right] \\ &+ 3(t + t^2)\left[T_1 + T_2\frac{\alpha}{1} + T_3\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots\right] \\ &+ (t + t^2)\left[T_2 + T_3\frac{\alpha}{1} + T_4\frac{\alpha^2}{1.2} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

A cause de $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2t$, le terme indépendant de α égale

$$2(1 + t) + 3(t + t^2) + (t + t^2)(1 + 2t) = 2(1 + t)^3.$$

Donc si l'on pose, pour abréger,

$$2T_p + 3T_{p+1} + T_{p+2} = G_p, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

on aura

$$2u + 3\frac{du}{d\alpha} + \frac{d^2u}{d\alpha^2} = 2(1 + t)^3 + (t + t^2)\sum_1^\infty G_p\frac{\alpha^p}{\Gamma(p + 1)} \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

D'un autre côté,

$$2u^3 = 2(1 + t)^3\left[1 + t\sum_1^\infty T_p\frac{\alpha^p}{\Gamma(p + 1)}\right]^3.$$

Ainsi, après la suppression du facteur $1 + t$, l'équation (77) devient

$$2(1 + t)^2 + t\sum_1^\infty G_p\frac{\alpha^p}{\Gamma(p + 1)} = 2(1 + t)^2\left[1 + t\sum_1^\infty T_p\frac{\alpha^p}{\Gamma(p + 1)}\right]^3. \quad \ldots \quad (81)$$

51. Suite. Il est facile de voir que G_p *est divisible par* $(1 + t)^2$. En effet : 1° Pour $t = -1$, l'égalité (79) se réduit (45) à

$$\pm(2 - 3 + 1) = 0\,(^*).$$

(*) En général,

$$aT_p + (a + b)T_{p+1} + bT_{p+2}$$

est divisible par $1 + t$.

2° Si, dans cette même égalité, on prend les dérivées des deux membres, et que l'on suppose encore $t = -1$, on a

$$2T'_p + 3T'_{p+1} + T'_{p+2} = G'_p.$$

Prenons, maintenant, la relation

$$T'_p = (t^2 + t)T''_{p-1} + 2(2t + 1)T'_{p-1} + 2T_{p-1}.$$

Lorsque $t = -1$, elle se réduit à

$$T'_p = -2T'_{p-1} \pm 2.$$

Il résulte, de celle-ci :

$$T'_{p+1} = -2T'_p \mp 2, \quad T'_{p+2} = -2T'_{p+1} \pm 2;$$

puis

$$G'_p = -4T'_{p-1} - 6T'_p - 2T'_{p+1} = -G'_{p-1}.$$

Or,

$$G_1 = 2T_1 + 3T_2 + T_3 = 6(1 + t)^2;$$

donc, *pour* $t = -1$:

$$G'_1 = 0, \quad G'_2 = 0, \quad G'_3 = 0, \quad \ldots\ldots$$

Cela posé, si l'on fait

$$G_p = 2(1 + t)^2 H_p, \qquad (82)$$

la relation (81) prend la forme

$$1 + t\sum_1^\infty H_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} = \left[1 + t\sum_1^\infty T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}\right]^3. \qquad (83)$$

Ainsi, *le cube de la série*

$$1 + t\frac{\alpha}{1} + t(1 + 2t)\frac{\alpha^2}{1.2} + t(1 + 6t + 6t^2)\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots$$

est une série aussi simple que la première. Ce résultat nous semble remarquable (*).

32. Valeurs des coefficients H_1, H_2, H_3, ... Le calcul direct donne

$$G_1 = 6(1+t)^2,\quad G_2 = 6(1+t)^2(1+4t),\quad G_3 = 6(1+t)^2(1+12t+20t^2),\quad \ldots\ldots,$$

donc

$$H_1 = 3,\quad H_2 = 3(1+4t),\quad H_3 = 3(1+12t+20t^2),\quad \ldots\ldots$$

Il se complique bientôt; mais *la loi des polynômes* G_{p} *est la même que celle des polynômes* G_p.

En effet, la formule

$$G_p = 2T_p + 3T_{p+1} + T_{p+2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

équivaut à

$$G_p = 2\left[(t+t^2)T_{p-1}\right]' + 3\left[(t+t^2)T_p\right]' + \left[(t+t^2)T_{p+1}\right]',$$

ou à

$$G_p = \left[(t+t^2)(2T_{p-1} + 3T_p + T_{p+1})\right]',$$

ou enfin, à

$$G_p = \left[(t+t^2)G_{p-1}\right]'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

33. Remarques. — I. De cette relation, on déduit celle-ci :

$$H_p = (1+4t)H_{p-1} + (t+t^2)H'_{p-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

laquelle peut servir au calcul des polynômes H_p; mais il est plus simple d'appliquer les formules (84) et (82).

II. Si $t = 1$, l'équation (83) se réduit à

$$1 + \sum_1^\infty H_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} = \left[1 + \sum_1 T_p \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}\right]^3.$$

Pour cette valeur de t, le second membre devient $\frac{1}{(2-e^x)^3}$ (17).

