SUR QUELQUES FORMULES

RELATIVES

AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES;

PAR

EUGÈNE CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 7 avril 1877.)

SUR QUELQUES FORMULES

RELATIVES

AUX INTÉGRALES EULÉRIENNES.

I.

Je rappellerai d'abord plusieurs propositions indispensables (*).

LEMME I. *Le produit*

$$u_1 u_2 \ldots u_n u_{n+1} \ldots,$$

dans lequel on suppose, pour plus de simplicité,

$$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots > 1,$$

converge ou diverge en même temps que la série

$$\mathrm{l}\, u_1 + \mathrm{l}\, u_2 + \cdots + \mathrm{l}\, u_n + \cdots$$

LEMME II. α *étant une quantité positive, inférieure au nombre entier* p; *le produit*

$$\mathrm{P} = \frac{p+1}{p-\alpha}\,\frac{p+2}{p+1-\alpha}\cdots\frac{n+1}{n-\alpha}$$

croît indéfiniment avec n.

(*) *Comptes rendus*, t. XLV; *Cours d'Analyse*, par Sturm, t. II, p. 326.

Démonstration. Considérons la série dont le terme général serait

$$u_{n-p+1} = \mathrm{l}\,\frac{n+1}{n-\alpha}.$$

Le produit de ce terme, par son *rang*, est

$$(n-p+1)\,u_{n-p+1} = \mathrm{l}\left[\left(\frac{n+1}{n-\alpha}\right)^{n-p+1}\right] = \mathrm{l}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{n-\alpha}{1+\alpha}}\right)^{\frac{n-\alpha}{1+\alpha}\,\frac{n-p+1}{n-\alpha}\,(1+\alpha)}\right].$$

Conséquemment,

$$lim\left[(n-p+1)\,u_{n-p+1}\right] = \mathrm{l}\left[e^{1+\alpha}\right] = 1+\alpha :$$

la série est *divergente* (*). Donc, d'après le premier lemme, *le produit* P *est divergent.*

Théorème. α *étant une quantité positive quelconque, on a*

$$1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}+\cdots = 2^{\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

Démonstration. Le *reste* de la série est, par une formule connue (**) :

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n)}{1\,.\,2\ldots(n+1)}\,\frac{1}{(1+\theta)^{n+1-\alpha}}.$$

Soit p le nombre entier immédiatement supérieur à α : on peut écrire

$$\mathrm{R} = \pm\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{1\,.\,2\ldots p}\times\frac{(p-\alpha)(p+1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{(p+1)(p+2)\ldots(n+1)}\times\frac{1}{(1+\theta)^{n+1-\alpha}}.$$

Des trois facteurs de R, le premier est constant; le deuxième a pour limite zéro (*Lemme* II); le troisième ne surpasse pas l'unité. Donc *lim* R = 0.

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, p. 12.
(**) *Idem*, p. 376.

II.

n étant un nombre *entier,* et α une quantité positive, *non entière,* je multiplie

$$(1+x)^{n+\alpha} = 1 + \frac{n+\alpha}{1}x + \cdots + \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha+1-p)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots$$

par

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n+1-q)}{1.2\ldots q}\frac{1}{x^q} + \cdots + \frac{1}{x^n}.$$

Dans le produit des seconds membres, le coefficient de x^p a pour expression :

$$\sum_{i=0}^{i=n} C_{n,i}\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha+1-p-i)}{1.2\ldots(p+i)}\ (^*).$$

Le produit des premiers membres est $(1+x)^{2n+\alpha}x^{-n}$. Le coefficient de x^p égale donc le coefficient de x^{n+p} dans le développement de $(1+x)^{2n+\alpha}$; savoir :

$$\frac{(2n+\alpha)\ldots(n+\alpha+1-p)}{1.2\ldots(p+n)}.$$

Conséquemment,

$$\frac{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha+1-p)}{1.2\ldots(p+n)} = \sum_{i=0}^{i=n} C_{n,i}\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha+1-p-i)}{1.2\ldots(p+i)};$$

et, si l'on divise tous les termes par $\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha+1-p)}{1.2\ldots p}$:

$$\frac{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)\ldots(n+\alpha+1)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} = \sum_{i=0}^{i=n} C_{n,i}\frac{(n+\alpha-p)\ldots(n+\alpha+1-p-i)}{(p+1)\ldots(p+i)}. \quad \text{(B)}$$

(*) La notation $C_{n,i}$ représente le *nombre des combinaisons de* n *lettres, prises* i *à* i. Suivant l'usage, on suppose $C_{n,0} = 1$.

