# SUR LA

# TRANSFORMATION DES VARIABLES

DANS

# LES INTÉGRALES MULTIPLES.

## PREMIÈRE PARTIE.

### VALEURS GÉNÉRALES DES INCONNUES DANS LES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ, ET PROPRIÉTÉS DES DÉNOMINATEURS COMMUNS.

1. Considérons les $n$ équations du premier degré entre $n$ inconnues:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + k_1x_{n-1} + l_1x_n = \alpha_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + k_2x_{n-1} + l_2x_n = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \ldots + k_nx_{n-1} + l_nx_n = \alpha_n. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Pour obtenir la valeur de l'une quelconque des inconnues, de $x_n$, par exemple, je multiplie ces $n$ équations respectivement par $n$ indéterminées $\lambda_1$, $\lambda_2$, .... $\lambda_n$, entre lesquelles j'établis les $n-1$ relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots\ldots + a_n\lambda_n = o, \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots\ldots + b_n\lambda_n = o, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots\ldots + k_n\lambda_n = o; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ce qui donne

$$x_n = \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots\ldots + \lambda_n\alpha_n}{\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots\ldots + \lambda_n l_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Cette expression de $x_n$ démontre la règle qui sert à former le numérateur de chaque inconnue, au moyen du dénominateur.

2. Les équations (2) sont au nombre de $(n-1)$, entre $n$ inconnues. On peut donc satisfaire à ces équations d'une infinité de manières; mais parmi tous les systèmes que l'on peut adopter, il en existe un très-simple. C'est ce que les calculs suivants vont démontrer.

3. Dans les équations (1), j'omets successivement chacune d'elles, et, en même temps, l'inconnue $x_n$. J'obtiens de la sorte, $n$ systèmes d'équations entre $(n-1)$ inconnues; savoir :

$$\left.\begin{array}{l} a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots\ldots + k_2x_{n-1} = \alpha_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + \ldots\ldots + k_3x_{n-1} = \alpha_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots\ldots + k_nx_{n-1} = \alpha_n. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1^\circ)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3x_1 + b_3x_2 + \ldots\ldots + k_3x_{n-1} = \alpha_3, \\ a_4x_1 + b_4x_2 + \ldots\ldots + k_4x_{n-1} = \alpha_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots\ldots + k_nx_{n-1} = \alpha_n, \\ a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots\ldots + k_1x_{n-1} = \alpha_1. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2^\circ)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_4x_1 + b_4x_2 + \ldots\ldots + k_4x_{n-1} = \alpha_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + \ldots\ldots + k_nx_{n-1} = \alpha_n, \\ a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots\ldots + k_1x_{n-1} = \alpha_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots\ldots + k_2x_{n-1} = \alpha_2. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3^\circ)$$

$$\left.\begin{array}{l}
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + k_1 x_{n-1} = \alpha_1, \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + k_2 x_{n-1} = \alpha_2, \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{n-1} x_1 + b_{n-1} x_2 + \ldots + k_{n-1} x_{n-1} = \alpha_{n-1}.
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{n}^{\circ})$$

Il est bien entendu que, dans deux quelconques de ces systèmes, les inconnues affectées des mêmes indices, n'ont cependant pas la même signification.

4. Je désigne actuellement par $\mathrm{D}_1$ le dénominateur des valeurs des inconnues dans les équations 1° : je démontrerai tout à l'heure que le dénominateur est le même pour toutes ces inconnues; je désigne de même par $\mathrm{D}_2$, $\mathrm{D}_3$, .... $\mathrm{D}_n$, les dénominateurs pour les autres systèmes, ces dénominateurs étant déduits de $\mathrm{D}_1$ par une *permutation tournante* effectuée sur les indices des lettres $a, b, c, \ldots$ : par exemple, pour passer de $\mathrm{D}_1$ à $\mathrm{D}_3$, il suffit de remplacer $a_2$ par $a_4$, $b_3$ par $b_5$, etc.

Cela étant, l'on pourra prendre, pour satisfaire aux équations (2) :

$$\lambda_1 = \mathrm{D}_1, \quad \lambda_2 = \mathrm{D}_2, \quad \ldots \quad \lambda_n = \mathrm{D}_n; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ou, ce qui revient au même, on aura *identiquement :*

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 \mathrm{D}_1 + a_2 \mathrm{D}_2 + \ldots + a_n \mathrm{D}_n = o, \\
b_1 \mathrm{D}_1 + b_2 \mathrm{D}_2 + \ldots + b_n \mathrm{D}_n = o, \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
k_1 \mathrm{D}_1 + k_2 \mathrm{D}_2 + \ldots + k_n \mathrm{D}_n = o;
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et, par suite, le dénominateur commun relatif aux équations (1) sera

$$\Delta = l_1 \mathrm{D}_1 + l_2 \mathrm{D}_2 + \ldots + l_n \mathrm{D}_n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

5. Par un calcul direct, on vérifie la formule (6) et les relations (5), pour le cas de trois équations. En même temps, l'on reconnaît que

1° Le dénominateur de la valeur de $x_3$, par exemple, renferme toutes les combinaisons trois à trois des coefficients, chaque combinaison ne contenant ni deux fois la même lettre, ni deux fois le même indice;

2° Deux termes qui, dans l'expression de ce dénominateur, peuvent se déduire l'un de l'autre par une permutation tournante, ont même signe;

3° Deux termes qui ne diffèrent que par le changement d'une lettre en une autre, et réciproquement, sont de signes contraires;

4° Par suite, le dénominateur est le même pour toutes les inconnues, pourvu que l'on prenne convenablement le signe du numérateur.

6. Supposons donc que pareille vérification ait été faite pour $n-1$ équations entre $n-1$ inconnues, je dis qu'elle se fera encore dans le cas de $n$ équations.

