MÉMOIRE

SUR

LA TRANSFORMATION DES SÉRIES

ET SUR

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES,

PAR

E. CATALAN.

(Mémoire présenté à la séance du 1er avril 1865.)

MÉMOIRE

SUR

LA TRANSFORMATION DES SÉRIES

ET SUR

QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

Ce Mémoire est composé de deux parties.

Dans la première, je fais d'abord connaître quelques théorèmes sur la transformation des séries, qui m'ont été communiqués par M. Leclert, conducteur des ponts et chaussées à Neufchâtel en Bray, et correspondant de la Société Philomathique. Après avoir démontré et simplifié ces théorèmes, je les applique à diverses séries remarquables, en particulier à celle-ci :

$$1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \ldots,$$

dont la limite, si je ne me trompe, n'avait pas encore été calculée.

Dans la seconde partie, je donne les valeurs d'un assez grand nombre d'intégrales définies qui dépendent, soit d'une intégrale déterminée autrefois par MM. Bertrand et Serret, soit de la constante dont il vient d'être question.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES SUR LA TRANSFORMATION DES SÉRIES.

1. Considérons une série convergente

$$u_1 + u_2 + u_n + \ldots. + u_n + \ldots. \qquad (1)$$

ayant pour *somme* ou pour *limite* s, de manière que

$$s = \sum_1^\infty u_n.$$

Soit α_n une fonction de n telle, que le produit $\alpha_n u_n$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, et telle, en outre, que la quantité

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n} \qquad (2)$$

tende en même temps vers une limite finie A, *différente de zéro.* Posons

$$u'_n = \left(1 - \frac{a_n}{A}\right) u_n \qquad (3)$$

Le coefficient de u_n a pour limite zéro; donc, à partir d'une valeur de n suffisamment grande, il reste compris entre zéro et une quantité assignable δ. De là résulte que la *série dérivée*

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + \ldots + u'_n + \ldots \qquad (4)$$

est convergente. Désignant par s' la somme de cette nouvelle série, je dis que l'on a

$$s = \frac{\alpha_1 u_1}{A} + s' \; (*) \qquad (A)$$

(*) Ce Mémoire a été rédigé à la campagne. Depuis mon retour à Paris, j'ai reconnu que l'*équation fondamentale* (A) est comprise dans une formule générale de transformation, due à M. Kummer (Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 261). Néanmoins, comme j'ignore si le célèbre géomètre de Berlin a trouvé aussi les théorèmes (C), (A′), (C′), j'ai cru devoir ne rien changer à ma rédaction primitive.

En effet, l'équation (3) donne d'abord

$$s' = s - \frac{1}{A}\sum_1^\infty a_n u_n.$$

Mais (2)

$$a_n u_n = \alpha_n u_n - \alpha_{n+1} u_{n+1};$$

donc

$$\sum_1^\infty a_n u_n = \alpha_1 u_1 - \lim \alpha_{n+1} u_{n+1};$$

ou, d'après ce que l'on a supposé sur la fonction α_{n+1},

$$\sum_1^\infty a_n u_n = \alpha_1 u_1;$$

etc.

2. Lorsque le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite λ moindre que l'unité positive, on peut prendre, pour la quantité α_n, soit l'unité, soit une fraction qui tende vers l'unité. Dans les deux cas, $A = 1 - \lambda$; et, conséquemment,

$$s = \frac{\alpha_1 u_1}{1-\lambda} + s'. \qquad (5)$$

Si la série proposée a tous ses termes positifs, et que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait pour limite l'unité, on pourra supposer

$$\alpha_n = n, \quad \alpha_n = nln, \quad \alpha_n = nlnlln, \ldots.$$

suivant que la première des quantités

$$\lim\left[n - (n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$
$$\lim\left[nln - (n+1)\,l\,(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$
$$\lim\left[nlnlln - (n+1)\,l\,(n+1)\,ll\,(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui sera positive, sera la première, ou la deuxième, ou la troisième,... de ces quantités (*).

(*) *Traité élémentaire des séries,* chap. II, théorème XIV. C'est en partant de ce théorème que M. Leclert est arrivé, non-seulement au principe fondamental exprimé par l'équation (A),

3. Considérons spécialement le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite moindre que l'unité positive. Alors on peut supposer

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda + \frac{1}{\varphi(n)},$$

$\varphi(n)$ étant une fonction *divergente*. De là résulte, si l'on prend $\alpha_n = 1$:

$$a_n = 1 - \lambda - \frac{1}{\varphi(n)},$$
$$\mathrm{A} = 1 - \lambda,$$
$$1 - \frac{a_n}{\mathrm{A}} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{\varphi(n)},$$

et enfin

$$u'_n = \frac{1}{1-\lambda} \, \frac{u_n}{\varphi(n)}.$$

Les termes de la série dérivée (4), multipliés, s'il le faut, par le facteur constant $1 - \lambda$, sont donc ordinairement beaucoup plus petits que les termes de la série primitive (1). Par suite, le terme $\frac{\alpha_1 u_1}{\mathrm{A}}$ est, ordinairement aussi, presque égal à la somme inconnue s, du moins lorsque la série (1) a tous ses termes positifs. Cette simple remarque permet déjà d'entrevoir combien peut être utile le procédé de M. Leclert.

4. Si l'on opère sur la série dérivée comme sur la série primitive, et ainsi de suite, on est conduit à ce système de formules :

$$\left.\begin{array}{llll}
a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}, & \lim a_n = \mathrm{A}, & u'_n = \left(1 - \dfrac{a_n}{\mathrm{A}}\right) u_n, & s = \dfrac{\alpha_1 u_1}{\mathrm{A}} + s' \\
a'_n = \alpha'_n - \alpha'_{n+1} \dfrac{u'_{n+1}}{u'_n}, & \lim a'_n = \mathrm{A}', & u''_n = \left(1 - \dfrac{a'_n}{\mathrm{A}'}\right) u'_n, & s' = \dfrac{\alpha'_1 u'_1}{\mathrm{A}'} + s'' \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)} - \alpha_{n+1}^{(k)} \dfrac{u_{n+1}^{(k)}}{u_n^{(k)}}, & \lim a_n^{(k)} = \mathrm{A}^{(k)}, & u_n^{(k+1)} = \left(1 - \dfrac{a_n^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}}\right) u_n^{(k)}, & s^{(k)} = \dfrac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}} + s^{(k+1)}
\end{array}\right\} \quad (6)$$

mais encore aux diverses propositions démontrées plus loin. Je serais heureux si le travail que je publie aujourd'hui, en faisant connaître les remarquables méthodes de M. Leclert, attirait, sur ce modeste fonctionnaire, la bienveillance de l'administration des ponts et chaussées.

d'où résulte, non-seulement

$$s = \frac{\alpha_1 u_1}{A} + \frac{\alpha'_1 u'_1}{A'} + \dots + \frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{A^{(k)}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(k+1)}, \quad \dots \dots \dots \quad \text{(B)}$$

mais encore

$$s = \sum_1^\infty \frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{A^{(k)}}, \quad \dots \dots \dots \quad \text{(C)}$$

pourvu que la quantité $\frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{A^{(k)}}$ *ait pour limite zéro.*

5. L'équation ou le théorème (B), qui n'est qu'une extension du principe fondamental (A), permet d'augmenter autant qu'on le veut, pour ainsi dire, la convergence d'une série donnée; la formule (C) modifie complétement la forme de cette série et la rend, presque toujours, très-convergente.

6. M. Leclert a imaginé une seconde transformation, souvent moins commode que la première, mais cependant utile dans certains cas. Voici en quoi elle consiste :

Pour plus de clarté, représentons par

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

la série proposée, et conservons nos autres notations. Si l'on pose

$$v'_n = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) \alpha_{n+1} v_{n+1}, \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

je dis que l'on aura

$$s = \frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + s' \quad \dots \dots \dots \quad \text{A}')$$

En effet,

$$\sum_1^\infty v'_n = \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) \alpha_2 v_2 + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) \alpha_3 v_3 + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3}\right) \alpha_4 v_4 + \dots,$$

ou

$$\sum_1^\infty v'_n = -\frac{\alpha_2 v_2}{a_1} + \frac{1}{a_2}(\alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3) + \frac{1}{a_3}(\alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4) + \dots.$$

Mais, d'après la formule (2), appliquée au cas actuel,

$$\alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 = a_2 v_2, \quad \alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4 = a_3 v_3, \quad \dots\dots;$$

donc

$$\sum_1^\infty v'_n = -\frac{\alpha_2 v_2}{a_1} + \sum_2^\infty v_n;$$

puis

$$\frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + s' = \frac{\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2}{a_1} + \sum_2^\infty v_n,$$

ou

$$\frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + s' = s.$$

7. L'emploi réitéré du *second principe fondamental* (A′) donne, avec la même restriction que ci-dessus (4):

$$s = \frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + \frac{\alpha'_1 v'_1}{a'_1} + \ldots + \frac{\alpha_1^{(k)} v_1^{(k)}}{a_1^{(k)}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n^{(k+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{B}'),$$

$$s = \sum_1^\infty \frac{\alpha_1^{(k)} v_1^{(k)}}{a_1^{(k)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{C}')$$

PREMIÈRE APPLICATION.