(*) Il a quelque analogie avec la célèbre formule de Jacobi :

$$(1 - q^2 - q^4 + q^{10} + q^{14} - \cdots)^3 = 1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots$$

(*Recherches sur quelques produits indéfinis.*)

En outre :

$$H_1 = 3, \quad H_2 = 15, \quad H_3 = 99, \quad H_4 = 807, \quad \ldots..$$

Donc, à cause de la formule

$$\frac{1}{2 - e^{\alpha}} = 1 + \frac{\alpha}{1} + 3\frac{\alpha^2}{1.2} + 13\frac{\alpha^3}{1.2.3} + 75\frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + 541\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} + \cdots, \tag{30}$$

on a

$$\left.\begin{array}{l} \left[1 + \dfrac{\alpha}{1} + 3\dfrac{\alpha^2}{1.2} + 13\dfrac{\alpha^3}{1.2.3} + 75\dfrac{\alpha^4}{1.2.3.4} + 541\dfrac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\right]^3 = \\ \quad 1 + 3\dfrac{\alpha}{1} + 15\dfrac{\alpha^2}{1.2} + 99\dfrac{\alpha^3}{1.2.3} + 807\dfrac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \cdots. \end{array}\right\} \ldots \tag{86}$$

IX

REMARQUES DIVERSES.

34. Soit à vérifier la formule

$$T_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi\, d\varphi}{(1+t)^2 e^{-\cos\varphi} - 2t(1+t)\cos(\sin\varphi) + t^2 e^{\cos\varphi}}, \quad \ldots \tag{46}$$

que l'on peut écrire sous la forme abrégée :

$$T_p = \frac{2}{\pi}\Gamma(p+1)\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi\, d\varphi}{at^2 + 2bt + 1}; \quad \ldots\ldots \tag{87}$$

en posant

$$a = 1 - 2e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi) + e^{2\cos\varphi}, \quad b = 1 - e^{\cos\varphi}\cos(\sin\varphi). \quad \ldots. \tag{88}$$

D'après l'équation

$$\int_{-1}^{0} T_p dt = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{76}$$

on doit trouver, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\int_0^{\pi} e^{\cos\varphi}\sin(\sin\varphi)\sin p\varphi\, d\varphi \int_{-1}^{0} \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = 0. \quad \ldots\ldots \tag{89}$$

En général,

$$\int \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = \frac{1}{\sqrt{a - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{at + b}{\sqrt{a - b^2}} \text{ (*)};$$

donc

$$\int_{-1}^{0} \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = \frac{1}{\sqrt{a - b^2}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{\sqrt{a - b^2}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a - b}{\sqrt{a - b^2}} \right].$$

La quantité entre parenthèses équivaut à

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\dfrac{a}{\sqrt{a - b^2}}}{1 - \dfrac{b(a - b)}{a - b^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a - b^2}}{1 - b}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^{0} \frac{dt}{at^2 + 2bt + 1} = \frac{1}{\sqrt{a - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a - b^2}}{1 - b}. \quad \ldots \ldots \quad (90)$$

Dans le cas actuel :

$$a - b^2 = e^{2\cos\varphi} \sin^2(\sin\varphi), \quad 1 - b = e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi);$$

et le second membre de la dernière égalité devient

$$\frac{1}{e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi)} \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi)}{e^{\cos\varphi} \cos(\sin\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{e^{\cos\varphi} \sin(\sin\varphi)}.$$

Substituant dans la relation (79), on trouve

$$\int_0^\pi \sin p\varphi \sin\varphi d\varphi = 0;$$

valeur exacte, dès que p surpasse l'unité.

55. Le calcul des *nombres* T, indiqué ci-dessus (20), peut aussi (10) être effectué au moyen des différences successives de 0", comme le montre le tableau ci-après.

(*) En effet, la dérivée du second membre est

$$\frac{1}{\sqrt{a - b^2}} \frac{\dfrac{a}{\sqrt{a - b^2}}}{1 + \dfrac{(at + b)^2}{a - b^2}} = \frac{a}{a - b^2 + (at + b)^2} = \frac{1}{at^2 + 2bt + 1}.$$

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	Δ_9	Δ_{10}	T
0^1	1										(*) 1
0^2	1	2									3
0^3	1	6	6								13
0^4	1	14	36	24							75
0^5	1	30	150	240	120						541
0^6	1	62	540	1 560	1 800	720					4 683
0^7	1	126	1 806	8 400	16 800	15 120	5 040				47 293
0^8	1	254	5 796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320			545 835
0^9	1	510	18 150	186 480	834 120	1 905 120	2 328 480	1 451 520	362 880		7 087 261
0^{10}	1	1 022	55 980	818 520	5 103 600	16 435 440	29 635 200	30 240 000	16 329 600	3 628 800	102 248 073

P.-S. (mars 1881). — A la fin du paragraphe **16**, on lit :

« Ces résultats *absurdes*, admis par quelques Géomètres :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots = \tfrac{1}{4},$$
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots = 0,$$

etc. »

En écrivant ces lignes, je songeais aux *anciens* Géomètres, ne croyant pas qu'il pût exister, aujourd'hui, de *partisans des séries divergentes*. J'étais dans l'erreur : un honorable *Disciple* de Wronski, dans une lettre qu'il m'adresse, formule ainsi son opinion :

« Une série divergente, telle que

$$1 - 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1.3}{1.2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1.3.5}{1.2.3} - \cdots$$

peut avoir pour valeur une quantité imaginaire, qui est ici $\sqrt{-1}$. »

Évidemment, toute réfutation serait inutile !

ERRATUM.

Page 24, avant-dernière formule. *Au lieu de :* « $\Delta^n s^a =$, *lisez :* « $\Delta^m s^a =$.

(*) Dans la dernière colonne, les chiffres des unités forment la suite périodique :

1 3 3 5 1 3 3 5 1 3 3 5 . . . . .