En effet, soit, pour fixer les idées, $n=7$; l'un des termes de $D_1$ sera $a_4\, b_3\, c_5\, d_7\, e_2\, f_6$, et l'un des termes de $D_4$ sera $a_1\, b_3\, c_5\, d_7\, e_2\, f_6$. Je dis de plus que ces deux termes sont de signes contraires.

Pour justifier cette assertion, qui est la base de toute ma démonstration, j'observe que

1° le terme $a_4\, b_3\, c_5\, d_7\, e_2\, f_6$ de $D_1$, a le même signe que $a_7\, b_6\, c_1\, d_3\, e_5\, f_2$, lequel entre dans $D_4$, et se déduit du précédent par une permutation tournante entre les indices;

2° Les deux termes $a_7\, b_6\, c_1\, d_3\, e_5\, f_2$ et $e_7\, f_6\, a_1\, b_3\, c_5\, d_2$ qui entrent dans $D_4$, et qui se déduisent l'un de l'autre par une permutation tournante entre les lettres, ont même signe;

3° Les deux termes $a_1\, b_3\, c_5\, d_7\, e_2\, f_6$ et $e_7\, f_6\, a_1\, b_3\, c_5\, d_2$ de $D_4$, qui ne diffèrent que par le changement de $d$ en $e$, et *vice versâ*, sont de signes contraires.

7. Il résulte de cette discussion que la fonction $a_1 D_1 + a_2 D_2 + \ldots + a_n D_n$ est composée de termes qui sont, deux à deux, égaux et de signes contraires; donc elle est identiquement nulle. La même chose a lieu pour les autres fonctions (5). Par suite, la formule (6) et les remarques du n° 5 ont lieu pour le cas de $n$ équations. Donc, etc.

M. Cauchy a donné, de la règle qui sert à former le dénominateur commun dans les équations du premier degré, une démonstration appuyée sur des considérations différentes de celles qui précèdent : je pense que la mienne a, au moins, l'avantage de démontrer les relations (5) et (6), lesquelles nous seront nécessaires dans la suite.

8. Je suppose actuellement que l'on reprenne les équations :

$$\left.\begin{array}{l}
a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots. + k_1x_{n-1} + l_1x_n = \alpha_1,\\
a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots. + k_2x_{n-1} + l_2x_n = \alpha_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \ldots. + k_nx_{n-1} + l_nx_n = \alpha_n;
\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (1)$$

que l'on se donne, entre les $n^2$ coefficients de ces équations, les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots. + a_nb_n = 0,\\
a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots. + a_nc_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + \ldots. + a_nl_n = 0,\\
b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \ldots. + b_nc_n = 0,\\
b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 + \ldots. + b_nd_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_1l_1 + b_2l_2 + b_3l_3 + \ldots. + b_nl_n = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_3 + \ldots. + k_nl_n = 0;
\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (7)$$

et que l'on propose de trouver d'autres relations entre ces coefficients.

9. Pour cela, conformément à ce qui a été fait par MM. Poisson et Lacroix, je forme en premier lieu, la somme des carrés des équations (1); et, en ayant égard aux conditions qui précèdent, j'obtiens

$$\Sigma_1^n \alpha_i^2 = \mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{B}x_2^2 + \ldots. + \mathrm{L}x_n^2;$$

en posant, pour abréger,

$$A = \Sigma_1^n a_i^2, \quad B = \Sigma_1^n b_i^2, \; \ldots . \; L = \Sigma_1^n l_i^2 \; \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Secondement, si l'on multiplie les équations (1) successivement par $a_1, a_2, \ldots . a_n$, par $b_1, b_2, \ldots . b_n, \ldots .$, par $l_1, l_2, \ldots . l_n$; et si l'on fait les sommes des produits, on obtient les $n$ équations

$$\left.\begin{array}{l} A x_1 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \ldots . + a_n \alpha_n, \\ B x_2 = b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \ldots . + b_n \alpha_n, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ L x_n = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \ldots . + l_n \alpha_n. \end{array}\right\}$$

La somme des carrés de ces nouvelles équations peut se mettre sous la forme,

$$A x_1^2 + B x_2^2 + \ldots . + L x_n^2 = \Sigma_1^n \left( \frac{a_i^2}{A} + \frac{b_i^2}{B} + \ldots . + \frac{l_i^2}{L} \right) \alpha_i^2$$
$$+ \Sigma_1^n \left( \frac{a_i a_{i'}}{A} + \frac{b_i b_{i'}}{B} + \ldots . + \frac{l_i l_{i'}}{L} \right) \alpha_i \alpha_{i'},$$

en observant que, dans le second membre, les indices $i$ et $i'$ doivent être inégaux.

D'après ce qu'on a trouvé plus haut, le second membre doit être identique avec $\Sigma_1^n \alpha_i^2$; donc

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1^2}{A} + \dfrac{b_1^2}{B} + \dfrac{c_1^2}{C} + \ldots . + \dfrac{l_1^2}{L} = 1, \\ \dfrac{a_2^2}{A} + \dfrac{b_2^2}{B} + \ldots \ldots + \dfrac{l_2^2}{L} = 1, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \dfrac{a_n^2}{A} + \dfrac{b_n^2}{B} + \ldots \ldots + \dfrac{l_n^2}{L} = 1; \end{array}\right\} \ldots \ldots \quad (9)$$

et

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{a_1a_2}{\mathrm{A}} + \dfrac{b_1b_2}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots + \dfrac{l_1l_2}{\mathrm{L}} = o,\\
\dfrac{a_1a_3}{\mathrm{A}} + \dfrac{b_1b_3}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots + \dfrac{l_1l_3}{\mathrm{L}} = o,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{a_1a_n}{\mathrm{A}} + \dfrac{b_1b_n}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots + \dfrac{l_1l_n}{\mathrm{L}} = o,\\
\dfrac{a_2a_3}{\mathrm{A}} + \dfrac{b_2b_3}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots + \dfrac{l_2l_3}{\mathrm{L}} = o,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{a_2a_n}{\mathrm{A}} + \dfrac{b_2b_n}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots + \dfrac{l_2l_n}{\mathrm{L}} = o,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{a_{n-1}a_n}{\mathrm{A}} + \dfrac{b_{n-1}b_n}{\mathrm{B}} + \ldots\ldots + \dfrac{l_{n-1}l_n}{\mathrm{L}} = o.
\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (10)$$