8. *Transformer la série de Leibnitz :*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

De

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

on tire, en prenant

$$\alpha_n = 1:$$

$$a_n = 1 + \frac{2n-1}{2n+1}, \quad \mathrm{A} = 2, \quad 1 - \frac{a_n}{\mathrm{A}} = \frac{1}{2n+1};$$

puis

$$u'_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1};$$

et, par conséquent,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

9. Pour obtenir une série plus convergente, j'applique de nouveau la première transformation, en supposant

$$\alpha'_n = \frac{2n+1}{2n-1}.$$

Je trouve ainsi :

$$a'_n = 2\frac{4n^2+1}{4n^2-1}, \quad A' = 2, \quad u''_n = 2\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2};$$

puis

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

10. Une troisième application du même procédé donne, si l'on fait

$$\alpha''_n = \frac{2n+1}{2n-3}:$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} + 24\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Si l'on prend seulement quatre termes de la dernière série, on trouve

$$\pi = 3,141\,510\,3\ldots,$$

valeur approchée, *par défaut*, à moins de $\frac{32}{99.33.91} = 0{,}000\ 10\ldots$

11. La seconde transformation conduit de même à des résultats satisfaisants. En effet, si l'on part de

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \alpha_n = 1,$$

on trouve (8)

$$v'_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n(n+1)(2n+1)};$$

puis

$$\pi = 3 + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

En second lieu, la valeur de v'_n, combinée avec

$$\alpha'_n = \frac{2n+1}{n-1},$$

donne

$$v''_n = \frac{9}{2}\,\frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+2)\,(2n+1)^2\,(2n+3)^2};$$

d'où résulte

$$\pi = \frac{19}{6} - 18\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(n+2)\,(2n+1)^2\,(2n+3)^2}\,(^*). \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

12. Le choix des fonctions α_n, α'_n, α''_n,... étant presque arbitraire, le nombre des séries dérivées de la série primitive est indéfini. Dans l'exemple précédent, si, après avoir mis la valeur de $\frac{\pi}{4}$ sous la forme

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1},$$

on prend

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}, \quad \alpha_n = \frac{2n+1}{2n-1},$$

il vient

$$a_n = \frac{4n}{2n-1}, \quad A = 2, \quad u'_n = -\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)};$$

puis

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)};$$

ou, si l'on fait sortir de sous le signe $\sum$ le terme qui répond à $n = 1$:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = \frac{1}{6} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Pour transformer la nouvelle série, prenons

$$u'_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \alpha'_n = \frac{2n+3}{2n-1};$$

nous trouverons, de la même manière,

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{6} - 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},$$

(*) Ce développement m'a été indiqué par M. Leclert.

ou

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{30} + 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

En général, soient

$$u_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+1)}, \quad \alpha_n^{(k)} = \frac{2n+2k+1}{2n-1};$$

d'où

$$a_n^{(k)} = 2\,\frac{2n+k}{2n-1}, \quad u_n^{(k+1)} = -\frac{(k+1)(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)\ldots(2n+2k+1)};$$

et, par conséquent (A) :

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3.5\ldots.(2k+1)} - (k+1)\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)\ldots(2n+2k+1)}.$$

Si l'on met encore à part le premier terme de la nouvelle série (*), on trouve, au lieu de cette relation,

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+1)}$$
$$= \frac{1}{2.3.5.7..(2k+3)} + (k+1)\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2k+3)};$$

ou, pour abréger,

$$\sum_k = \frac{1}{2.3.5.7\ldots(2k+3)} + (k+1)\sum_{k+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

13. Avant d'aller plus loin, observons que si l'on supposait

$$u_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)(2n+2x+3)\ldots.(2n+2x+2k+1)}, \quad \alpha_n^{(k)} = \frac{2n+2x+2k+1}{2n+2x-1},$$

on trouverait, sans nouveau calcul,

$$u_n^{(k+1)} = -\frac{(k+1)(-1)^{n-1}}{(2n+2x-1)(2n+2x+1)\ldots.(2n+2x+2k+1)}.$$

(*) Cette petite transformation, déjà employée trois fois, a pour but d'éviter les fractions à dénominateurs négatifs, lesquelles, comme on le reconnaît sans peine, conduiraient à des développements peu convergents, ou même divergents.

Conséquemment, x étant une quantité positive quelconque, on a cette relation générale :

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)\ldots.(2n+2x+2k+1)}\\ &=\frac{1}{2(3+2x)\ldots.(2k+3+2x)}+(k+1)\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)\ldots..(2n+2x+2k+3)}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

14. Revenons maintenant à l'équation (15). En y supposant, successivement, $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$,... nous trouvons

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_0 &= \frac{1}{2.3}+\sum\nolimits_1,\\ \sum\nolimits_1 &= \frac{1}{2.3.5}+2\sum\nolimits_2,\\ \sum\nolimits_2 &= \frac{1}{2.3.5.7}+3\sum\nolimits_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'ailleurs $\frac{\pi}{4}=1-\sum_0$; donc, par les équations (B) et (C) :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=1-\frac{1}{2.3}-\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)},\\ \frac{\pi}{4}&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.5}\right)-2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)},\\ \frac{\pi}{4}&=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1.2}{3.5.7}\right)-2.3\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1.2}{3.5.7}+\frac{1.2.3}{3.5.7.9}+\ldots.\right] \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Cette expression de $\frac{\pi}{4}$ a une grande analogie avec celle qui résulte de la méthode d'Euler appliquée à la série de Leibnitz. On trouve effectivement, par cet autre procédé de transformation,

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1.2}{3.5}+\frac{1.2.3}{3.5.7}+\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}+\ldots.\right]^{(*)}$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 123.

15. La série (18) est peu convergente; mais il est facile d'en trouver d'autres qui le soient beaucoup plus. En effet, remarquons d'abord que l'équation (16), traitée comme la relation (15), donne

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(2x+3)(2x+5)} + \frac{1.2}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)} \cdots\right],$$

ou, sous une forme plus élégante,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+2x+1} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{(2x+3)(2x+5)\ldots(2x+2p+3)} \quad \ldots \quad (19)$$

Maintenant, donnons à x les valeurs entières $0, 1, 2, 3, \ldots q$; nous aurons ces nouvelles expressions de $\frac{\pi}{4}$, contenant des séries qui ne sont autre chose que des développements du reste de la série de Leibnitz :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{1.2.3\ldots p}{3.5.7\ldots(2p+3)},\\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{1.2.3\ldots p}{5.7.9\ldots(2p+5)},\\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{1.2.3\ldots p}{7.9.11\ldots(2p+7)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2q+1} \mp \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{(2q+3)(2q+5)\ldots(2p+2q+3)}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

16. Si, dans la relation générale (19), on suppose $x=\frac{1}{2}$, on trouve aisément

$$l2 = 1 - \sum_0^\infty \frac{1}{2^{p+1}(p+1)(p+2)} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Plus généralement, soit $x = q - \frac{1}{2}$, q étant un nombre entier; il vient, de la même manière,

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{q} \mp \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{2^{p+1}(q+1)(q+2)\ldots\ldots(q+p+1)} \quad \ldots \quad (22)$$

17. Faisons une application des formules (20) et (22), en supposant $q=5$, et en prenant seulement quatre termes dans chacune des deux séries. Nous aurons

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{13}+\frac{1}{13.15}+\frac{1.2}{13.15.17}+\frac{1.2.3}{13.15.17.19}+\mathrm{R}\right],$$

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\left[\frac{1}{2.6}+\frac{1}{4.6.7}+\frac{1}{4.6.7.8}+\frac{1}{16.7.8.9}+\mathrm{R}'\right]$$

Il est facile de voir que le reste R est inférieur à $2\frac{1.2.3.4}{13.15.17.19.21}$. De même, $\mathrm{R}'<2\frac{2.3.4}{32.6.7.8.9.10}$. D'après cela,

$$\frac{\pi}{4}>1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{26}\left[1+\frac{1}{15}+\frac{2}{15.17}+\frac{2}{5.17.19}\right],$$

$$\frac{\pi}{4}<1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{26}\left[1+\frac{1}{15}+\frac{2}{15.17}+\frac{2}{5.17.19}+\frac{16}{5.17.19.21}\right];$$

$$l2<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\left[1+\frac{1}{2.7}+\frac{1}{2.7.8}+\frac{1}{4.7.8.3}\right],$$

$$l2>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\left[1+\frac{1}{2.7}+\frac{1}{2.7.8}+\frac{1}{4.7.8.3}+\frac{1}{7.8.3.10}\right];$$

ou, après la réduction en décimales :

$$\pi>3{,}141\ 544,\qquad \pi<3{,}141\ 617;$$
$$l2<0{,}693\ 180,\qquad l2>0{,}693\ 130.$$

Les moyennes entre ces limites donnent

$$\pi=3{,}141\ 58,\qquad l2=0{,}693\ 15;$$

et ces résultats sont approchés à moins d'une unité du cinquième ordre.

18. Dans la relation générale (19), remplaçons $2x$ par $z-2$, et supposons que z soit une quantité comprise entre $+1$ et -1 : les séries contenues dans les deux membres seront encore convergentes; donc

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+z-1}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1.2.3\ldots.p}{(1+z)(3+z)\ldots(2p+1+z)}\ \ldots\ldots\ (23);$$

puis, par le changement de z en $-z$:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-z-1} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots.p}{(1-z)(3-z)\ldots(2p+1-z)} \quad \ldots \quad (24)$$

On a

$$\frac{1}{2n-1+z} + \frac{1}{2n-1-z} = \frac{2(2n-1)}{(2n-1)^2 - z^2};$$

par conséquent

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1+z} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1-z} = 2 \sum_1^\infty \frac{2n-1}{(2n-1)^2 - z^2} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi z}{2}} \text{ (*)};$$

donc enfin

$$\frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{(1+z)(3+z)\ldots(2p+1+z)} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p}{(1-z)(3-z)\ldots(2p+1-z)} . (25)$$

Cette relation remarquable, sur laquelle je reviendrai peut-être dans une autre occasion, donne, en particulier, diverses expressions de π. Si par exemple on suppose $z = \frac{2}{3}$, on trouve

$$2\pi = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p.3^{p+1}}{5.11.17\ldots(6p+5)} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1.2.3\ldots p.3^{p+1}}{1.7.13\ldots(6p+1)} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

DEUXIÈME APPLICATION.

19. *Transformer la série*

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Appliquons à cette suite la première transformation, en supposant $\alpha_n = n$. A cause de $u_n = \frac{1}{n^2}$, nous avons

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \ \mathrm{A} = 1.$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 113.