III.

Le premier membre égale

$$\frac{\Gamma(2n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}:\frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+1)}=\frac{\Gamma(2n+\alpha+1)\Gamma(p+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(p+n+1)\Gamma(n)}=\frac{\mathrm{B}(p+1,n)}{\mathrm{B}(n+\alpha+1,n)}\,(*).$$

Ainsi, pour n *et* p *entiers positifs :*

$$\frac{\mathrm{B}(p+1,n)}{\mathrm{B}(n+\alpha+1,n)}=\sum_{i=0}^{i=n}\mathrm{C}_{n,i}\frac{(n+\alpha-p)\ldots(n+\alpha+1-p-i)}{(p+1)\ldots(p+i)}.\quad . \quad . \quad . \qquad (\mathrm{C})$$

IV.

Dans l'égalité (C), supposons $p=n$; nous aurons (**), par une simple inversion de facteurs :

$$\frac{\mathrm{B}(2n+\alpha+1,n+1)}{\mathrm{B}(2n+1,n+\alpha+1)}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{(n+1)\ldots(n+i)}\,\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-i)}{1.2\ldots i}$$

puis, en faisant croître n indéfiniment :

$$lim\,\frac{\mathrm{B}(2n+\alpha+1,n+1)}{\mathrm{B}(2n+1,n+\alpha+1)}=1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}+\cdots;$$

(*) Si l'on n'introduit pas, aux deux termes, le facteur $\Gamma(n)$, la fraction devient

$$\frac{\mathrm{B}(2n+\alpha+1,p+1)}{\mathrm{B}(n+\alpha+1,p+n+1)}.$$

Donc, conformément à un théorème d'Euler :

$$\frac{\mathrm{B}(2n+\alpha+1,p+1)}{\mathrm{B}(n+\alpha+1,p+n+1)}=\frac{\mathrm{B}(p+1,n)}{\mathrm{B}(n+\alpha+1,n)}.$$

(*Mélanges mathématiques,* p. 152.)

(**) Voir la note précédente.

ou, d'après le théorème démontré ci-dessus (1) :

$$lim \frac{B(2n+\alpha+1, n+1)}{B(2n+1, n+\alpha+1)} = 2^{\alpha} \text{ (*)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(D)}$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$lim \frac{B\left(2n+\frac{3}{2}, n+1\right)}{B\left(2n+1, n+\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(E)}$$

Cette formule a une grande analogie avec celle que l'on trouve dans mon Mémoire *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet :*

$$lim \frac{B\left(2n+1, n+\frac{1}{2}\right)}{B\left(2n+\frac{1}{2}, n+1\right)} = \sqrt{2} \text{ (**)}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(E')}$$

mais il est facile d'arriver à une relation qui les comprend toutes deux, comme cas très-particuliers.

(*) Cette relation (D) ne diffère pas de celle-ci :

$$lim \left[\frac{n+2+x}{n+1} \frac{n+3+x}{n+2} \cdots \frac{2n+x}{2n-1}\right] = 2^{1+x},$$

que j'ai donnée à la suite d'un remarquable Mémoire de M. Édouard Lucas (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 338). Ce Mémoire a été l'occasion du travail actuel.

(**) *Journal de Resal*, t. I^{er}, p. 235. Du reste, les égalités (E), (E') s'accordent; car

$$\frac{B\left(2n+\frac{3}{2}, n+1\right)}{B\left(2n+1, n+\frac{3}{2}\right)} = \frac{2n+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}} \frac{B\left(2n+\frac{1}{2}, n+1\right)}{B\left(2n+1, n+\frac{1}{2}\right)};$$

et, en conséquence,

$$lim \frac{B\left(2n+\frac{3}{2}, n+1\right)}{B\left(2n+1, n+\frac{3}{2}\right)} \cdot lim \frac{B\left(2n+1, n+\frac{1}{2}\right)}{B\left(2n+\frac{1}{2}, n+1\right)} = lim \frac{2n+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}},$$

ou

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

V.

