NOTE

SUR

LES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Présenté à la Classe des sciences le 7 octobre 1880.)

NOTE

SUR

LES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE (*).

1. Relation entre les fonctions $X_0, X_1, \ldots, X_{n+1}$. De

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \sum_0^\infty X_n z^n \ (^{**}), \quad \ldots \quad (1)$$

on déduit

$$\int u dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = -\frac{1}{z}\sqrt{1 - 2zx + z^2} + const.,$$

$$\int_{-1}^{x} u dx = \frac{1 + z - \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{z};$$

puis

$$1 + z - \sqrt{1 - 2zx + z^2} = \sum_0^\infty z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx; \quad \ldots \quad (2)$$

puis encore, en divisant par le radical :

$$(1 + z)u - 1 = u \sum_0^\infty z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx. \quad \ldots \quad (3)$$

(*) Cette Note peut être considérée comme un supplément au Mémoire sur le même sujet, récemment publié par l'Académie. Les renvois à ce premier travail sont accompagnés de la lettre *M*.

(**) *M*, 1.

Cette égalité est la même chose que

$$(1 + z)(1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots) - 1 =$$

$$\left[1 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots + X_n z^n + \cdots\right]\left[z\int_{-1}^{x} X_0 dx + z^2 \int_{-1}^{x} X_1 dx + \cdots + z^{n+1}\int_{-1}^{x} X_n dx + \cdots\right].$$

Dans le premier membre, le coefficient de z^{n+1} est $X_n + X_{n+1}$; dans le second, ce coefficient égale

$$X_0 \int_{-1}^{x} X_n dx + X_1 \int_{-1}^{x} X_{n-1} dx + \cdots + X_n \int_{-1}^{x} X_0 dx.$$

Par conséquent,

$$X_n + X_{n+1} = X_0 \int_{-1}^{x} X_n dx + X_1 \int_{-1}^{x} X_{n-1} dx + \cdots + X_n \int_{-1}^{x} X_0 dx. \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Cette relation, qui n'est peut-être pas nouvelle, me paraît assez curieuse.

2. Développement du radical. L'équation (2) peut être écrite ainsi :

$$\sqrt{1 - 2zx + z^2} = 1 + z - z\int_{-1}^{x} dx - \sum_{0}^{\infty} z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx ;$$

ou sous cette forme un peu plus simple :

$$\sqrt{1 - 2zx + z^2} = 1 - zx - \sum_{1}^{\infty} z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Ainsi, *la série*

$$z^2 \int_{-1}^{x} X_1 dx + z^3 \int_{-1}^{x} X_2 dx + \cdots + z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

est convergente, et a pour limite $1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2}$.

3. Examen d'une difficulté. On a

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\varphi (x\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1} d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

pourvu que l'on néglige la partie imaginaire de l'intégrale (*).

(*) *M*, **86**.

Afin de rendre plus commode cette formule, je pose

$$x\cos\varphi = \rho\cos\theta, \quad \sin\varphi = \rho\sin\theta.$$

Elle devient

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n+1}\cos^{n-1}\varphi.\cos(n+1)\theta.d\varphi. \quad \ldots \quad (6)$$

Il résulte, de cette égalité,

$$\sum_1^{\infty} z^{n+1}\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{(2z)^{n+1}}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{n+1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\cos(n+1)\theta.d\varphi. \quad \ldots \quad (7)$$

Ordinairement, quand il s'agit de sommer une série convergente dont le terme général est $a_n\int_{\alpha}^{\beta} V_n dx$, on emploie la formule

$$\sum_1^{\infty} a_n\int_{\alpha}^{\beta} V_n dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx\sum_1^{\infty} a_n V_n;$$

c'est-à-dire que *l'on intervertit l'ordre des signes* Σ, $\int$. Dans le cas actuel, on ne peut procéder ainsi. En effet, si l'on écrit, au lieu de l'égalité (7) :

$$\sum_1^{\infty} z^{n+1}\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sum_1^{\infty}\frac{(2\rho z)^{n+1}}{n+1}\cos^{n+1}\varphi\cos(n+1)\theta,$$

la série placée sous le signe Σ *peut être divergente* (*). Il est donc essentiel d'employer une expression de $\int_{-1}^{x} X_n dx$, autre que la précédente (**).

4. Nouvelle expression de $\int_{-1}^{x} X_n dx$. Pour la trouver, j'emploie les relations

$$X_n = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right], \quad \ldots \quad (8)$$

$$X_{n+1} - X_{n-1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)\frac{dX_n}{dx} \text{ (***)}. \quad \ldots \quad (9)$$

(*) Elle l'est si $2\rho z$ surpasse l'unité, c'est-à-dire si ρ et z diffèrent peu de cette limite.