Donc

$$u'_n = \frac{1}{n^2(n+1)};$$

puis, par la formule (A),

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

20. Le même procédé, appliqué plusieurs fois, donne, en supposant $\alpha'_n = n$, $\alpha''_n = n, \ldots$:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{4} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)},$$

$$2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{9} + 2.3\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$2.3\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{16} + 2.3.4\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \text{ etc.}$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{4} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}, \\ \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 2.3\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}, \\ \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + 2.3.4\sum_1^\infty \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (29)$$

21. La formule (C) devient, dans le cas actuel,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots;$$

en sorte que, par exception, elle ramène au point de départ. Pour obvier à cet inconvénient, je prends, au lieu de la valeur précédente de α_n,

$$\alpha_n = n + \frac{1}{2}.$$

Il en résulte

$$a_n = \frac{2(n+1)^2 - 1}{2(n+1)^2}, \quad A = 1, \quad u'_n = \frac{1}{2n^2(n+1)^2}.$$

Cette valeur de u'_n, combinée avec

$$\alpha'_n = n + \frac{4}{2},$$

conduit à

$$a'_n = \frac{6(n+2)^2 - 8}{2(n+2)^2}, \quad A' = 3, \quad u''_n = \frac{2^3}{2^2.3n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Faisant

$$\alpha''_n = n + \frac{7}{2},$$

on trouve, de la même manière,

$$a''_n = \frac{10(n+3)^2 - 27}{2(n+3)^2}, \quad A'' = 5, \quad u_n''' = \frac{(2.3)^3}{2^3.3.5n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}.$$

Les lois que suivent ces diverses fonctions sont maintenant visibles, et l'on prouve, sans difficulté, que :

$$u_n^{(k)} = \frac{(1.2.3\ldots k)^3}{2^k.1.3.5\ldots(2k-1)n^2(n+1)^2\ldots(n+k)^2},$$

$$\alpha_n^{(k)} = n + \frac{3k+1}{2}, \quad A^{(k)} = 2k+1.$$

La formule (C) donne ensuite

$$\frac{\pi^2}{9} = \sum_0^\infty \frac{1.2.3\ldots.k}{2^k(k+1)1.3.5\ldots(2k+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

22. Le terme général de la nouvelle série équivaut à

$$\frac{(1.2.3\ldots k)^2}{(k+1)(2k+1).1.2.3.4\ldots 2k};$$

donc il est réductible à $\frac{1}{N_{k+1}}$, N_{k+1} étant un nombre entier. Partant de $N_1 = 1$, on calcule aisément N_2, N_3, N_4,... au moyen de la relation

$$N_{k+1} = N_k \frac{(2k+1)(2k+2)}{k^2}.$$

On trouve ainsi :

$$N_2 = 12,\ N_3 = 90,\ N_4 = 560,\ N_5 = 3\ 150,\ N_6 = 16\ 632,\ N_7 = 84\ 084,\ \ldots$$

De plus, comme les termes de la série décroissent plus rapidement que ceux d'une progression dont la *raison* serait $\frac{1}{4}$, le *reste* est toujours inférieur au tiers du terme auquel on s'arrête. Par exemple,

$$\frac{\pi^2}{9} > 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{90} + \frac{1}{560} + \frac{1}{3\ 150} + \frac{1}{16\ 632} + \frac{1}{84\ 084},$$

$$\frac{\pi^2}{9} < 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{90} + \frac{1}{560} + \frac{1}{3\ 150} + \frac{1}{16\ 632} + \frac{1}{84\ 084} + \frac{1}{252\ 252};$$

c'est-à-dire, à moins de *quatre* unités du sixième ordre,

$$\frac{\pi^2}{9} = 1{,}096\ 620.$$

23. On peut généraliser la formule (30), dont le premier membre équivaut à $\frac{2}{3}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$, comme on a généralisé l'équation (18). On trouve ainsi, en désignant par x une quantité quelconque, supérieure à -1 :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(1\,.\,2\,.\,3\ldots.k)^3\left(x + \dfrac{3k+3}{2}\right)}{2^k\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k+1)\,.\,(1+x)^2(2+x)^2\ldots.(k+1+x)^2} \quad \ldots (31)$$

24. Le premier membre de cette nouvelle égalité représente, comme l'on sait, la fonction $\frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2}$. On a donc un développement de cette fonction, d'une forme assez remarquable. Du reste, l'équation à laquelle nous venons de parvenir, traitée comme la relation (19), conduit, non-seulement à une infinité de séries ayant pour somme $\frac{\pi^2}{6}$, mais encore à d'autres résultats intéressants. Si, par exemple, on suppose $x = -\frac{1}{2}$, et si l'on se rappelle que

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_0^\infty 2^k(3k+2)\left[\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots.k}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k+1)}\right]^3 \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

25. Nous noterons encore la formule à laquelle on parvient quand, après avoir multiplié par $(1+x)^2$ les deux membres de l'équation (31), on fait tendre x vers (-1). On obtient ainsi, à la limite,

$$1=\sum_0^\infty \frac{3k+1}{2^{k+1}} \frac{1.2.3\ldots.k}{1.3.5\ldots(2k+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

26. Revenons à la série (27), et appliquons-y la seconde méthode de M. Leclert. A cause de $v_n=\frac{1}{n^2}$, nous aurons d'abord, en prenant $\alpha_n=n$:

$$a_n=\frac{n}{n+1},\ \mathrm{A}=1,\ v'_n=-\frac{1}{n(n+1)^2};$$

donc

$$\frac{\pi^2}{6}=2-\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Soit ensuite

$$\alpha'_n=n+1;$$

il vient :

$$a'_n=2\frac{n+1}{n+2},\quad \mathrm{A}'=2,\quad v''_n=-\frac{1}{2(n+1)^2(n+2)^2};$$

puis

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{13}{8}+\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2};$$

ce que l'on peut écrire :

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\sum_1^\infty \frac{1}{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Ainsi : *La somme des carrés des inverses des nombres naturels, est égale à* $\frac{3}{2}$, *plus le huitième de la somme des carrés des inverses des nombres triangulaires.*

C'est ce qu'il est aisé de vérifier directement.

Ajoutons enfin que, si l'on représente par S_1 la somme des carrés des inverses des nombres triangulaires, et par S_2 la somme des carrés des inverses des autres nombres entiers, on a

$$S_1=\frac{4}{3}\pi^2-12,\quad S_2=12-\frac{7}{6}\pi^2.$$

TROISIÈME APPLICATION.

27. *Transformer la série*

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots \pm \frac{1}{(2n-1)^2} \mp \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Ainsi que je l'ai dit en commençant, un assez grand nombre d'intégrales définies se ramènent à la limite de cette série, limite qui n'a pas encore été calculée. Je la représenterai par la lettre G. Après avoir essayé bien des transformations, je me suis adressé à M. Leclert; c'est alors qu'il m'a fait connaître ses ingénieuses méthodes, et qu'il en a fait l'application à la série (35).

De

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2},$$

on tire, en supposant

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2n-3}:$$

$$a_n = 2\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)(2n-3)}, \quad A' = 2, \quad u'_n = (-1)^n \frac{4}{(2n-3)(2n+1)^2(2n+1)};$$

puis, après quelques réductions,

$$G = \frac{5}{6} + 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-1)^2(2n+3)} \text{ (*)}. \ldots \ldots \quad (36)$$

Partant de cette première transformée, et prenant, successivement,

$$\alpha'_n = \frac{2n+5}{2n-1}, \quad \alpha''_n = \frac{2n+5}{2n-3},$$

on trouve ces deux développements :

$$G = \frac{19}{18} - 32\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2}, \ldots \ldots \quad (37)$$

$$G = \frac{2\,909}{3\,150} - 768\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+5)^2(2n+7)} \ldots \quad (38)$$

(*) Formule trouvée par M. Leclert.

28. Pour passer au calcul numérique, soient d'abord

$$d_n = (2n-1)(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+5)^2(2n+7),$$
$$d_{n+1} = (2n+1)(2n+3)^2(2n+5)^2(2n+7)^2(2n+9);$$

d'où

$$d_{n+1} = d_n \frac{(2n+7)(2n+9)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Partant de d_1, et appliquant cette relation, on forme le tableau suivant :

$$d_1 = 3^2\ 5^2.7^2.9 = 99\ 225,$$
$$d_2 = d_1 \frac{9.11}{3} = d_1.33 = 3\ 274\ 425,$$
$$d_3 = d_2 \frac{11.13}{3.5} = 218\ 295.143 = 31\ 216\ 185,$$
$$d_4 = d_3 \frac{13.15}{5.7} = 4\ 459\ 455.39 = 173\ 918\ 745,$$
$$d_5 = d_4 \frac{15.17}{7.9} = 8\ 281\ 845.85 = 703\ 956\ 825,$$
$$d_6 = d_5 \frac{17.19}{9.11} = 7\ 110\ 675.17.19 = 2\ 296\ 748\ 025,$$
$$d_7 = d_6 \frac{19.21}{11.13} = 16\ 061\ 175.19.21 = 6\ 408\ 408\ 825,$$
$$d_8 = d_7 \frac{21.23}{13.15} = 98\ 590\ 905.161 = 15\ 873\ 135\ 705,$$
$$d_9 = d_8 \frac{23.25}{15.17} = 311\ 257\ 955.115 = 35\ 792\ 564\ 825,$$
$$d_{10} = d_9 \frac{25.27}{17.19} = 110\ 812\ 275.675 = 74\ 798\ 285\ 625,$$
$$d_{11} = d_{10} \frac{27.29}{19.21} = 562\ 395\ 125.261 = 146\ 784\ 605\ 625,$$
$$d_{12} = d_{11} \frac{29.31}{21.23} = 303\ 901\ 875\ 899 = 275\ 207\ 785\ 625,$$
$$d_{13} = d_{12} \frac{31.33}{23.25} = 475\ 143\ 975.1\ 023 = 486\ 072\ 286\ 425,$$
$$d_{14} = d_{13} \frac{33.35}{25.27} = 10\ 801\ 606\ 565.77 = 831\ 723\ 690\ 105,$$

$$d_{15} = d_{14}\frac{35.37}{27.29} = 1\ 062\ 226\ 935.35.37 = 1\ 575\ 585\ 880\ 825,$$

$$d_{16} = d_{15}\frac{37.39}{29.31} = 1\ 550\ 126\ 675.37.39 = 2\ 207\ 972\ 792\ 025.$$