Ainsi, les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (7) entraînent les $n$ relations (9) et les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations (10). Ordinairement, dans les problèmes de mécanique, on suppose les quantités A, B, .... L, égales à l'unité; et alors les formules ci-dessus se simplifient considérablement. Mais, eu égard au but que je me propose, je devais me donner seulement les relations (7).

10. En résolvant, par la méthode exposée ci-dessus, les équations (1), on obtient une valeur de $x_1$, de la forme

$$x_1 = \frac{\mathrm{D}_1\alpha_1 + \mathrm{D}_2\alpha_2 + \ldots. + \mathrm{D}_n\alpha_n}{\Delta}:$$

$\mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}_2$, .... $\mathrm{D}_n$ étant de certaines fonctions des coefficients, indépendantes de la lettre $a$, et qui sont liées au dénominateur $\Delta$ par l'équation

$$\Delta = a_1\mathrm{D}_1 + a_2\mathrm{D}_2 + \ldots. + a_n\mathrm{D}_n.$$

En comparant cette valeur de $x_1$ à celle qui a été écrite plus haut, on conclut

$$D_1 = \Delta \frac{a_1}{A}, \quad D_2 = \Delta \frac{a_2}{A}, \quad \ldots . \quad D_n = \Delta \frac{a_n}{A} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Les valeurs de $x_2$, $x_3$, .... $x_n$ donneraient des relations du même genre.

**11.** Avant d'aller plus loin, il convient d'exposer une propriété des fonctions connues sous le nom de *déterminants*, fonctions qui ont été étudiées par MM. Cauchy, Binet, Sturm et Jacobi [1]. La propriété que je vais démontrer n'avait pas encore, je crois, été remarquée : elle servira à simplifier considérablement l'expression ordinaire du dénominateur $\Delta$.

Considérons le système qui suit, composé de $n$ lignes horizontales, et de $p$ lignes verticales, $p$ étant égal à $n$ ou plus petit que $n$.

$$\left.\begin{array}{cccccc} d_1, & e_1, & f_1, & \ldots . & k_1, & l_1, \\ d_2, & e_2, & f_2, & \ldots . & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_n, & e_n, & f_n, & \ldots . & k_n, & l_n. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Je choisis $p-1$ lignes horizontales : pour fixer les idées, ce seront les $p-1$ premières ; puis, dans le système ainsi obtenu, je supprime successivement la première, la 2$^e$, .... la $p^e$ ligne verticale. J'obtiens de la sorte $p$ systèmes, savoir :

$$\left.\begin{array}{ccccc} e_1, & f_1, & \ldots . & k_1, & l_1, \\ e_2, & f_2, & \ldots . & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{p-1}, & f_{p-1}, & \ldots . & k_{p-1}, & l_{p-1} \end{array}\right\} \quad 1^{\text{er}} \text{ groupe.}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} d_1, & f_1, & \ldots . & k_1, & l_1, \\ d_2, & f_2, & \ldots . & k_2, & l_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{p-1}, & f_{p-1}, & \ldots . & k_{p-1}, & l_{p-1} \end{array}\right\} \quad 2^{\text{me}} \text{ groupe.}$$

[1] Cauchy, *Journal de l'École polyt.*, 17$^e$ cahier; Binet, *Journal de l'École polyt.*, 16$^e$ cahier, pag. 280; Sturm, *Bulletin de M. Férussac*, tom. XII, pag. 314; Jacobi, *Journal de Crelle*, tom. XII, pag. 1. *Voy.* aussi un mémoire de M. Lebesgue, *Journ. de Liouville*, tom. II, p. 337.

$$\left.\begin{array}{llll} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_1, & e_1, & \ldots\ldots & k_1, \\ d_2, & e_2, & \ldots\ldots & k_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p-1}, & e_{p-1}, & \ldots\ldots & k_{p-1} \end{array}\right\} p^e \text{ groupe.}$$

Chacun de ces groupes peut être considéré comme représentant $p-1$ équations entre $p-1$ inconnues : il en est de même pour tous ceux que l'on pourra former suivant la loi ci-dessus indiquée.

12. Je désigne actuellement par $D_d$, $D$ , .... $D_k$, $D_l$ les dénominateurs des valeurs des inconnues dans ces différents systèmes d'équations, ou les *déterminants* des 1er, 2e, .... $p^e$ groupes : l'indice indique la lettre qui n'entre pas dans le système correspondant. De plus, comme chacun de ces dénominateurs peut avoir le signe $+$ ou le signe $-$, suivant l'ordre dans lequel il est formé, je supposerai que le premier terme de chacun d'eux soit respectivement :

$$\begin{array}{lll} \text{pour } D_d, & e_1 f_2 \ \ldots\ldots & k_{p-2}\, l_{p-1}, \\ \text{pour } D_e, & f_1 \ \ldots\ldots & l_{p-1}\, d_{p-1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{pour } D_l, & d_1 e_2 \ \ldots\ldots & k_{p-1}. \end{array}$$

Multiplions ces $p$ fonctions, successivement par $d_1$, $e_1$, .... $l_1$, et ajoutons les produits; puis par $d_2$, $e_2$, .... $l_2$, et ajoutons les produits; .... enfin par $d_n$, $e_n$, .... $l_n$, et ajoutons les produits.