A cet effet, considérons la série divergente

$$\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{2+\alpha}+\frac{1}{3+\alpha}+\cdots,$$

analogue à la série harmonique. La somme d'un nombre *déterminé* de termes, commençant par $\frac{1}{n+\alpha}$, est

$$\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{n+1+\alpha}+\cdots+\frac{1}{an+\beta};$$

a étant un nombre entier, donné, et β, une *constante* telle, que $an+\beta$ fasse partie de la progression

$$n+\alpha,\quad n+1+\alpha,\quad n+2+\alpha,\quad \ldots$$

D'après une formule connue (*),

$$lim\left(\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{n+1+\alpha}+\cdots+\frac{1}{an+\beta}\right)=\mathrm{l}\,.\,a\,(^{**}). \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Soit maintenant

$$\mathrm{P}=\left(1+\frac{\gamma}{n+\alpha}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n+1+\alpha}\right)\cdots\left(1+\frac{\gamma}{an+\beta}\right); \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\mathrm{l\,P}=\mathrm{l}\left(1+\frac{\gamma}{n+\alpha}\right)+\mathrm{l}\left(1+\frac{\gamma}{n+1+\alpha}\right)+\cdots+\mathrm{l}\left(1+\frac{\gamma}{an+\beta}\right).$$

(*) *Traité élémentaire des séries,* t. XXIII.

(**) Cette formule prouve, une fois de plus, que, *même dans une série divergente, la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes peut avoir une limite.* On peut consulter, sur ce sujet, les *Mélanges mathématiques,* pp. 337 et suiv.

Le second membre est compris entre

$$\gamma\left(\frac{1}{n+\alpha}+\frac{1}{n+1+\alpha}+\cdots+\frac{1}{an+\beta}\right)$$

et cette même quantité diminuée de

$$\frac{1}{2}\gamma^2\left[\frac{1}{(n+\alpha)^2}+\frac{1}{(n+1+\alpha)^2}+\cdots+\frac{1}{(an+\beta)^2}\right].$$

Quand n augmente indéfiniment, la partie soustractive tend vers zéro; donc $lim\ \mathrm{l}\,\mathrm{P}=\gamma\,\mathrm{l}\,a$; puis

$$lim\ \mathrm{P}=a^{\gamma}. \qquad (5)$$

Il est visible que

$$\mathrm{P}=\frac{\Gamma(an+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(n+\alpha+\gamma)}:\frac{\Gamma(an+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha)}=\frac{\Gamma(an+\beta+\gamma+1)\,\Gamma(n+\alpha)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(n+\alpha+\gamma)\,\Gamma(an+\beta+1)\,\Gamma(\gamma)}=\frac{\mathrm{B}(n+\alpha,\gamma)}{\mathrm{B}(an+\beta+1,\gamma)}.$$

Ainsi

$$lim\ \frac{\mathrm{B}(n+\alpha,\gamma)}{\mathrm{B}(an+\beta+1,\gamma)}=a^{\gamma}. \qquad (\mathrm{F})$$

Si l'on suppose :

$$a=2,\quad \alpha=1,\quad \beta=0,\quad \gamma=\frac{1}{2},$$

cette relation générale se réduit à

$$lim\ \frac{\mathrm{B}\left(2n+\frac{5}{2},\,n+1\right)}{\mathrm{B}\left(2n+1,\,n+\frac{5}{2}\right)}=\sqrt{2}. \qquad (\mathrm{E})$$

De même, pour

$$a=2,\quad \alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=-\frac{1}{2},\quad \gamma=\frac{1}{2},$$

on retrouve la formule (E′) (*).

(*) Nous disions, dans le Mémoire cité : « *Le rapport des intégrales* $\mathrm{B}(2\mu+1,\ \mu+\frac{1}{2})$, $\mathrm{B}(2\mu+\frac{1}{2},\ \mu+1)$ *qui tendent vers zéro, tend lui-même vers* $\sqrt{2}$. » La formule (F) est la généralisation de cette remarque.

VI.

Dans l'égalité

$$\frac{B(p+1, n)}{B(n+\alpha+1, n)} = \sum_{i=0}^{i=n} C_{n,i} \frac{(n+\alpha-p)\ldots(n+\alpha+1-p-i)}{(p+1)\ldots(p+i)}, \quad . \quad . \quad . \quad \text{(C)}$$

je change $p+1$, $n+\alpha+1$, n en p, q, m; ce qui donne, en *faisant varier* i *de* 0 *à l'infini* (*) :

$$\frac{B(p, m)}{B(q, m)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m,i} \frac{(q-p)(q-p-1)\ldots(q-p+1-i)}{p(p+1)\ldots(p-1+i)}. \quad . \quad . \quad . \quad \text{(G)}$$

Cette relation, comme la précédente, paraît d'abord soumise à de nombreuses restrictions. Néanmoins, *elle est générale,* c'est-à-dire qu'elle subsiste si p, q, m étant des quantités *positives,* le second membre est un polynôme ou une série (**).