Si l'on réduit en décimales les diverses fractions qui entrent dans la formule (38), on obtient ce second tableau :

$$\frac{2909}{3150} = 0,\ 925\ 492\ 063\ 492\ldots.$$

$$\frac{768}{d_1} = 0,\ 007\ 739\ 984\ 882\ldots, \qquad r = 85\ 550\ (^*);$$

$$\frac{768}{d_2} = 0,\ 000\ 254\ 544\ 996, \qquad r = 1\ 472\ 700;$$

$$\frac{768}{d_3} = 0,\ 000\ 024\ 602\ 622, \qquad r = 162\ 950;$$

$$\frac{768}{d_4} = 0,\ 000\ 004\ 415\ 885, \qquad r = 40\ 298\ 025;$$

$$\frac{768}{d_5} = 0,\ 000\ 001\ 090\ 975, \qquad r = 702\ 845\ 625;$$

$$\frac{768}{d_6} = 0,\ 000\ 000\ 334\ 585, \qquad r = 1\ 911\ 660\ 575;$$

$$\frac{768}{d_7} = 0,\ 000\ 000\ 119\ 842, \qquad r = 5\ 469\ 594\ 350;$$

$$\frac{768}{d_8} = 0,\ 000\ 000\ 048\ 583, \qquad r = 10\ 075\ 184\ 985;$$

$$\frac{768}{d_9} = 0,\ 000\ 000\ 021\ 456, \qquad r = 39\ 020\ 314\ 800;$$

$$\frac{768}{d_{10}} = 0,\ 000\ 000\ 010\ 267, \qquad r = 46\ 001\ 488\ 125;$$

$$\frac{768}{d_{11}} = 0,\ 000\ 000\ 005\ 252, \qquad r = 22\ 943\ 370\ 000;$$

$$\frac{768}{d_{12}} = 0,\ 000\ 000\ 002\ 811, \qquad r = 12\ 914\ 608\ 125;$$

$$\frac{768}{d_{13}} = 0,\ 000\ 000\ 001\ 580, \qquad r = 5\ 787\ 448\ 500;$$

(*) r désigne le reste de la treizième division partielle.

$$\frac{768}{d_{14}} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 923, \qquad r = 519\ 034\ 035\ 085;$$

$$\frac{768}{d_{15}} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 558, \qquad r = 424\ 194\ 499\ 650;$$

$$\frac{768}{d_{16}} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 347, \qquad r = 1\ 843\ 441\ 167\ 525.$$

$$\frac{768}{d_{17}} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 222,$$

$$\frac{768}{d_{18}} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 145,$$

$$\frac{768}{d_{19}} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 097, \text{ (*)}$$

On trouve, au moyen de ces valeurs, et à moins d'une unité du dixième ordre,

$$G = 0{,}915\ 695\ 594\ 1.$$

Pour obtenir un tel degré d'approximation, en employant directement la série (35), il eût fallu en calculer environ *cinquante mille termes*. Néanmoins, on peut arriver à des transformées plus convergentes que la série (38), et donnant lieu à des calculs moins compliqués que ceux dont nous venons de rapporter les éléments.

29. A cet effet, après avoir mis la série (35) sous la forme

$$G = 1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2} \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

prenons généralement

$$u_n^{(2k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2(2n+3)^2\ldots\ldots(2n+4k+1)^2}; \quad \alpha_n^{(2k)} = \frac{2n+4k+1}{2n-1}.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$a_n^{(2k)} = 2\,\frac{4n^2+4(2k+1)n+8k^2+8k+1}{(2n-1)(2n+4k+3)},\ A^{(2k)} = 2,\ 1-\frac{a_n^{(2k)}}{A^{(2k)}} = -\frac{4(k+1)(2k+1)}{(2n-1)(2n+4k+3)};$$

$$u_n^{(2k+1)} = -4\,\frac{(k+1)(2k+1)(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2\ldots(2n+4k+1)^2(2n+4k+3)};$$

(*) Les trois derniers termes ont été calculés par logarithmes.

(**) Voir la note de la page 11.

puis, par la formule fondamentale (A) :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(2k)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^2.5^2....(4k+1)^2(4k+3)} - 4(k+1)(2k+1)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2...(2n+4k+1)^2(2n+4k+3)};$$

ou bien, en faisant sortir de sous le signe $\sum$ le premier terme,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(2k)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^2.5^2.....(4k+1)^2(4k+3)} - 4\,\frac{(k+1)(2k+1)}{3^2.5^2...(4k+3)^2(4k+5)}$$

$$+ 4(k+1)(2k+1)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)^2.....(2n+4k+3)^2(2n+4k+5)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Soient ensuite

$$u_n^{(2k+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n+3)^2...(2n+4k+3)^2(2n+4k+5)},\quad \alpha_n^{(2k+1)} = \frac{2n+4k+5}{2n+1};$$

d'où

$$a_n^{(2k+1)} = \frac{2n+4k+5}{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+4k+5},\quad A^{(2k+1)} = 2,\quad 1 - \frac{a_n^{(2k+1)}}{A^{(2k+1)}} = -8\,\frac{(k+1)^2}{(2n+1)(2n+4k+5)},$$

$$u_n^{(2k+1)} = -8\,\frac{(k+1)^2(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2(2n+3)^2...(2n+4k+5)^2};$$

et, conséquemment,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(2k+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^2.5^2....(4k+1)^2} - 8(k+1)^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2(2n+3)^2...(2n+4k+5)^2}. \quad (42)$$

En combinant les équations (41) et (42), on trouve celle-ci :

$$\sum_k = 20\,\frac{(k+1)^2}{1^2.3^2.5^2...(4k+5)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1^2.3^2.5^2...(4k+5)^2} - 32(k+1)^3(2k+1)\sum_{k+1}, \quad (43)$$

dans laquelle

$$\sum_k = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2(2n+3)^2...(2n+2k+1)^2}.$$

30. Si maintenant on suppose $k=0$, $k=1$, $k=2$,... et que l'on ait égard à l'équation (30), on tire, de la relation (43) :

$$G = 1 - 20\,\frac{1}{3^2.5^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^2.5^2} + 32\sum_1,$$

$$G=1-20\left[\frac{1}{3^2.5^2}-\frac{32.2^2}{3^2.5^2.7^2.9^2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5^2.5^2}-\frac{52}{3^2.5^2.7^2.9^2}\right]-32^2.2^3.3\sum\nolimits_2,$$

$$G=1-20\left[\frac{1}{3^2.5^2}-\frac{32.2^2}{3^2.5^2.7^2.9^2}+\frac{32^2.2^3.3.3^2}{3^2.5^2\ldots 13^2}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5^2.5^2}-\frac{52}{3^2.5^2.7^2.9^2}+\frac{32^2.2^3.3}{5^2.5^2\ldots 13^2}\right]$$
$$+32^3(2.3)^3.3.5\sum\nolimits_3,$$

. . . .

et, en général,

$$\left.\begin{aligned}G=1-20&\left[\frac{1}{3^2.5^2}-\ldots\pm\frac{32^k(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)(k+1)^2}{3^2.5^2.7^2\ldots\ldots(4k+5)^2}\right]\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3^2.5^2}-\ldots\pm\frac{32^k(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)}{3^2.5^2.7^2\ldots(4k+5)^2}\right]\\&\mp 32^{k+1}(2.3\ldots k\,\overline{k+1})^3\,3.5\ldots(2k+1)\sum\nolimits_{k+1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(44)$$

On a aussi, par la formule (C),

$$G=1-20\sum_0^\infty(-1)^k\frac{32^k(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)(k+1)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(4k+5)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_0^\infty(-1)^k\frac{32^k(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)}{1^2.3^2.5^2\ldots(4k+5)^2}$$

ou

$$G=1-20\sum_0^\infty A_k+\frac{1}{2}\sum_0^\infty B_k \quad\ldots\ldots\ldots\quad (45);$$

en posant

$$A_k=(-1)^k\frac{32^k(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)(k+1)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(4k+5)^2},\quad B_k=\frac{A_k}{(k+1)^2}.$$

31. On a

$$\frac{(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)(k+1)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(4k+5)^2}=\frac{[\Gamma(k+1)]^3\Gamma(2k)(k+1)^2.2^{4k+4}[\Gamma(2k+3)]^2}{2^{k-1}\Gamma(k)[\Gamma(4k+6)]^2}$$
$$=2^{3k+4}\frac{[\Gamma(k+2)]^2\Gamma(2k+1)[\Gamma(2k+3)]^2}{[\Gamma(4k+6)]^2}$$
$$=2^{3k+4}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(k+2)\Gamma(2k+1)}{\Gamma(4k+6)}\cdot\frac{\Gamma(2k+3)\Gamma(2k+3)}{\Gamma(4k+6)}.$$

Par la théorie des combinaisons, on sait que les deux derniers facteurs sont des nombres entiers; donc *le terme général* A_k *est égal à une puissance de 2*, *divisée par un nombre entier*. De même pour B_k. D'ailleurs, à cause de $A_0 = \frac{1}{3^2.5^2} = \frac{1}{225}$, on calcule aisément A_1, A_2, A_3,... au moyen de la relation

$$A_k = -32\,\frac{k\,(2k-1)\,(k+1)^2}{(4k+3)^2(4k+5)^2}\,A_k.$$

On trouve ainsi :

$$A_1 = -\frac{128}{893\ 025},\quad A_2 = +\frac{8\ 192}{676\ 350\ 675},\quad A_3 = -\frac{4\ 194\ 304}{2\ 931\ 980\ 176\ 125},$$

$$A_4 = +\frac{536\ 870\ 912}{2\ 667\ 281\ 005\ 824\ 435},\quad A_5 = -\frac{68\ 719\ 484\ 416}{2\ 177\ 456\ 253\ 211\ 614\ 375},$$

$$A_6 = +\frac{4\ 598\ 047\ 002\ 624}{825\ 587\ 184\ 183\ 831\ 444\ 575};$$

puis, par la réduction en décimales :

$A_0 = +0,\ 004\ 444\ 444\ 44\ldots,$	$A_5 = -0,\ 000\ 000\ 031\ 55,$
$A_1 = -0,\ 000\ 143\ 333\ 05,$	$A_6 = +0,\ 000\ 000\ 005\ 52,$
$A_2 = +0,\ 000\ 012\ 112\ 06,$	$A_7 = -0,\ 000\ 000\ 000\ 93,$
$A_3 = -0,\ 000\ 001\ 430\ 53,$	$A_8 = +0,\ 000\ 000\ 000\ 17,$
$A_4 = +0,\ 000\ 000\ 201\ 27,$	$A_9 = -0,\ 000\ 000\ 000\ 03$ (*).