Si nous avons égard aux formules (5) et (6), nous verrons que les $p-1$ premières sommes seront nulles, et que les $n-p+1$ dernières seront les déterminants de $n-p+1$ systèmes, ou les dénominateurs communs pour $n-p+1$ systèmes de $p$ équations, entre $p$ inconnues.

Pour chaque ensemble de $p$ groupes, formé au moyen de la suppression de $n-p+1$ lignes horizontales, dans le système (12), nous obtiendrons ainsi $n-p+1$ déterminants. En désignant par $C_{n, p-1}$ le nombre des combinaisons de $n$ lettres, prises $p-1$ à $p-1$, nous aurons, pour le nombre des déterminants de $p$ lettres, fournis par le système (12), $(n-p+1)\,C_{n_1 p-1}$. D'un autre côté, le nombre des déterminants de $p$ lettres, essentiellement différents, que l'on peut déduire de ce même système (12), doit être égal à $C_{n_1 p} = \frac{(n-p+1)}{p}\,C_{n_1 p-1}$.

Il résulte de là que, dans les sommes de produits dont il est question, chaque déterminant se trouvera répété $p$ fois [1].

13. Je suppose maintenant qu'il existe, entre les quantités (12), des relations de même forme que celles qui sont exprimées par les équations (7); c'est-à-dire

$$\begin{array}{l}
d_1 e_1 + d_2 e_2 + \ldots + d_n e_n = o, \\
d_1 f_1 + d_2 f_2 + \ldots + d_n f_n = o, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_n l_n = o;
\end{array}$$

et je fais la somme des carrés des fonctions telles que

$$d_1 D_d + e_1 D_e + \ldots + l_1 D_l,$$

dont il s'agit : ces fonctions sont en nombre $(n-p+1)\,C_{n_1 p-1}$.

En observant que les doubles produits seront nuls en vertu des relations qui précèdent, j'obtiens

$$p\,\Sigma(\Delta^2) = \Sigma_1^n\, d_i^2\, \Sigma(D_d)^2 + \Sigma_1^n\, e_i^2\, \Sigma(D_e)^2 + \ldots + \Sigma_1^n\, l_i^2\, \Sigma(D_l)^2 \quad \ldots \quad (13)$$

Dans cette formule, $\Delta$ représente un déterminant de $p$ lettres, et $D_h$ un déterminant de $p-1$ lettres, dans lequel n'entre pas la lettre $h$.

14. La formule (13) peut se mettre sous une autre forme plus simple.

[1] L'idée de cette démonstration est due à M. Binet; mais, avant d'avoir eu connaissance de son mémoire, j'avais déjà trouvé, par une autre méthode, la formule (15). *Voy.* le *Journal de l'École polytechnique*, 16[e] cahier.

Prenons $p=2$; nous aurons

$$2\,\Sigma(\triangle^2)=\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2+\Sigma_1^n\,e_i^2\,\Sigma_1^n\,d_i^2=2\,\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2\,;$$

ou

$$\Sigma(\triangle^2)=\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2\,;$$

ou encore

$$(d_1e_2-e_1d_2)^2+(d_1e_3-e_1d_3)^2+\ldots.+(d_{n-1}\,e_n-e_{n-1}\,d_n)^2=(d_1^2+d_2^2+\ldots.+d_n^2)(e_1^2+e_2^2+\ldots.+e_n^2)\,;$$

ce qui coïncide avec une formule connue.

Prenons $p=3$; nous obtiendrons également

$$3\,\Sigma(\triangle^2)=\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2\,\Sigma_1^n\,f_i^2+\Sigma_1^n\,e_i^2\,\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,f_i^2+\Sigma_1^n\,f_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2\,\Sigma_1^n\,d_i^2\,;$$

ou

$$\Sigma(\triangle^2)=\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2\,\Sigma_1^n\,f_i^2.$$

En continuant de la même manière, il est clair que la formule (13) deviendra,

$$\Sigma(\triangle^2)=\Sigma_1^n\,d_i^2\,\Sigma_1^n\,e_i^2\;\ldots.\;\Sigma_1^n\,k_i^2\,\Sigma_1^n\,l_i^2\quad\ldots\ldots\quad(14)$$

15. Nous pouvons actuellement appliquer cette formule générale au cas des équations (1) et (7), dans lesquelles $p=n$; et nous obtiendrons, pour le carré du dénominateur des valeurs des inconnues, cette expression très-simple :

$$\triangle^2=\mathrm{A.\,B.\,C.}\ldots\ldots.\mathrm{L}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(15)$$

En même temps, les équations (11) donneront

$$\mathrm{D}_1^2+\mathrm{D}_2^2+\ldots\ldots\mathrm{D}_n^2=\mathrm{B.\,C.}\ldots\ldots\mathrm{L}\quad\ldots\ldots\quad(16)$$

Dans l'expression de $\Delta$, déduite de la formule (15), on peut convenir de prendre le radical positivement; alors les équations (11) donneront, avec les signes convenables, les valeurs de $\mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}_2$, .... $\mathrm{D}_n$:

on aura donc tout ce qui est nécessaire pour calculer facilement et sans ambiguité de signe, la valeur de $x_1$. Il en serait de même pour les valeurs des autres inconnues.

On pourrait facilement découvrir encore d'autres relations entre les coefficients des équations (1) : j'abandonne cette recherche, attendu qu'elle est inutile à l'objet de ce mémoire.

## DEUXIÈME PARTIE.

### TRANSFORMATION DES VARIABLES DANS LES INTÉGRALES MULTIPLES.

16. Considérons l'intégrale d'ordre $n$ :

$$V = \int F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\, dx_1 . dx_2 \ldots\ldots dx_n :$$

et supposons que l'on veuille prendre pour variables, au lieu de $x_1$, $x_2$, .... $x_n$, d'autres quantités $u_1$, $u_2$, .... $u_n$, déterminées, en fonction des premières, par le moyen de $n$ équations.