Démonstration. 1° Le nombre m étant quelconque, *la série* (G) *est toujours convergente.*

Il y a deux cas à distinguer, suivant que $q-p = \mp c$, c désignant une quantité positive (***).

Si $q-p=-c$, ou $p=q+c$, les termes de la série (G) sont, en valeur absolue, respectivement inférieurs à ceux de la série *convergente*

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\cdots = 2^m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

(*) Si, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent, m est un nombre entier, les termes qui devraient suivre le $(m+1)^{\text{ième}}$ sont nuls. Dès lors, la restriction $i \overline{\leq} m$ devient inutile, au moins dans ce cas.

(**) Nous reproduisons ici, en les complétant et les simplifiant, les démonstrations et les calculs dont nous avons fait usage dans les *Mélanges mathématiques*, pp. 151 et suiv. En outre, nous conservons la notation $C_{m,i}$, qui ne représente plus un nombre de combinaisons, si m n'est pas entier positif.

(***) Abstraction faite du signe, $c = \alpha$.

Si $q - p = + c$, le produit

$$(q-p)(q-p-1)\dots(q-p+1-i) = c(c-1)\dots(c+1-i)$$

est moindre que

$$c(c+1)\dots(c+i-1);$$

donc la série (G) est encore convergente.

2° Si p surpasse q,

$$\frac{(q-p)(q-p-1)\dots(q-p+1-i)}{p(p+1)\dots(p-1+i)} = (-1)^i \frac{(p-q)(p+1-q)\dots(p+i-1-q)}{p(p+1)\dots(p-1+i)}$$

$$= (-1)^i \frac{\Gamma(p+i-q)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p-q)\Gamma(p+i)\Gamma(q)} = (-1)^i \frac{B(p+i-q,q)}{B(p-q,q)} = (-1)^i \frac{\int_0^1 \theta^{p+i-q-1}(1-\theta)^{q-1}d\theta}{B(p-q,q)}.$$

L'égalité à vérifier est donc

$$\frac{B(p-q,q)B(p,m)}{B(q,m)} = \int_0^1 \theta^{p-q-1}(1-\theta)^{q-1}d\theta \sum_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i C_{m,i}\theta^i,$$

ou

$$\frac{B(p-q,q)B(p,m)}{B(q,m)} = \int_0^1 \theta^{p-q-1}(1-\theta)^{m+q-1}d\theta,$$

ou enfin

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = \frac{B(p-q,m+q)}{B(p-q,q)}.$$

Or, d'après le théorème d'Euler, celle-ci est identique.

3° La formule (G) étant démontrée pour les valeurs de q inférieures à p, il suffit de vérifier qu'elle subsiste quand on y change q en $q+1$. Par le fait de ce changement, on a l'égalité qu'*il faut prouver :*

$$\frac{B(p,m)}{B(q+1,m)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m,i}\frac{(q-p+1)(q-p)\dots(q-p+2-i)}{p(p+1)\dots(p-1+i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

D'ailleurs, pour $q < p$, la formule (G) donne l'égalité *démontrée :*

$$\frac{B(p+1,m-1)}{B(q+1,m-1)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m-1,i}\frac{(q-p)\dots(q-p+1-i)}{(p+1)\dots(p+i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Or si l'on combine, par soustraction, ces deux dernières formules, on trouve, à cause de $1 - 1 = 0$:

$$\frac{B(p,m)}{B(q+1,m)} - \frac{B(p,m)}{B(q,m)} = \frac{m}{p}\sum_{i=1}^{i=\infty} C_{m-1,i-1}\frac{(q-p)\dots(q-p+2-i)}{(p+1)\dots(p-1+i)}$$

$$= \frac{m}{p}\sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m-1,i}\frac{(q-p)\dots(q-p+1-i)}{(p+1)\dots(p+i)};$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation (2) :

$$\frac{B(p,m)}{B(q+1,m)} - \frac{B(p,m)}{B(q,m)} = \frac{m}{p}\frac{B(p+1,m-1)}{B(q+1,m-1)},$$

ou

$$\frac{1}{q}\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = \frac{1}{p}\frac{B(p+1,m-1)}{B(q+1,m-1)}; \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

ce qui est identique. Ainsi l'égalité (1) est une conséquence de l'*égalité démontrée* (2) et de l'*identité* (3); etc.