La formule $B_k = \frac{A_k}{(k+1)^2}$ donne ensuite :

$B_0 = +0,\ 004\ 444\ 444\ 44,$	$B_5 = -0,\ 000\ 000\ 000\ 88,$
$B_1 = -0,\ 000\ 035\ 833\ 26,$	$B_6 = +0,\ 000\ 000\ 000\ 11,$
$B_2 = +0,\ 000\ 001\ 345\ 78,$	$B_7 = -0,\ 000\ 000\ 000\ 02,$
$B_3 = -0,\ 000\ 000\ 089\ 41,$	$B_8 = +0,\ 000\ 000\ 000\ 00.$
$B_4 = +0,\ 000\ 000\ 008\ 07,$	

Par suite,

$$G = 1 - 20\sum A + \frac{1}{2}\sum B = 0,\ 915\ 965\ 594\ 0.$$

Cette valeur ne diffère, que par la dernière décimale, de celle qui a été trouvée ci-dessus (28).

32. Dans la formule du n° 29, remplaçons n par $n + x$, x étant une

(*) Les trois derniers termes ont été calculés par logarithmes.

quantité positive. Nous aurons, sans nouveau calcul :

$$u_n^{(2k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)^2 \ldots (2n+2x+4k+1)^2}, \quad \alpha_n^{(2k)} = \frac{2n+2x+4k+1}{2n+2x-1},$$

$$a_n^{(2k)} = 2\,\frac{4(n+x)^2 + 4(2k+1)(n+x) + 8k^2 + 8k + 1}{(2n+2x-1)(2n+2x+4k+3)}, \quad A^{(2k)} = 2,$$

$$1 - \frac{a_n^{(2k)}}{A^{(2k)}} = -4\,\frac{(k+1)(2k+1)}{(2n+2x-1)(2n+2x+4k+3)},$$

$$u_n^{(2k+1)} = -4\,\frac{(k+1)(2k+1)(-1)^{n-1}}{(2n+2x-1)(2n+2x+1)^2 \ldots (2n+2x+4k+1)^2(2n+2x+4k+3)},$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(2k)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2x+1)(2x+3)^3 \ldots (2x+4k+1)^2(2x+4k+3)} + \sum_{=1}^{n=\infty} u_n^{(2k+1)},$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(2k)} = {} & \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2x+1)(2x+3)^2 \ldots (2x+4k+1)^2(2x+4k+3)} \\ & - 4\,\frac{(k+1)(2k+1)}{(2x+1)(2x+3)^2 \ldots (2x+4k+3)^2(2x+4k+5)} \\ & + 4(k+1)(2k+1)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)(2n+2x+3)^2 \ldots (2n+2x+4k+3)^2(2n+2x+4k+5)} \quad (46);\end{aligned}$$

$$u_n^{(2k+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)(2n+2x+3)^2 \ldots (2n+2x+4k+3)^2(2n+2x+4k+5)},$$

$$\alpha_n^{(2k+1)} = \frac{2n+2x+4k+5}{2n+2x+1}, \quad a_n^{(2k+1)} = \frac{2n+2x+4k+5}{2n+2x+1} + \frac{2n+2x+1}{2n+2x+4k+5},$$

$$u_n^{(2k+2)} = -8\,\frac{(k+1)^2(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)^2 \ldots (2n+2x+4k+5)^2},$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(2k+1)} = {} & \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2x+3)^2(2x+3)^2 \ldots (2x+4k+5)^2} \\ & - 8(k+1)^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)^2 \ldots (2n+2x+4k+5)^2} \quad \ldots \quad (47)\end{aligned}$$

Éliminant ensuite $\sum u_n^{(2k+1)}$ entre les équations (46) et (47), on arrive à la relation suivante :

$$\begin{aligned}\sum_k = {} & \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2x+1)(2x+3)^2 \ldots (2x+4k+1)^2(2x+4k+3)} \\ & - 4\,\frac{(k+1)(2k+1)}{(2x+1)(2x+3)^2 \ldots (2x+4k+3)^2(2x+4k+5)} \\ & + 2\,\frac{(k+1)(2k+1)}{(2x+3)^2(2x+5)^2 \ldots (2x+4k+5)^2} - 32(k+1)^3(2k+1)\sum_{k+1} \quad \ldots \quad (48),\end{aligned}$$

dans laquelle

$$\sum_k = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)^2 \ldots (2n+2x+4k+1)^2}.$$

La formule (C) donne ensuite, à cause de

$$\sum_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)^2}:$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+2x+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty} D_k - 4\sum_{k=0}^{k=\infty} E_k + 2(2x+1)\sum_{k=0}^{k=\infty} F_k \quad . \quad . \quad (49);$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} D_k &= (-1)^k \frac{32^k (1.2.3\ldots k)^3 . 1.3.5\ldots(2k-1)}{(2x+1)(2x+3)^2\ldots(2x+4k+1)^2(2x+4k+3)}, \\ E_k &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2x+4k+3)(2x+4k+5)} D_k, \quad F_k = \frac{1}{2x+4k+5} E_k . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (50)$$

33. Si, dans la relation générale (49), on attribue d'abord à x une valeur entière positive p, le premier membre devient

$$\frac{1}{(2p+3)^2} - \frac{1}{(2p+5)^2} + \frac{1}{(2p+7)^2} - \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\pm\left[G - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \ldots \pm \frac{1}{(2p+1)^2}\right],$$

les signes supérieurs répondent au cas de p *impair*. Par conséquent,

$$G = 1 - \frac{1}{32} + \frac{1}{52} - \ldots \mp \frac{1}{(2p+1)^2} \pm R_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51),$$

R_p représentant le second membre de la même équation (49). Autrement dit, $\pm R_p$ est le reste de la série qui a pour limite G, cette série étant arrêtée à ses $p+1$ premiers termes. Ce reste est donc égal à la somme de trois séries dont la convergence augmente rapidement avec le nombre p : les résultats trouvés dans les n[os] 29, 30 et 31 supposent $p = o$.

34. Soit $p = x = 10$. Alors

$$D_0 = \frac{1}{21.23}, \quad E_k = \frac{(k+1)(2k+1)}{(4k+23)(4k+25)} D_k, \quad F_k = \frac{1}{4k+25} E_k .$$

En même temps,

$$D_k = -52 \frac{k^3(2k-1)}{(19+4k)(21+4k)^2(23+4k)} D_{k-1}.$$

Ces dernières formules donnent :

$$D_0 = \frac{1}{483} = \ldots\ldots\ldots\ldots + 0,\ 002\ 070\ 393\ 374\ 761\ 2,$$

$$D_1 = -\frac{52}{187\ 464\ 375} = \ldots\ldots\ldots - 0,\ 000\ 000\ 170\ 699\ 099\ 5,$$

$$D_2 = +\frac{8\ 192}{43\ 986\ 453\ 485\ 625} = \ldots\ldots + 0,\ 000\ 000\ 000\ 186\ 239\ 1,$$

$$D_3 = -\frac{262\ 144}{584\ 984\ 103\ 057\ 351\ 875} = \ldots - 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 680\ 9,$$

$$D_4 = +\frac{536\ 870\ 912}{102\ 773\ 431\ 231\ 675\ 369\ 790\ 625} = + 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 005\ 2;$$

$$E_0 = +\frac{1}{277\ 725} = \ldots\ldots\ldots\ldots + 0,\ 000\ 003\ 600\ 684\ 130\ 0,$$

$$E_1 = -\frac{64}{48\ 928\ 201\ 875} = \ldots\ldots\ldots + 0,\ 000\ 000\ 001\ 308\ 059\ 1,$$

$$E_2 = +\frac{8\ 192}{2\ 999\ 876\ 127\ 719\ 625} = \ldots\ldots + 0,\ 000\ 000\ 000\ 002\ 730\ 8,$$

$$E_3 = -\frac{1\ 048\ 576}{71\ 222\ 059\ 065\ 610\ 096\ 875} = \ldots - 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 014\ 7,$$

$$E_4 = +\frac{536\ 870\ 912}{3\ 651\ 882\ 589\ 765\ 531\ 473\ 226\ 875} = + 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 1;$$

$$F_0 = \frac{E_0}{25} = + 0,\ 000\ 000\ 144\ 027\ 365\ 2,$$

$$F_1 = \frac{E_1}{29} = - 0,\ 000\ 000\ 000\ 045\ 104\ 8,$$

$$F_2 = \frac{E_2}{33} = + 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 082\ 8,$$

$$F_3 = \frac{E_3}{37} = - 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 4,$$

$$F_4 = \frac{E_4}{41} = + 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 0.$$

On trouve ensuite :

$$\sum D = 0,\ 002\ 070\ 222\ 861\ 205\ 1, \quad \sum E = 0,\ 000\ 003\ 599\ 578\ 807\ 1,$$

$$\sum F = 0,\ 000\ 000\ 145\ 982\ 542\ 8, \quad \frac{1}{2}\sum D - 4\sum E + 42\sum F = 0,\ 001\ 026\ 761\ 175\ 771\ 7.$$

On a, d'un autre côté :

$$\begin{array}{rl}
1 & = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 0,\ + \\
\frac{1}{9} & = 0,\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 1,\ - \\
\frac{1}{25} & = 0,\ 040\ 000\ 000\ 000\ 000\ 0,\ + \\
\frac{1}{49} & = 0,\ 020\ 408\ 163\ 265\ 306\ 1,\ - \\
\frac{1}{81} & = 0,\ 012\ 345\ 679\ 012\ 345\ 7,\ + \\
\frac{1}{121} & = 0,\ 008\ 264\ 462\ 809\ 917\ 4,\ - \\
\frac{1}{169} & = 0,\ 005\ 917\ 159\ 763\ 313\ 6,\ + \\
\frac{1}{225} & = 0,\ 004\ 444\ 444\ 444\ 444\ 4,\ - \\
\frac{1}{289} & = 0,\ 003\ 460\ 207\ 612\ 456\ 7,\ + \\
\frac{1}{361} & = 0,\ 002\ 770\ 083\ 102\ 493\ 1,\ - \\
\frac{1}{441} & = 0,\ 002\ 267\ 573\ 696\ 145\ 1\ \ + \\
\hline
 & \ \ 1,\ 063\ 990\ 620\ 084\ 261\ 1 \\
 & -0,\ 146\ 998\ 264\ 733\ 272\ 1 \\
\hline
 & \ \ 0,\ 916\ 992\ 355\ 350\ 989\ 0.
\end{array}$$

Donc

$$G = 0,\ 916\ 992\ 355\ 350\ 989\ 0 - 0,\ 001\ 026\ 761\ 175\ 771\ 7,$$

ou

$$G = 0,\ 915\ 965\ 594\ 177\ 21,$$

à moins d'une unité du quatorzième ordre : la multiplication par 42 ne permet pas de compter sur une approximation plus grande. Quoi qu'il en soit, le calcul direct de la série (33) eût exigé qu'on prît environ *cinq millions* de termes.