Après avoir remplacé, dans la fonction F, les anciennes variables par leurs valeurs, on devra substituer au produit $dx_1.dx_2. \ldots . dx_n$, une expression de la forme

$$\Psi(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)\, du_1 . du_2 \ldots\ldots du_n :$$

il s'agit de trouver la fonction $\Psi$.

Lagrange et d'autres géomètres ont résolu la question pour les cas de $n = 2$ ou $n = 3$ ; mais je ne pense pas que la formule de transformation ait été démontrée généralement.

17. Soient

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots\ldots \varphi_n = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \tag{17}$$

les $n$ équations données, qui lient les anciennes variables aux nouvelles. Admettons que dans V, on intègre en premier lieu, par rapport à $x_1$. On devra alors regarder $x_2$, $x_3$, .... $x_n$, comme des quantités constantes dans les équations (17), lesquelles renfermeront ainsi $n+1$ variables; savoir, $u_1$, $u_2$, .... $u_n$ et $x_1$. Si l'on exprime ensuite $x_1$ en fonction des nouvelles variables, et si l'on prend $u_1$ pour variable indépendante, on aura, pour déterminer $dx_1$ au moyen de $du_1$, les $n$ équations

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_1}{du_1}du_1 + \frac{d\varphi_1}{du_2}du_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_1}{du_n}du_n = 0, \\
\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_2}{du_1}du_1 + \frac{d\varphi_2}{du_2}du_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_2}{du_n}du_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_n}{du_1}du_1 + \frac{d\varphi_n}{du_2}du_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_n}{du_n}du_n = 0.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1^\circ)$$

Ces équations donneront une valeur de $dx_1$, de la forme

$$dx_1 = -\frac{N_1}{D_1}du_1.$$

En substituant cette valeur dans $dV$, et employant les équations (17) pour éliminer $x_1$, $u_2$, $u_3$, .... $u_n$, on aura la différentielle de V exprimée au moyen des $n$ variables $x_2$, $x_3$, .... $x_n$ et $u_1$.

Si l'on veut intégrer cette fonction par rapport à $x_2$, on devra considérer comme constantes toutes les autres quantités qui y entrent, c'est-à-dire, en répétant le raisonnement ci-dessus, que $dx_2$ sera donnée en fonction des nouvelles variables, et de $du_2$, au moyen des $n$ équations

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}dx_2 + \frac{d\varphi_1}{du_2}du_2 + \frac{d\varphi_1}{du_3}du_3 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{du_n}du_n = 0, \\
\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_2}{dx_2}dx_2 + \frac{d\varphi_2}{du_2}du_2 + \frac{d\varphi_2}{du_3}du_3 + \ldots + \frac{d\varphi_2}{du_n}du_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_n}{dx_2}dx_2 + \frac{d\varphi_n}{du_2}du_2 + \frac{d\varphi_n}{du_3}du_3 + \ldots + \frac{d\varphi_n}{du_n}du_n = 0.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2^\circ)$$

On déduira de ces équations,

$$dx_2 = -\frac{N_2}{D_2}\,du_2.$$

Continuant de la même manière, on verra que l'on sera enfin conduit à résoudre le système suivant :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}dx_n + \frac{d\varphi_1}{du_n}du_n = 0,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_2}{dx_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n}dx_n + \frac{d\varphi_2}{du_n}du_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1 + \frac{dx_n}{dx_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_n}dx_n + \frac{d\varphi_n}{du_n}du_n = 0;
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad (n^{\circ})$$

lequel donnera

$$dx_n = -\frac{N_n}{D_n}\,du_n.$$

18. Il résulte de cette démonstration, que la fonction $\Psi$ a pour valeur,

$$(-1)^n\,\frac{N_1}{D_1}\cdot\frac{N_2}{D_2}\ldots\ldots\frac{N_n}{D_n};$$

mais cette expression peut être considérablement simplifiée.

En effet, pour obtenir le numérateur $N_2$, il suffit de remplacer, dans la valeur de $D_2$, le coefficient de $x_2$ par le coefficient de $du_2$ entrant dans la même équation. Il résulte de cette observation, que le numérateur $N_2$ est égal au dénominateur commun relatif aux équations

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}y_1 + \frac{d\varphi_1}{du_2}y_2 + \frac{d\varphi_1}{du_3}y_3 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_1}{du_n}y_n = 1,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}y_1 + \frac{d\varphi_2}{du_2}y_2 + \frac{d\varphi_2}{du_3}y_3 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_2}{du_n}y_n = 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}y_1 + \frac{d\varphi_n}{du_2}y_2 + \frac{d\varphi_n}{du_3}y_3 + \ldots\ldots + \frac{d\varphi_n}{du_n}y_n = 1.
\end{aligned}\right\}$$

Or, à l'exception de la notation et de la quantité indépendante des inconnues, ces équations sont précisément celles qui composent le système 1°; et de plus, elles sont disposées dans le même ordre. Il suit de là que $N_2 = D_1$. On trouverait de même que $N_3 = D_2, \ldots N_n = D_{n-1}$. Donc

$$dx_1 = -\frac{N_1}{D_1}du_1, \quad dx_2 = -\frac{D_1}{D_2}du_2, \quad \ldots\ldots \quad dx_n = -\frac{D_{n-1}}{D_n};$$

et par suite,

$$dx_1 . dx_2 \ldots\ldots dx_n = (-1)^n \frac{N_1}{D_n} du_1 . du_2 \ldots\ldots du_n \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

19. On peut établir une règle empirique très-simple pour retrouver cette formule de transformation. Observons pour cela que $N_1$ est le dénominateur de la valeur des inconnues dans les équations