VII.

Si, dans la relation (G), on change p en q, q en p, on obtient

$$\frac{B(q,m)}{B(p,m)} = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_{m,i}\frac{(p-q)(p-q-1)\dots(p-q+1-i)}{q(q+1)\dots(q-1+i)}, \quad \dots \quad (G_1)$$

formule *conjuguée* de (G). Développées, ces formules deviennent, respectivement :

$$\frac{B(p,m)}{B(q,m)} = 1 + \frac{m}{1}\frac{q-p}{p} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(q-p)(q-p-1)}{p(p+1)} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{(q-p)(q-p-1)(q-p-2)}{p(p+1)(p+2)} + \cdots, (H)$$

$$\frac{B(q,m)}{B(p,m)} = 1 + \frac{m}{1}\frac{p-q}{q} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q-1)}{q(q+1)} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{q(q+1)(q+2)} + \cdots (H_1)$$

Il résulte, de celles-ci,

$$\left[1+\frac{m}{1}\frac{q-p}{p}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(q-p)(q-p-1)}{p(p+1)}+\cdots\right]\left[1+\frac{m}{1}\frac{p-q}{q}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q-1)}{q(q+1)}+\cdots\right]=1.(\mathrm{I})$$

Par exemple,

$$\left(1-5\frac{4}{9}+5\frac{4.5}{9.10}-\frac{4.5.6}{9.10.11}\right)\left(1+5\frac{4}{5}+5\frac{4.5}{5.6}+\frac{4.5.2}{5.6.7}\right)=1\ (*).$$

VIII.

La relation (G) présente une particularité curieuse : elle peut donner un résultat exact, même quand elle est appliquée *à tort*. Pour le faire voir, je suppose $q=(a+1)p$, de manière que

$$\frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(ap+p,m)}=\sum_{i=0}^{i=\infty}\mathrm{C}_{m,i}\frac{ap(ap-1)\ldots(ap-i+1)}{p(p+1)\ldots(p-1+i)}\ \ldots\ldots\ (1)$$

Dans cette égalité, faisons croître p indéfiniment. Si l'on admet que *la limite d'une somme est égale à la somme des limites des parties composantes* (**), on trouve

$$lim\,\frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(ap+p,m)}=\sum_{i=0}^{i=\infty}\mathrm{C}_{m,i}\,lim\,\frac{ap(ap-1)\ldots(ap-i+1)}{p(p+1)\ldots(p-i+1)},$$

ou

$$lim\,\frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(ap+p,m)}=\sum_{i=0}^{i=\infty}\mathrm{C}_{m,i}\,.\,a^i=1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\cdots,\ \ldots\ (2)$$

ou enfin

$$lim\,\frac{\mathrm{B}(p,m)}{\mathrm{B}(ap+p,m)}=(a+1)^m.$$

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 161. Si nous reproduisons les formules (G_1), (H_1), c'est parce qu'elles nous serviront plus loin.

(**) Ce principe, comme l'on sait, n'est pas toujours vrai (*Cours d'Analyse...*, p. 60).

Cette formule est la proposition (F). Mais, comme la série (2) est divergente si a surpasse l'unité, les transformations précédentes sont inadmissibles.

Remarque. La série (1), d'où nous venons de déduire la série (2), reste convergente pour de grandes valeurs de p, à la condition que ces valeurs soient *constantes*. Le dernier résultat n'est donc pas contradictoire avec la démonstration donnée plus haut (VI, 2°).

IX.