33. Dans les formules (49) et (50), supposons $x = \frac{1}{2}$: elles deviennent

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} = 2\sum_0^\infty D_k - 16\sum_0^\infty E_k + 16\sum_0^\infty F_k, \quad \ldots\ldots \tag{52}$$

$$\left.\begin{aligned} D_k &= 2^{k-3}\frac{(-1)^k(1.2.3\ldots k)^3.1.3.5\ldots(2k-1)}{(k+1)\,[1.2.3\ldots(2k+1)]^2} = \frac{(-1)^k\,1.2.3\ldots k}{2^{k+3}(k+1)\,(2k+1).1.3.5\ldots(2k+1)},\\ E_k &= \frac{1}{8}\,\frac{2k+1}{2k+3}D_k, \quad F_k = \frac{1}{2(2k+1)}E_k. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Le premier membre de l'équation (52) est égal à $1 - \frac{\pi^2}{12}$; donc

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 + 2\sum_0^\infty (D_k - 8E_k + 8F_k),$$

ou

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \sum_0^\infty \frac{10k+13}{(2k+3)^2}D_k,$$

ou enfin

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 + \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k-1}\,1.2.3\ldots k\,(10k+13)}{2^{k+3}(k+1)\,(2k+1)^2(2k+3)^2\,1.3.5\ldots(2k-1)} \quad \ldots \tag{54}$$

Cette série, moins simple que celle qui représente $\frac{\pi^2}{9}$ (30), est encore plus convergente que cette dernière. Si, par exemple, on se borne aux cinq premiers termes, on trouve

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{13}{72} + \frac{23}{7\,200} - \frac{11}{58\,800} + \frac{43}{2\,540\,160},$$

ou

$$\frac{\pi^2}{12} = 0,822\,468\,75;$$

résultat dont les six premières décimales sont exactes.

SECONDE PARTIE.

DÉTERMINATION DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

36. On sait que

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,l2 \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

Proposons-nous d'évaluer $\int_0^\infty \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$. En désignant par B et C ces intégrales, nous aurons d'abord

$$C = B + \int_1^\infty \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Soit $x=\frac{1}{u}$: la dernière intégrale devient

$$D = \int_0^1 \frac{l\left(1+\frac{1}{u}\right)}{1+u^2}\,du. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{l\left(1+\frac{1}{u}\right)}{1+u^2}\,du = l\left(1+\frac{1}{u}\right)\text{arctg. } u + \int \frac{\text{arctg. } u}{u(1+u)}\,du\,;$$

Mais, à cause de $\frac{ln}{n}=o$ pour n infini, la fonction $l\left(1+\frac{1}{u}\right)$ arctg. u s'annule en même temps que u ; donc

$$D = \frac{\pi}{4}\,l2 + \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x(1+x)}\,dx\,;$$

(*) Bertrand, *Journal de Liouville*, tome VIII, p. 110.

ou, en posant

$$E = \int_0^1 \frac{\text{arctg.}\, x}{x(1+x)}\, dx : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

$$D = 2B + E. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

On a aussi

$$D = \int_0^1 \frac{l(1+x) - lx}{1+x^2}\, dx = B - \int_0^1 \frac{lx}{1+x^2}\, dx,$$

ou

$$D = B - F, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

avec

$$F = \int_0^1 \frac{lx}{1+x^2}\, dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Intégrant encore par parties, on trouve

$$\int \frac{lx}{1+x^2}\, dx = lx \,\text{arctg.}\, x - \int \frac{\text{arctg.}\, x}{x}\, dx;$$

et, par la même raison que ci-dessus,

$$F = -\int_0^1 \frac{\text{arctg.}\, x}{x}\, dx.$$

La fonction $\frac{\text{arctg.}\, x}{x}$ a pour développement

$$1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots\ldots;$$

donc

$$F = -\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots\ldots\right),$$

ou

$$F = -G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

37. On tire, des équations (56), (59), (60) et (62) :

$$C = 2B + G, \quad D = B + G, \quad E = G - B,$$

ou

$$\int_0^{\infty} \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx = 2B + G,\quad \int_0^1 \frac{l\,\frac{1+x}{x}}{1+x^2}\,dx = B + G,\quad \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x(1+x)}\,dx = G - B. \tag{63}$$

A ces intégrales, que je n'ai pas trouvées dans le précieux recueil de M. Bierens de Haan, j'ajouterai celle-ci :

$$H = \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{1+x}\,dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{64}$$

Elle est connue, et ne diffère pas de B.

38. L'intégrale E peut être développée en une série dont la forme, très-peu commode pour le calcul numérique, est cependant digne de remarque. Cette série résulte des développements de arctg. x et de $\frac{1}{1+x}$. On a en effet, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned}\frac{\text{arctg. } x}{x(1+x)} &= \left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots\right]\left[1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\right]\\ &= 1 - x + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^2 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^4 - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^5 + \ldots;\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x(1+x)}\,dx = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots;$$

ou, plus simplement,

$$E = \frac{1}{1.2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{3.4} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{5.6} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\frac{1}{7.8} + \ldots \tag{65}$$

39. Soit

$$y = \frac{1}{1.2} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\frac{1}{3.4} + \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\frac{1}{5.6} + \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\frac{1}{7.8} + \ldots.$$

On tire, de cette équation,

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = (1 - x^4)\frac{1}{3.4} + (1 + x^6)\frac{1}{5.6} + (1 - x^8)\frac{1}{7.8} + \ldots,$$

ou

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}+l2-\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}-\frac{x^8}{7.8}+\ldots.$$

Pour abréger, représentons par z le second membre : évidemment

$$\frac{dz}{dx}=-x+\text{arctg.}\,x;$$

donc, à cause de $z=-\frac{1}{2}+l2$ pour $x=o$,

$$z=(1+x^2)\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}+l2-\frac{1}{2}x^2+x\,\text{arctg.}\,x-\frac{1}{2}\,l\,(1+x^2)\;.\;\;.\;\;.\quad(66)$$

Disposant de la constante arbitraire de manière que la fonction y devienne égale à $\frac{1}{2}$ lorsque x s'annule, on trouve, pour intégrale de cette équation,

$$y=l2\,\text{arctg.}\,x+\frac{1}{2}(1-x)+\int_0^x\frac{x\,\text{arctg.}\,x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{l\,(1+x^2)}{1+x^2}dx.\;\;.\quad(67)$$

A $x=1$ répond $y=\text{E}$; donc

$$\text{E}=\frac{\pi}{4}l2+\int_0^1\frac{x\,\text{arctg.}\,x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{l\,(1+x^2)}{1+x^2}dx\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(68)$$

40. Soient

$$\text{K}=\int_0^1\frac{x\,\text{arctg.}\,x}{1+x^2}dx,\quad \text{L}=\int_0^1\frac{l\,(1+x^2)}{1+x^2}dx\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(69)$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\text{K}=\text{B}-\frac{1}{2}\text{L}.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(70)$$

Conséquemment, la relation (68) devient

$$\text{E}=3\text{B}-\text{L}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(71)$$

Et comme

$$\text{E}=\text{G}-\text{B},\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\quad(65)$$

on a

$$K = \frac{1}{2} G - B \ (^*), \quad L = 4B - G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

41. Avant de continuer, je chercherai les limites (probablement très-connues) de deux séries analogues au développement de E (65), et qui nous seront utiles plus tard. L'une de ces séries est

$$s = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \dots + \frac{1}{a+(n-1)b}\right] \frac{1}{a'+(n-1)b'}, \quad . \quad (73)$$

a, b, a', b' étant des quantités positives.

A cause de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \dots + \frac{1}{a+(n-1)b} = \int_0^1 d\theta \left(\theta^{a-1} + \theta^{a+b-1} + \dots + \theta^{a+\overline{n-1}b-1}\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta^{a-1} d\theta (1-\theta^{nb})}{1-\theta^b},$$

on a

$$s = \int_0^1 \frac{\theta^{a-1} d\theta}{1-\theta^b} \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}(-\theta^{nb})}{a'+(n-1)b'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

La même transformation, appliquée à la série

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+b'} + \frac{1}{a'+2b'} - \frac{1}{a'+3b'} + \dots,$$

donne, comme l'on sait,

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{a'+(n-1)b'} = \int_0^1 \frac{\theta^{a'-1} d\theta}{1+\theta^{b'}}:$$

je représenterai par $\varphi(a', b')$ cette intégrale, qui est toujours exprimable

(*) Cette valeur résulte aussi de la formule connue : $\int_0^1 \frac{x \operatorname{arc} \cot x}{1+x^2} dx = 3B - \frac{1}{2} G$. (Bierens de Haan, t. 258, n° 27.)

sous forme finie, lorsque a' et b' sont commensurables. Quant à la série

$$\frac{\theta^b}{a'} - \frac{\theta^{2b}}{a'+b'} + \frac{\theta^{3b}}{a'+2b'} - \frac{\theta^{4b}}{a'+3b'} + \ldots,$$

si l'on fait $\theta^b = x^{b'}$, on trouve

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}\theta^{nb}}{a'+(n-1)b'} = x^{b'-a'} \int_0^x \frac{x^{a'-1}\,dx}{1+x^{b'}}.$$