(**) Après avoir été arrêté par cette petite difficulté, j'ai supposé que le facteur 2^{n+1}, *cause de la divergence*, provenait d'une faute de calcul. Mais il n'en est rien : les formules (6) et (5) sont exactes.

(***) *M*, **9**.

Il en résulte, puisque $n+1$ *et* $n-1$ *sont de même parité :*

$$\int_{-1}^{x} X_n dx = \frac{x^2-1}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx}. \qquad (10)$$

Par conséquent,

$$\sum_1^\infty z^{n+1} \int_{-1}^{x} X_n dx = (x^2-1) \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} \frac{dX_n}{dx}. \qquad (C)$$

5. Suite. Prenons maintenant la *formule de Jacobi :*

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{-1}\cos\omega)^n d\omega. \qquad (11)$$

Elle donne

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{n}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{-1}\cos\omega)^{n-1} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{-1}\cos\omega\right) d\omega. \qquad (12)$$

Par analogie avec ce que l'on a vu dans le paragraphe **3**, je pose

$$x = \rho\cos\theta, \quad \sqrt{1-x^2}\cos\omega = \rho\sin\theta, \qquad (13)$$

égalités d'où l'on déduit :

$$\rho^2 = \cos^2\omega + x^2\sin^2\omega, \qquad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\omega.$$

Le multiplicateur de $d\omega$ devient

$$\frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left[\cos(n-1)\theta - \sqrt{-1}\sin(n-1)\theta\right](\sin\theta + \sqrt{-1}\cos\theta\cos^2\omega).$$

La partie réelle de cette expression est

$$\frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left[\sin\theta\cos(n-1)\theta + \cos\theta\sin(n-1)\theta\cos^2\omega\right],$$

ou

$$\frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left[\sin n\theta - \sin(n-1)\theta\cos\theta\sin^2\omega\right].$$

Nous avons donc, au lieu de la formule (12),

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta} \left[\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos\theta \sin^2\omega\right] d\omega. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Au moyen de cette valeur, la formule (C) devient

$$\sum_1^\infty z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx = \frac{x^2-1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1} \int_0^\pi \frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta} \left[\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos\theta \sin^2\omega\right] d\omega;$$

ou, parce que l'on peut, cette fois, intervertir l'ordre des opérations :

$$\sum_1^\infty z^{n+1} \int_{-1}^x X_n dx = \frac{x^2-1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\sin\theta} \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1} \rho^{n-1} \left[\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos\theta \sin^2\omega\right]. \quad (E)$$

6. Sommation d'une série. Soit

$$Z = \sum_1^\infty \frac{z^{n+1}}{n+1} \rho^{n-1} \left[\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos\theta \sin^2\omega\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

et, par conséquent,

$$\frac{dZ}{dz} = \sum_1^\infty z^n \rho^{n-1} \left[\sin n\theta - \sin(n-1)\theta \cos\theta \sin^2\omega\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Le second membre est décomposable en

$$z \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta - z \cos\theta \sin^2\omega \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin(n-1)\theta.$$

Le premier terme de la seconde somme étant nul, celle-ci équivaut à

$$\rho z \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta.$$

Donc

$$\frac{dZ}{dz} = z(1 - \rho z \cos\theta \sin^2\omega) \sum_1^\infty (\rho z)^{n-1} \sin n\theta,$$

ou (13)

$$\frac{dZ}{dz} = z(1 - zx\sin^2\omega)\sum_1^\infty (\rho z)^{n-1}\sin n\theta.$$

D'ailleurs (*)

$$\sum_1^\infty (\rho z)^{n-1}\sin n\theta = \frac{\sin\theta}{1 - 2\rho z\cos\theta + \rho^2 z^2} = \frac{\sin\theta}{1 - 2zx + z^2(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)};$$

par conséquent,

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{z(1 - zx\sin^2\omega)\sin\theta}{1 - 2zx + z^2(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Il résulte, de cette valeur,

$$Z = \sin\theta \int_0^z \frac{z(1 - zx\sin^2\omega)dz}{1 - 2zx + z^2(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)}; \quad \ldots \ldots \quad (F)$$

puis, au lieu de la relation (E) :

$$\sum_1^\infty z^{n+1}\int_{-1}^x X_n dx = 2\,\frac{x^2 - 1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^z \frac{z(1 - zx\sin^2\omega)dz}{1 - 2zx + z^2(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)} \quad \ldots \quad (G)$$

D'après l'égalité (B), le premier membre égale $1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2}$; ainsi

$$1 - zx - \sqrt{1 - 2zx + z^2} = 2\,\frac{x^2 - 1}{\pi}\int_0^z zdz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - zx\sin^2\omega)d\omega}{1 - 2zx + z^2(\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega)}. \quad (H)$$

Comme vérification, calculons les intégrales contenues dans le second membre.