Avant d'aller plus loin, j'entrerai dans quelques détails sur une intégrale eulérienne, réductible à l'intégrale *elliptique* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} = F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Si l'on fait, suivant l'usage, $\sin^2\varphi = \theta$, on trouve la formule connue :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}.$$

Supposons $p = m - \frac{1}{2}$, m étant un nombre entier, et désignons par A_m cette intégrale, de manière que

$$A_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-\frac{1}{2}}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+5}{4}\right)}. \quad \ldots\ldots \quad (K)$$

Changeant m en $m - 1$, on a

$$A_{m-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m-1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{4}\right)};$$

et, par conséquent,

$$A_m A_{m-1} = \frac{1}{4}\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{2m-1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+3}{4}\right)},$$

ou

$$A_m A_{m-1} = \frac{\pi}{2m-1}. \quad \text{(L)}$$

Au moyen de cette relation (*), le calcul de A_m est ramené à celui de

$$A_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Mais, par un théorème d'Euler,

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2};$$

donc

$$A_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2. \quad \text{(M)}$$

Je dis, maintenant, que $A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}$ est réductible à $F_1(\sqrt{\frac{1}{2}})$.

Pour démontrer cette propriété, qui n'est pas nouvelle (**), il suffit de faire $\cos\varphi = \cos^2 x$.

Il résulte, en effet, de cette transformation :

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^4 x} = \sin x\sqrt{2-\sin^2 x}, \quad d\varphi = 2\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}};$$

puis

$$A_0 = \sqrt{2}\,F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

On a donc, entre les transcendantes $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, $F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, cette relation simple :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 = 4\sqrt{\pi}\,.\,F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

(*) Elle subsiste pour *toute valeur de* m, supérieure à $\frac{1}{2}$.

(**) Elle est cependant peu connue. Je ne l'ai trouvée, ni dans le *Calcul intégral* de M. Bertrand, ni même dans la *Théorie de la fonction gamma*, par Henri Limbourg. Legendre démontre la formule (N), mais d'une manière un peu obscure.

X.

Dans la Note citée plusieurs fois, j'ai donné certains développement de $\frac{1}{\pi}$, déduits de la formule (G); en particulier :

$$\frac{4}{\pi}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2+\cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

On en peut trouver d'autres, qui, combinés avec celui-ci, conduisent à des résultats intéressants. Prenons, par exemple : $m=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $p=1$; nous aurons

$$\frac{B\left(1,\frac{1}{2}\right)}{B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2\,.\,4}\,\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}-\cdots,$$

ou

$$\frac{2}{\pi}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2-5\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2-\cdots,$$

ou encore

$$1-\frac{2}{\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2+5\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2+\cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

L'élimination de $\frac{1}{\pi}$, entre les égalités (1), (2), donne cette formule assez curieuse :

$$1=5\left(\frac{1}{2}\right)^2+7\left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2+11\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2+15\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\right)^2+\cdots \quad . \; . \quad (P)\ (*)$$

Plus généralement, prenons $p=1$, $q=m$:

$$\frac{B(1,\,m)}{B(m,\,m)}=\sum_{i=0}^{i=\infty} C_{m,\,i}\,.\,C_{m-1,\,i}=1+\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{m-i}{m}(C_{m,\,i})^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

De même,

$$\frac{B(1,\,m)}{B(m+1,\,m)}=1+\sum_{i=1}^{i=\infty}(C_{m,\,i})^2.$$

(*) Je la trouve dans mes notes de 1857.

Mais

$$B(m+1, m) = \frac{1}{2} B(m, m);$$

donc

$$2\frac{B(1, m)}{B(m, m)} = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} (C_{m,i})^2. \qquad (2)$$

Éliminant $\frac{B(1, m)}{B(m,m)}$, entre les égalités (1), (2), on trouve

$$m = \sum_{i=1}^{i=\infty} (2i - m)(C_{m,i})^2. \qquad (Q)$$

Pour $m = \frac{1}{2}$, cette formule devient

$$1 = \sum_{i=1}^{i=\infty} (4i - 1)\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \quad 2i}\right]^2;$$

ce qui ne diffère pas de (P) (*).

XI.

Des formules (1), (2), du paragraphe précédent, on déduit encore :

$$\frac{B(1, m)}{B(m, m)} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{i}{m}(C_{m,i})^2 = m \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i}(C_{m-1,i-1})^2.$$

Mais

$$B(1, m) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{m};$$

donc

$$\frac{1}{B(m, m)} = m^2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i}(C_{m-1,i-1})^2; \qquad (R)$$

(*) La relation (Q) équivaut à celle-ci :

$$m \sum_{i=0}^{i=\infty} (C_{m,i})^2 = 2 \sum_{i=0}^{i=\infty} i\,(C_{m,i})^2,$$

dont la vérification est facile, au moins quand m est un *nombre entier*.