Au moyen de ces deux sommations, la formule (74) devient

$$s = \int_0^1 \frac{\theta^{a-1}\,d\theta}{1-\theta^b}\left[\varphi(a',b') - x^{b'-a'}\int_0^x \frac{x^{a'-1}\,dx}{1+x^{b1}}\right],$$

ou, à cause de la valeur de θ :

$$s = \frac{b'}{b}\int_0^1 \frac{x^{\frac{ab'}{b}-1}\,dx}{1-x^{b1}}\left[\varphi(a',b') - x^{b'-a'}\int_0^x \frac{x^{a'-1}\,dx}{1+x^{b'}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

42. Soit maintenant

$$s_1 = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \ldots \pm \frac{1}{a+(n-1)b}\right]\frac{1}{a'+(n-1)b'} \quad (76)$$

Un calcul identique à celui qui précède donne, successivement :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \ldots \pm \frac{1}{a+(n-1)b} = \int_0^1 \frac{\theta^{a-1}\,d\theta\,[1-(-\theta)^{nb}]}{1+\theta^b},$$

$$s_1 = \int_0^1 \frac{\theta^{a-1}\,d\theta}{1+\theta^b}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}[1-(-\theta)^{nb}]}{a'+(n-1)b'},$$

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{a'+(n-1)b'} = \varphi(a',b'), \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}(-\theta)^{nb}}{a'+(n-1)b'} = -x^{b'-a'}\int_0^x \frac{x^{a'-1}\,dx}{1-x^{b'}},$$

$$s_1 = \frac{b'}{b}\int_0^1 \frac{x^{\frac{ab'}{b}-1}\,dx}{1+x^{b'}}\left[\varphi(a',b') + x^{b'-a'}\int_0^x \frac{x^{a'-1}\,dx}{1-x^{b'}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

43. Voici quelques applications des formules générales (75) et (77).

1°. $a=b=a'=b'=1$. Alors $\varphi(1,1)=\int_0^1 \frac{d\theta}{1+\theta}=l2$;

$$s=\int_0^1 \frac{dx}{1-x}\left[l2-\int_0^{2x}\frac{dx}{1+x}\right],\quad s_1=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[l2+\int_0^{2x}\frac{dx}{1-x}\right];$$

ou

$$s=\int_0^1 \frac{l2-l(1+x)}{1-x}dx,\quad s_1=(l2)^2-\int_0^1 \frac{l(1-x)}{1+x}dx \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

2°. $a=b=b'=1$, $a'=2$; $\varphi(2,1)=\int_0^1 \frac{\theta d\theta}{1+\theta}=1-l2$;

$$s=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[1-l2-\frac{1}{x}\int_0^{2x}\frac{xdx}{1+x}\right]=\int_0^1 \frac{dx}{1-x}\left[\frac{l(1+x)}{x}-l2\right]; \quad . \quad (79)$$

$$s_1=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\left[1-l2+\frac{1}{x}\int_0^{2x}\frac{xdx}{1+x}\right]=-(l2)^2-\int_0^1 \frac{l(1-x)}{x(1+x)}dx \quad . \quad . \quad (80)$$

3°. $a=b=a'=1$, $b'=2$; $\varphi(1,2)=\int_0^1 \frac{d\theta}{1+\theta^2}=\frac{\pi}{4}$;

$$s=2\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2}\left[\frac{\pi}{4}-x\int_0^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right]=\frac{\pi}{2}(1-l2)-l2+2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg.} x}{1-x^2}dx; \quad (81)$$

$$s_1=2\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}\left[\frac{\pi}{4}+x\int_0^{x}\frac{dx}{1-x^2}\right]=\frac{\pi}{4}l2+\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}. \quad (82)$$

4°. $a=a'=1$, $b=b'=2$; $\varphi(1,2)=\frac{\pi}{4}$;

$$s=\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[\frac{\pi}{4}-x\int_0^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right]=\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4}-x\operatorname{arctg.} x}{1-x^2}dx; \quad . \quad . \quad (83)$$

$$s_1=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\left[\frac{\pi}{4}+x\int_0^{x}\frac{dx}{1-x^2}\right]=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}. \quad (84)$$

5°. $a = a' = b' = 1, \quad b = 2; \quad \varphi(1,1) = l2;$

$$s = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}\left[l2 - \int_0^x \frac{dx}{1+x}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\left[l2 - 2\int_0^x \frac{xdx}{1+x^2}\right] = \int_0^1 \frac{l2 - l(1+x^2)}{1-x^2}dx; \quad . \quad . \quad (85)$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\left[l2 + \int_0^x \frac{dx}{1-x}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\left[l2 + 2\int_0^x \frac{xdx}{1+x^2}\right] = \frac{\pi}{4}l2 - \int_0^1 \frac{l(1-x^2)}{1+x^2}dx \quad . \quad . \quad (86)$$

44. Il est à remarquer, sur quelques-unes de ces intégrales, que chacune d'elles est la différence de deux intégrales infinies. Par exemple :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \infty, \quad \int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{l-x^2}dx = \infty;$$

mais

$$\int_0^x \frac{l2 - l(1+x^2)}{1-x^2}dx$$

tend vers une limite finie quand x tend vers l'unité.

45. Revenons maintenant aux intégrales D, E,... afin d'en déduire de nouvelles. On tire, des relations (63) et (72) :

$$\mathrm{E} = \mathrm{B} + 2\mathrm{K};$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (64) :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg.} x}{x(1+x)}dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg.} x}{1+x}dx + 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg.} x}{1+x^2}dx;$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre,

$$M = \int_0^1 \frac{1 - x - x^2 - 3x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \text{ arctg. } x\, dx = 0 \quad \ldots \ldots \quad (87)$$

46. Si l'on décompose $1 - x - x^2 - 3x^3$ en $1 - x^3 - x(1+x^2) - x^2(1+x)$, on trouve

$$N = \int_0^1 \frac{1 - x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \text{ arctg. } x\, dx = \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x \text{ arctg. } x}{1+x^2} dx. \quad (88)$$

Les deux intégrales du second membre sont, respectivement, H et K; donc, par les formules (64) et (72),

$$N = \int_0^1 \frac{1 - x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \text{ arctg. } x\, dx = \frac{1}{2} G \quad \ldots \ldots \quad (89)$$

47. On a identiquement

$$\frac{1 - x^3}{x(1+x)(1+x^2)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{x(1+x^2)};$$

donc

$$N = -\int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x} dx + \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x(1+x)} dx + \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x(1+x^2)} dx,$$

ou, par les formules (89), (58) et (63) :

$$P = \int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{x(1+x^2)} dx = B + \frac{1}{2} G \quad \ldots \ldots \quad (90)$$

48. Si l'on développe en série la fraction $\frac{\text{arctg. } x}{x(1+x^2)}$, on trouve aisément

$$P = 1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{5} - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{7} + \ldots \quad (91)$$

Cette série est l'une de celles que nous avons sommées (43, 40). On a donc

$$P = \int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi - x \text{ arctg. } x}{1 - x^2} dx;$$

et, en désignant par Q cette dernière intégrale,

$$Q = B + \frac{1}{2} G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

49. On peut réduire au premier degré le dénominateur de la fraction contenue dans l'intégrale Q. En effet,

$$\int_0^x \frac{\frac{\pi}{4} - x \text{ arctg. } x}{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{8}\int_0^x \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx - \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) x \text{ arctg. } x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{8} l(1+x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{x \text{ arctg. } x}{1+x} dx + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\frac{1}{4}\pi - x \text{ arctg. } x}{1 - x} dx;$$

donc

$$Q = B - \frac{1}{2}\int_0^1 \text{arctg. } x . dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\text{arctg. } x}{1+x} dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi - x \text{ arctg. } x}{1 - x} dx.$$

Il résulte, de cette équation,

$$R = \int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi - x \text{ arctg. } x}{1 - x} dx = G - B + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

50. *Remarque.* — Le second membre, dont la valeur est à peu près

1,082 592 109 8,

représente la somme de la série

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{5} - \ldots,$$

laquelle est fort peu convergente.

51. On sait que

$$\int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\left[(l2)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right] \text{ (*)}.$$

Si l'on développe la fonction placée sous le signe $\int$, on trouve que l'intégrale définie représente la somme de la série

$$\frac{1}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{6} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{8} - \ldots$$

D'après l'un des exemples traités ci-dessus (43, 1°), cette même somme est égale à

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{l2 - l(1+x)}{1-x}\,dx;$$

donc

$$S = \int_0^1 \frac{l2 - l(1+x)}{1-x}\,dx = (l2)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

52. Le même procédé, appliqué à l'intégrale

$$L = \int_0^1 \frac{l(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

donne, non-seulement,

$$L = \frac{1}{3} - \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{5} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{7} - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{9} + \ldots, \quad . \quad (95)$$

mais encore

$$L = \frac{\pi}{2}l2 - 2\int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi - \text{arctg.}\,x}{1-x^2}\,dx.$$

Et comme

$$L = \frac{\pi}{2}l2 - G, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

(*) Bierens de Haan, t. 160, n° 9.

il s'ensuit que

$$\mathrm{T} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{4}\pi - \text{arctg.}\, x}{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96)$$

53. Une transformation de la série (95) va nous donner d'autres intégrales. On peut écrire :

$$\mathrm{L} = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2n+1}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (97)$$

mais il est visible que l'on a, en série convergente,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = n \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p(n+p)};$$

donc

$$\mathrm{L} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(2n+1)(n+p)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (98)$$

Soit

$${}^{y}p = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(2n+1)(n+p)}:$$

on trouve aisément

$$1 - \frac{\pi}{4} - {}^{y}p = p \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(n+p)}.$$