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\varphi_1}{du_1} z_1 + \dfrac{d\varphi_1}{du_2} z_2 + \ldots\ldots + \dfrac{d\varphi_1}{du_n} z_n = 1, \\[2ex]
\dfrac{d\varphi_2}{du_1} z_1 + \dfrac{d\varphi_2}{du_2} z_2 + \ldots\ldots + \dfrac{d\varphi_2}{du_n} z_n = 1, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{d\varphi_n}{du_1} z_1 + \dfrac{d\varphi_n}{du_2} z_2 + \ldots\ldots + \dfrac{d\varphi_n}{du_n} z_n = 1;
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

tandis que $D_n$ est celui qui correspond aux équations

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\varphi_1}{dx_1} y_1 + \dfrac{d\varphi_1}{dx_2} y_2 + \ldots\ldots + \dfrac{d\varphi_1}{dx_n} y_n = 1, \\[2ex]
\dfrac{d\varphi_2}{dx_1} y_1 + \dfrac{d\varphi_2}{dx_2} y_2 + \ldots\ldots + \dfrac{d\varphi_2}{dx_n} y_n = 1, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{d\varphi_n}{dx_1} y_1 + \dfrac{d\varphi_n}{dx_2} y_2 + \ldots\ldots + \dfrac{d\varphi_n}{dx_n} y_n = 1.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Or, pourvu que l'on remplace $z_i$ par $du_i$, et $y_{i'}$ par $dx_{i'}$, les premiers membres des équations (19) représentent les différentielles complètes, par rapport aux anciennes variables, des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$; tandis que les premiers membres des équations (20) sont les différentielles complètes de ces mêmes fonctions, par rapport aux nouvelles variables Donc :

« Différenciez chacune des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, .... $\varphi_n = 0$,
» en regardant comme indépendantes toutes les variables. Égalez à
» zéro, ou à une constante, la partie qui dépend des anciennes diffé-
» rentielles, et à zéro ou à une constante, la partie relative aux
» nouvelles différentielles. Vous aurez de la sorte deux groupes de $n$
» équations chacun : dans le premier groupe entreront comme incon-
» nues les différentielles des variables primitives, et dans le second
» les différentielles des nouvelles variables. Si vous désignez par X
» le dénominateur pour le premier groupe, et par U le dénomina-
» teur pour le second, vous aurez, pour la formule de transformation
» cherchée :

$$X\, dx_1.dx_2 \ldots dx_n = \pm U du_1.du_2 \ldots du_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Nous employons le double signe, au lieu de $(-1)^n$ : cela tient à cette circonstance, que les dénominateurs X et U pouvant changer de signe, suivant l'ordre dans lequel les équations qui servent à les former auront été écrites, il est impossible de décider quel signe on doit employer dans l'équation (21). Mais, dans chaque cas particulier, l'indétermination cessera.

20. Si les anciennes variables sont données en fonction des nouvelles, *explicitement*, les équations (17) deviennent

$$\pi_1 - x_1 = 0, \quad \pi_2 - x_2 = 0, \ldots \pi_n - x_n = 0; \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ désignant des fonctions des nouvelles variables seulement. En appliquant la règle précédente à ce cas plus simple, on trouvera

$$dx_1.dx_2 \ldots\ldots dx_n = \pm \mathrm{U} du_1.du_2 \ldots\ldots du_n; \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

U étant le dénominateur commun relatif aux équations (19), dans lesquelles on remplacerait $\varphi$ par $\pi$.

Cette formule (23) coïncide ainsi avec celle qui était connue pour le cas de trois variables.

## TROISIÈME PARTIE.

### APPPLICATION DES FORMULES CONTENUES DANS LES DEUX PREMIERS PARAGRAPHES.

21. Je choisirai, comme exemple des fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$, .... $\varphi_n$, les formules de transformation suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{x_1^2}{u_1^2-a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{u_1^2-a_2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_1^2-a_n^2}=1,\\
\dfrac{x_1^2}{u_2^2-a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{u_2^2-a_2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_2^2-a_n^2}=1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{x_1^2}{u_n^2-a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{u_n^2-a_2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_n^2-a_n^2}=1.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Lorsque $n=3$, ces équations sont celles qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un système de *coordonnées elliptiques*, coordonnées dont M. Lamé a fait des applications si remarquables, dans ses beaux mémoires sur la *Théorie de la chaleur*.

22. M. Binet a donné [1] un moyen très-simple pour résoudre des équations de même forme que celles qui précèdent; on trouve, en ap-

[1] *Journal de Liouville*, tom. II, pag. 251.

pliquant la méthode employée par ce géomètre,

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^2 + \dfrac{(a_1^2 - u_1^2)(a_1^2 - u_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_1^2 - u_n^2)}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2) \;\ldots\ldots\; (a_1^2 - a_n^2)} = 0, \\
x_2^2 + \dfrac{(a_2^2 - u_1^2)(a_2^2 - u_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_2^2 - u_n^2)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - a_3^2) \;\ldots\ldots\; (a_2^2 - a_n^2)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^2 + \dfrac{(a_n^2 - u_1^2)(a_n^2 - u_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_n^2 - u_n^2)}{(a_n^2 - a_1^2)(a_n^2 - a_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_n^2 - a_{n-1}^2)} = 0.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

23. Soit actuellement, comme plus haut, une intégrale d'ordre $n$ :

$$V = \int F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\, dx_1 . dx_2 \ldots\ldots dx_n.$$

Si nous voulons faire le changement de variables, nous devrons remplacer le produit .... $dx_1$, $dx_2$ .... $dx_n$ par une certaine fonction différentielle que nous obtiendrons en appliquant la règle donnée dans le n° 19.