7. Suite. L'intégrale définie, relative à ω, peut être représentée par $A - zxB$, si l'on pose :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(1 - 2zx + z^2)\cos^2\omega + (1 - zx)^2\sin^2\omega},$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2\omega\, d\omega}{(1 - 2zx + z^2) + (1 - zx)^2\operatorname{tg}^2\omega}.$$

(*) Voir, par exemple, le *Traité élémentaire des séries*, p. 108.

Or (*) :

$$A = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(1-zx)\sqrt{1-2zx+z^2}}, \quad B = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(1-zx)\left[1-zx+\sqrt{1-2zx+z^2}\right]};$$

donc

$$A - zxB = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+\sqrt{1-2zx+z^2}}{\left(1-zx+\sqrt{1-2zx+x^2}\right)\sqrt{1-2zx+z^2}};$$

puis, au lieu de l'égalité (H) :

$$1-zx-\sqrt{1-2zx+z^2} = (x^2-1)\int_0^z z\,\frac{1+\sqrt{1-2zx+z^2}}{\left(1-zx+\sqrt{1-2zx+z^2}\right)\sqrt{1-2zx+z^2}}\,dz;$$

ou

$$1-zx-\sqrt{1-2zx+z^2} = \int_0^z \frac{x-z-\sqrt{1-2zx+z^2}}{\sqrt{1-2zx+z^2}}\,dz;$$

ce qui est identique.

8. **Relation nouvelle.** Reprenons les égalités

$$X_n + X_{n+1} = X_0\int_{-1}^x X_n dx + \cdots + X_{n-1}\int_{-1}^x X_1 dx + X_n\int_{-1}^x X_0 dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

$$\int_{-1}^x X_n dx = \frac{x^2-1}{n(n+1)}\,\frac{dX_n}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(C)}$$

Au moyen de la seconde (inapplicable lorsque $n = 0$), la première devient

$$X_n + X_{n+1} = (x^2-1)\left[\frac{1}{n(n+1)}X_0\frac{dX_n}{dx} + \frac{1}{(n-1)n}X_1\frac{dX_{n-1}}{dx} + \cdots + \frac{1}{1.2}X_{n-1}\frac{dX_1}{dx}\right] + X_n(1+x);$$

ou

$$\frac{X_{n+1}-xX_n}{x^2-1} = \frac{1}{n(n+1)}X_0\frac{dX_n}{dx} + \frac{1}{(n-1)n}X_1\frac{dX_{n-1}}{dx} + \cdots + \frac{1}{1.2}X_{n-1}\frac{dX_1}{dx}.$$

(*) Bierens de Haan. (*T.* 66.)

Le premier membre égale $\frac{1}{n+1}\frac{dX_n}{dx}$(*); donc, à cause de $X_0 = 1$:

$$\frac{n-1}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx} = \frac{1}{(n-1)n} X_1 \frac{dX_{n-1}}{dx} + \frac{1}{(n-2)(n-1)} X_2 \frac{dX_{n-2}}{dx} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2} X_{n-1} \frac{dX_1}{dx}. \quad \text{(K)}$$

9. Vérification. Soit $n = 4$. On doit avoir

$$\frac{3}{20}\frac{dX_4}{dx} = \frac{1}{12} X_1 \frac{dX_3}{dx} + \frac{1}{6} X_2 \frac{dX_2}{dx} + \frac{1}{2} X_3 \frac{dX_1}{dx};$$

ou

$$\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{8}(140x^3 - 60x) = \frac{1}{12}x\cdot\frac{1}{2}(15x^2-3) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 6x + \frac{1}{4}(5x^3-3x),$$

ou

$$\frac{3}{8}(7x^3-3x) = \frac{1}{8}(5x^3-x) + \frac{1}{4}(3x^2-x) + \frac{1}{4}(5x^3-3x);$$

ce qui est exact.

10. Remarque. Si l'on identifie les coefficients de x^{n-1}, dans les deux membres de l'égalité (K), on trouve

$$\frac{n-1}{n+1} C_{2n,n} = \frac{1}{n} C_{2,1} \cdot C_{2n-2,n-1} + \frac{1}{n-1} C_{4,2} \cdot C_{4n-4,n-2} + \cdots + \frac{1}{2} C_{2n-2,n-1} \cdot C_{2,1}; \quad . \quad . \quad \text{(L)}$$

relation dans laquelle tous les termes sont des *nombres entiers*.

(*) *M*, **9**.