Pour évaluer la dernière somme, il suffit de poser, en général,

$$z = \frac{u^{p+1}}{3(p+1)} - \frac{u^{p+2}}{5(p+2)} + \frac{u^{p+3}}{7(p+3)} - \frac{u^{p+4}}{9(p+4)} + \ldots;$$

d'où

$$z = \int_0^u u^{p-\frac{3}{2}} du \left[\sqrt{u} - \text{arctg.} \sqrt{u}\right];$$

ou, en remplaçant u par x^2 :

$$z = 2 \int_0^x x^{2p-2} dx\, (x - \text{arctg.}\, x).$$

Par suite,

$$1-\frac{\pi}{4}-{}^{y}p=2p\int_0^1 x^{2p-2}\,dx\,(x-\text{arctg.}\,x);$$

et, en intégrant par parties,

$${}^{y}p=-\frac{1}{2p-1}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2p}{2p-1}\int_0^1\frac{x^{2p+1}\,dx}{1+x^2}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (98), donne

$$\mathrm{L}=-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sum_1^\infty\frac{1}{p(2p-1)}+2\sum_1^\infty\frac{1}{2p-1}\int_0^1\frac{x^{2p+1}\,dx}{1+x^2},$$

ou

$$\mathrm{L}=-2l2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\sum_1^\infty\frac{x^{2p+1}}{2p-1},$$

ou enfin

$$\mathrm{L}=-2l2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(99)$$

A cause de

$$\mathrm{L}=4\mathrm{B}-\mathrm{G},\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(72)$$

on tire, de cette équation,

$$\mathrm{U}=\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}=2l2-\mathrm{G}.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(100)$$

54. Si l'on décompose $\frac{x^2}{1+x^2}$ en $1-\frac{1}{1+x^2}$, on trouve encore

$$\mathrm{V}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\,l\,\frac{1+x}{1-x}=\mathrm{G}.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(101)$$

55. Enfin, comme

$$\mathrm{V}=\int_0^1\frac{l(1+x)}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{l(1-x)}{1+x^2}dx$$

$$= B - \int_0^1 \frac{l(1-x)}{1+x^2}\,dx,$$

il s'ensuit que

$$A = \int_0^1 \frac{l(1-x)}{1+x^2}\,dx = B - G \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Cette nouvelle intégrale a pour valeur approchée

$$-\,0,\ 643\ 767\ 536\ 7:$$

elle est, pour ainsi dire, conjuguée de l'intégrale B trouvée par M. Bertrand, et qui a été l'occasion de ce Mémoire.

56. Pour terminer ce sujet, je chercherai encore

$$Ap = \int_0^1 x^p dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

On a d'abord, comme l'on sait :

$$A_0 = 2\int_0^1 dx\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ..\right) = 2l2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

$$A_1 = 2\int_0^1 xdx\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ..\right) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Maintenant, j'observe que l'on a identiquement :

$$d\left[(x^{p+1} - x^{p-1})\,l\,\frac{1+x}{1-x}\right] = \left[(p+1)\,x^p - (p-1)\,x^{p-2}\right] dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} + 2\,(x^{p+1} - x^{p-1})\,\frac{dx}{1-x^2};$$

ou

$$d\left[(x^{p+1} - x^{p-1})\,l\,\frac{1+x}{1-x}\right] = \left[(p+1)\,x^p - (p-1)\,x^{p-2}\right] dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} - 2x^{p-1}\,dx.$$

Supposant $p - 2$ positif ou nul, et intégrant les deux membres entre les limites 0 et 1, j'obtiens

$$0 = (p+1)\,A_p - (p-1)\,A_{p-1} - \frac{2}{p};$$

donc

$$A_p = \frac{p-1}{p+1}\,A_{p-2} + \frac{2}{p(p+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

Cette relation générale donne, successivement :

$$A_2 = \int_0^1 x^2\,dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{3}\,l2 + \frac{1}{3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

$$A_3 = \int_0^1 x^3\,dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

$$A_4 = \int_0^1 x^4\,dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{5}\,l2 + \frac{3}{10}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

$$A_5 = \int_0^1 x^5\,dx\, l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{23}{45}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

. . . .

On voit que les valeurs de A_p sont rationnelles lorsque p est impair, et que, dans le cas contraire, elles ne contiennent pas d'autre incommensurable que $l2$ (*).

Orsay, août-septembre 1864.

(*) $A_p = \dfrac{1}{\left(\dfrac{p+1}{2}\right)}\left[1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{p}\right]$, si p est *impair* ;

$A_p = \dfrac{1}{p+1}\left[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{2}\right)}\right] + \dfrac{2}{p+1}\,l2$, si p est *pair*.

ADDITION.

37. De

$$\int_0^1 \frac{1 - x - x^2 - 3x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \operatorname{arctg.} x \, dx = 0, \quad \ldots \ldots \quad (87)$$

on tire

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg.} x}{x(1+x)(1+x^2)} dx = \int_0^1 \frac{1 + x + 3x^2}{(1+x)(1+x^2)} \operatorname{arctg.} x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \operatorname{arctg.} x + 3 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg.} x}{(1+x)(1+x^2)} dx.$$

Mais :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \operatorname{arctg.} x = \frac{\pi}{4} l2 - \int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = \mathrm{B},$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x^2};$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg.} x}{(1+x)(1+x^2)} dx = \frac{1}{2}\mathrm{B} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} \operatorname{arctg.} x dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B} + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg.} x}{1+x^2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B} + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{G} - \mathrm{B}\right)\right];$$

puis

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg.}\, x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx = \mathrm{B} + \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{4}\mathrm{G}, \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg.}\, x}{x(1+x)(1+x^2)}\,dx = \frac{3}{4}\mathrm{G} - \frac{\pi^2}{64} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (112)$$

58. Les formules connues

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{9-a^2} + \ldots = \frac{1}{2a^2}(1 - a\pi \cot a\pi),$$

$$\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{9-a^2} - \ldots = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi} - 1\right) \text{ (*)},$$

peuvent être écrites ainsi :

$$\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-a} + \frac{1}{3+a}\right) + \ldots = \frac{1}{a^2}(1 - a\pi \cot a\pi),$$

$$\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-a} + \frac{1}{3+a}\right) - \ldots = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi} - 1\right).$$

Soient

$$\frac{x^{1-a}}{1-a} + \frac{1}{2}\frac{x^{2-a}}{2-a} + \frac{1}{3}\frac{x^{3-a}}{3-a} + \ldots = y,$$

$$\frac{x^{1+a}}{1+a} + \frac{1}{2}\frac{x^{2+a}}{2+a} + \frac{1}{3}\frac{x^{3+a}}{3+a} + \ldots = z,$$

$$\frac{x^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{2}\frac{x^{2-a}}{2-a} + \frac{1}{3}\frac{x^{3-a}}{3-a} - \ldots = y_1,$$

$$\frac{x^{1+a}}{1+a} - \frac{1}{2}\frac{x^{2+a}}{2+a} + \frac{1}{3}\frac{x^{3+a}}{3+a} + \ldots = z_1;$$

(*) *Traité élémentaire des séries*, p. 116.

d'où

$$-x^{-(1+a)}\,l(1-x)=\frac{dy}{dx},\quad -x^{-(1-a)}\,l(1-x)=\frac{dz}{dx},$$

$$x^{-(1+a)}\,l(1+x)=\frac{dy_1}{dx},\qquad x^{-(1-a)}\,l(1+x)=\frac{dz_1}{dx};$$

et, par conséquent :

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{2-a}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3-a}+\dots=-\int_0^1\frac{l(1-x)}{x^{1+a}}dx,$$

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{2+a}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3+a}+\dots=-\int_0^1\frac{l(1-x)}{x^{1-a}}dx,$$

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2-a}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3-a}-\dots=\int_0^1\frac{l(1+x)}{x^{1+a}}dx,$$

$$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2+a}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3+a}-\dots=\int_0^1\frac{l(1+x)}{x^{1-a}}dx.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$\int_0^1 l(1-x)\frac{dx}{x}(x^a+x^{-a})=\frac{1}{a^2}(a\pi\cot a\pi-1),\quad\dots\dots\quad(113)$$

$$\int_0^1 l(1+x)\frac{dx}{x}(x^a+x^{-a})=\frac{1}{a^2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}-1\right);\quad\dots\dots\quad(114)$$

puis, par la soustraction,

$$\int_0^1 l\,\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{x}(x^a+x^{-a})=\frac{\pi}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\pi\quad\dots\dots\dots\quad(115)$$

59. **Multipliant par** *ada* **les deux membres de chacune de ces équations, et observant que**

$$\int_0^1(x^a+x^{-a})\,ada=\frac{a}{lx}(x^a-x^{-a})-\frac{1}{(lx)^2}(x^a+x^{-a}-2)$$

$$=\frac{x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}}{(lx)^2}\left[alx\left(x^{\frac{a}{2}}+x^{-\frac{a}{2}}\right)-\left(x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}\right)\right],$$

on trouve :

$$\int_0^1 l(1-x)\frac{x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}}{(lx)^2}\left[alx\left(x^{\frac{a}{2}}+x^{-\frac{a}{2}}\right)-\left(x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}\right)\right]\frac{dx}{x}=l\frac{\sin a\pi}{a\pi}, \quad . \quad (116)$$

$$\int_0^1 l(1+x)\frac{x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}}{(lx)^2}\left[alx\left(x^{\frac{a}{2}}+x^{-\frac{a}{2}}\right)-\left(x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}\right)\right]\frac{dx}{x}=l\frac{\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2}}{\frac{a\pi}{2}}, \quad . \quad (117)$$

$$\int_0^1 l\frac{1+x}{1-x}\,\frac{x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}}{(lx)^2}\left[alx\left(x^{\frac{a}{2}}+x^{-\frac{a}{2}}\right)-\left(x^{\frac{a}{2}}-x^{-\frac{a}{2}}\right)\right]\frac{dx}{x}=-2l\cos\frac{a\pi}{2}. \quad (118)$$

60. Chacune de ces intégrales définies en donne d'autres. Si, par exemple, on change x en x^2 dans les trois dernières, et que l'on suppose ensuite $a=\frac{1}{2}$, il vient :

$$\int_0^1 l(1-x^2)\frac{1-x}{(lx)^2}\left[(x+1)\,lx+(1-x)\right]dx=2l\frac{\pi}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

$$\int_0^1 l(1+x^2)\frac{1-x}{(lx)^2}\left[(x+1)\,lx+(1-x)\right]dx=2l\frac{\pi}{4}, \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

$$\int_0^1 l\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{1-x}{(lx)^2}\left[(x+1)\,lx+(1-x)\right]dx=-2l2 \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Liége, octobre 1865.

FIN.