Or, en différentiant complétement chacune des équations (25), on obtient $n$ équations de cette forme :

$$x_i dx_i - \frac{N_i}{D_i}\left(\frac{u_1}{a_i^2 - u_1^2}\, du_1 + \frac{u_2}{a_i^2 - u_2^2}\, du_2 + \ldots\ldots + \frac{u_n}{a_i^2 - u_n^2}\, du_n\right) = 0 \,; \quad . \quad . \quad (26)$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{N_i}{D_i} = \frac{(a_i^2 - u_1^2)(a_i^2 - u_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_i^2 - u_n^2)}{(a_i^2 - a_1^2)(a_i^2 - a_2^2) \;\ldots\ldots\; (a_i^2 - a_n^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Au moyen de la valeur de $x_i^2$, qui est

$$x_i^2 = -\frac{N_i}{D_i},$$

l'équation (26) devient

$$x_i dx_i + x_i^2\left(\frac{u_1}{a_i^2 - u_1^2}\, du_1 + \frac{u_2}{a_i^2 - u_2^2}\, du_2 + \ldots\ldots + \frac{u_n}{a_i^2 - u_n^2}\, du_n\right) = 0 \quad . \quad . \quad (28)$$

Cela étant, je pose, conformément à la règle ci-dessus énoncée, les $n$ équations

$$x_1 dx_1 = 1,\quad x_2 dx_2 = 1,\quad \ldots\ldots \quad x_n dx_n = 1; \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

et les $n$ équations

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^2\left(\dfrac{u_1}{a_1^2-u_1^2}du_1+\dfrac{u_2}{a_1^2-u_2^2}du_2+\ldots\ldots+\dfrac{u_n}{a_1^2-u_n^2}du_n\right)=1,\\
x_2^2\left(\dfrac{u_1}{a_2^2-u_1^2}du_1+\dfrac{u_2}{a_2^2-u_2^2}du_2+\ldots\ldots+\dfrac{u_n}{a_2^2-u_n^2}du_n\right)=1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^2\left(\dfrac{u_1}{a_n^2-u_1^2}du_1+\dfrac{u_2}{a_n^2-u_2^2}du_2+\ldots\ldots+\dfrac{u_n}{a_n^2-u_n^2}du_n\right)=1.
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Il est visible que si l'on forme le dénominateur commun correspondant à ces dernières équations, dans lesquelles $du_1, du_2, \ldots\ldots du_n$ sont prises pour inconnues, ce dénominateur contiendra, comme facteur commun, $x_1.x_2 \ldots\ldots x_n$, $u_1.u_2 \ldots\ldots u_n$; d'un autre côté, le dénominateur commun relatif aux équations (29) est $x_1.x_2 \ldots\ldots x_n$ : donc, si l'on désigne par $\Delta$ le dénominateur de la valeur des inconnues dans les équations

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{x_1}{a_1^2-u_1^2}y_1+\dfrac{x_1}{a_1^2-u_2^2}y_2+\ldots\ldots+\dfrac{x_1}{a_1^2-u_n^2}y_n=1,\\
\dfrac{x_2}{a_2^2-u_1^2}y_1+\dfrac{x_2}{a_2^2-u_2^2}y_2+\ldots\ldots+\dfrac{x_2}{a_2^2-u_n^2}y_n=1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{x_n}{a_n^2-u_1^2}y_1+\dfrac{x_n}{a_n^2-u_2^2}y_2+\ldots\ldots+\dfrac{x_n}{a_n^2-u_n^2}y_n=1;
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

on aura, dans l'intégrale V,

$$dx_1.dx_2 \ldots\ldots dx_n = \pm\,\Delta.\, u_1.u_2 \ldots\ldots u_n.du_1 du_2 \ldots\ldots du_n \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

24. Je vais maintenant démontrer que les équations (31) sont du même genre que les équations (1), traitées dans le numéro (8); c'est-

à-dire que, eu égard aux formules (25), on a, par exemple :

$$\frac{x_1}{a_1^2-u_1^2}\cdot\frac{x_1}{a_1^2-u_2^2}+\frac{x_2}{a_2^2-u_1^2}\cdot\frac{x_2}{a_2^2-u_2^2}+\ldots\ldots+\frac{x_n}{a_n^2-u_1^2}\cdot\frac{x_n}{a_n^2-u_2^2}=0 \quad . \quad . \quad (33)$$

En mettant pour $x_1^2$, $x_2^2$, .... $x_n^2$ leurs valeurs (25), ceci revient à faire voir que l'on a, *identiquement :*

$$\frac{(a_1^2-u_3^2)(a_1^2-u_4^2)\ldots(a_1^2-u_n^2)}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)\ldots(a_1^2-a_n^2)}+\frac{(a_2^2-u_3^2)(a_2^2-u_4^2)\ldots(a_2^2-u_n^2)}{(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)\ldots(a_2^2-a_n^2)}+\ldots$$
$$+\frac{(a_n^2-u_3^2)(a_n^2-u_4^2)\ldots(a_n^2-u_n^2)}{(a_n^2-a_1^2)(a_n^2-a_2^2)\ldots(a_n^2-a_{n-1}^2)}=0;$$

ou, pour plus de simplicité,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(a_1-u_3)(a_1-u_4)\ldots(a_1-u_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+\frac{(a_2-u_3)(a_2-u_4)\ldots(a_2-u_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots\\&+\frac{(a_n-u_3)(a_n-u_4)\ldots(a_n-u_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}=0.\end{aligned}\right\} . \quad (34)$$