et, si $m = \frac{1}{4}$:

$$\frac{16}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 8}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\left[\frac{3 \cdot 7 \ldots (4i-1)}{4 \cdot 8 \ldots \quad 4i}\right]^2.$$

Mais

$$\frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2} = \frac{1}{4 F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \text{ (N)};$$

donc

$$\frac{1}{F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 8}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 + \cdots\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad \text{(S)}$$

Si $m = \frac{5}{4}$, on trouve, de la même manière,

$$\frac{16}{9 B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\left[\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4i-3)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \ldots \quad 4i}\right]^2.$$

Et comme

$$\frac{1}{B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\left[\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right]^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{(\pi\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

on a

$$F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{9\pi}{16}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 + \cdots\right\}. \quad . \quad . \quad \text{(T) (*)}$$

(*) La formule connue est

$$F_1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

(LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I[er], p. 65.

XII.

Dans la relation

$$\frac{\mathrm{B}(q, m)}{\mathrm{B}(p, m)} = 1 + \frac{m}{1}\frac{p-q}{q} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(p-q)(p-q-1)}{q(q+1)} + \cdots, \quad . \quad . \quad (\mathrm{H}_1)$$

faisons $q = m$, $p = 1$. Nous aurons, à cause de $\mathrm{B}(1, m) = \frac{1}{m}$:

$$m\mathrm{B}(m, m) = 1 + \frac{m}{1}\frac{1-m}{m} - \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(1-m)m}{m(m+1)} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{(1-m)m(m+1)}{m(m+1)(m+2)} - \cdots$$

$$= 1 + (1-m)\left[\frac{m}{1}\frac{1}{m} - \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m+1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+2} - \cdots\right];$$

ou

$$\mathrm{B}(m, m) = -\frac{1-m}{m}\left[\frac{1}{1-m} - \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+2} + \cdots\right]. \quad (\mathrm{R}_1)$$

Pour $m = \frac{1}{4}$, $m = \frac{3}{4}$, cette formule, *conjuguée* de (R), donne les résultats suivants :

$$\mathrm{F}_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 3\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{1} + \frac{1.3}{4.8}\frac{1}{5} + \frac{1.3.7}{4.8.12}\frac{1}{9} + \cdots\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{T}_1)$$

$$\frac{\pi}{\mathrm{F}_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = 4\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{5} + \frac{1}{4.8}\frac{1}{7} + \frac{1.5}{4.8.12}\frac{1}{11} + \cdots\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{S}_1)$$

En les combinant avec (S), (T), on trouve encore

$$\frac{4}{9} = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.5}{4.8}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^2 + \cdots\right]\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{4.8}\frac{1}{7} + \frac{1.5}{4.8.12}\frac{1}{11} + \cdots\right],$$

$$\frac{4}{3} = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3.7}{4.8}\right)^2 + \cdots\right]\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{1} + \frac{1.3}{4.8}\frac{1}{5} + \frac{3.7}{4.8.12}\frac{1}{9} + \cdots\right];$$

etc.

XIII.

Dans la formule

$$\frac{1}{m^2 B(m, m)} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} (C_{m-i, i-1})^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(R)}$$

supposons que m soit un *nombre entier*. Le premier membre égale

$$\frac{\Gamma(2m)}{m^2 [\Gamma(m)]^2} = \frac{1}{m} C_{2m-1, m-1}.$$

Le second membre, développé, devient

$$1 + \left(\frac{m-1}{1}\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{m-1}{1}\,\frac{m-2}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{m}[C_{2m-1, m-1} - 1] = 1 + \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{m-1}{1}\,\frac{m-2}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \cdots \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 \frac{1}{m-1}. \quad \text{(U)}$$

Il est assez facile de démontrer que, *si* m *est premier*, $C_{2m-1, m-1} - 1$ *est divisible par* m. Donc, m *étant un nombre premier* :

$$1 + \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 \frac{1}{m-1} = \textit{entier}.$$

Soit, par exemple, $m = 7$:

$$1 + \left(\frac{6}{1}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{6}{1}\right)^2 \frac{1}{6} = 245 \text{ (*)}.$$

(*) La réciproque n'est pas vraie : pour $m = 9$,

$$1 + \left(\frac{8}{1}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\right)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2}\right)^2 \frac{1}{7} + \left(\frac{8}{1}\right)^2 \frac{1}{8} =$$

$$\textit{entier} + \frac{28^2}{3} + \frac{56^2}{6} = \textit{entier}.$$