Pour démontrer que la fonction contenue dans le premier membre est nulle d'elle-même, je prends la fraction rationnelle

$$\frac{(x-u_3)(x-u_4)\ \ldots\ (x-u_n)}{(x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_n)}=\varphi(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

dans laquelle le numérateur est du degré $n-2$, et le dénominateur du degré $n$. Cette quantité peut se décomposer en $n$ fractions simples, de la forme $\frac{A_i}{x-a_i}$. Or, par les règles ordinaires,

$$A_i=\frac{(a_i-u_3)(a_i-u_4)\ \ldots\ (a_i-u_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ \ldots\ (a_i-a_n)}:$$

ce qui fait voir que la fonction (34) $=\Sigma_1^n A_i$. En même temps, si l'on remplace $\varphi(x)$ par $\Sigma_1^n \frac{A_i}{x-a_i}$, et si l'on chasse les dénominateurs, l'équation (35) devient

$$(x-u_3)(x-u_4)\ldots(x-u_n)=\Sigma_1^n A_i(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n). \quad (36)$$

Si l'on développe actuellement les deux membres de cette équation suivant les puissances descendantes de $x$, le premier terme du second membre sera $x^{n-1}\Sigma_1^n A_i$, tandis que le premier membre est seulement du degré $n-2$. Donc, etc.

Il est clair que, par la comparaison des deux développements, la formule (36) fournirait encore $n-1$ relations, plus ou moins importantes; je ferai seulement remarquer celle-ci :

$$\Sigma_1^n \frac{A_i}{a_i} = -\frac{u_3 . u_4 \ldots\ldots u_n}{a_1 . a_2 \ldots\ldots a_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Elle se déduit aussi de la formule (35), en y faisant $x = 0$.

25. Revenant aux équations (31), je leur applique la formule (15); et j'obtiens, pour le carré du dénominateur commun $\Delta$ :

$$\Delta^2 = \left(\Sigma_1^n \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_1^2)^2}\right)\left(\Sigma_1^n \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_1^2)^2}\right) \ldots\ldots \left(\Sigma_n^1 \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_n^2)^2}\right) \ldots\ldots (38)$$

Cette formule est beaucoup plus simple que celle qu'on aurait obtenue en résolvant, par la méthode ordinaire, les équations (31) : cependant elle est susceptible d'une réduction très-remarquable.

Pour opérer cette réduction, je prends l'un quelconque des $n$ facteurs qui composent le second membre; le premier, par exemple. En y mettant pour $x_i^2$ sa valeur donnée plus haut, ce facteur se transforme en

$$-\Sigma_1^n \frac{(a_i^2 - u_2^2)(a_i^2 - u_3^2) \ldots\ldots (a_i^2 - u_n^2)}{(a_i^2 - u_1^2)(a_i^2 - a_1^2) \ldots\ldots (a_i^2 - a_n^2)} :$$

il est bien entendu que le dénominateur ne contient pas $a_i^2 - a_i^2$.

Afin d'exprimer cette fonction d'une manière plus simple, je considère la fraction rationnelle

$$\frac{(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 - u_3^2) \ldots\ldots (u_1^2 - u_n^2)}{(u_1^2 - a_1^2)(u_1^2 - a_2^2) \ldots\ldots (u_1^2 - a_n^2)} = \Sigma_1^n \frac{A_i}{u_1^2 - a_i^2}.$$

On a pour le numérateur de l'une des fractions simples,

$$A_i = \frac{(a_i^2 - u_2^2)(a_i^2 - u_3^2) \dots (a_i^2 - u_n^2)}{(a_i^2 - a_1^2)(a_i^2 - a_2^2) \dots (a_i^2 - a_n^2)};$$

d'où, en comparant cette fonction à ce qui est écrit ci-dessus, on conclut

$$\Sigma_1^n \frac{x_i^2}{(a_i^2 - u_1^2)^2} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 - u_3^2) \dots (u_1^2 - u_n^2)}{(u_1^2 - a_1^2)(u_1^2 - a_2^2) \dots (u_1^2 - a_n^2)} \quad \dots \quad (39)$$

Ainsi, la transformation que nous avons choisie jouit de cette propriété, qu'une certaine somme de carrés peut s'exprimer par un produit. Il résulte aussi de cette transformation que la formule (38) se réduit à

$$\Delta^2 = U_1 . U_2 \dots U_i \dots U_n; \quad \dots \quad (40)$$

en posant

$$U_i = \frac{(u_i^2 - u_1^2)(u_i^2 - u_2^2) \dots (u_i^2 - u_{i-1}^2)(u_i^2 - u_{i+1}^2) \dots (u_i^2 - u_n^2)}{(u_i^2 - a_1^2)(u_i^2 - a_2^2) \dots \dots (u_i^2 - a_n^2)} \quad \dots \quad (41)$$

Par suite, dans la différentielle de V, l'on doit prendre,

$$dx_1 . dx_2 \dots dx_n = u_1 . u_2 \dots u_n . du_1 . du_2 \dots du_n . \sqrt{U_1 . U_2 \dots U_n} \quad \dots \quad (42)$$

26. Cette dernière formule peut s'écrire autrement : remarquons en effet que $U_1$ renferme comme facteur la différence $u_1^2 - u_2^2$; tandis que $U_2$ contient $u_2^2 - u_1^2$; d'où il résulte qu'en omettant $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, le produit des numérateurs des fonctions U est un carré. Par suite, si l'on désigne par $D_i$ le dénominateur de $U_i$, on aura

$$dx_1 . dx_2 \dots dx_n = u_1 . u_2 \dots u_n . du_1 . du_2 \dots du_n . \frac{\Pi . (u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{D_1 . D_2 \dots D_i \dots D_n}} \quad . \quad (43)$$

Dans cette formule, la lettre $\Pi$ indique un produit de facteurs de même forme que celui qui suit cette caractéristique, l'indice $i$ pouvant croître de 1 à $n-1$ inclusivement, et l'indice $l$ étant plus grand que $i$.

Il est nécessaire d'observer qu'à raison du radical placé en dénominateur, la fonction du second membre pourrait devenir imaginaire, tandis que jusqu'ici, nous avons toujours supposé, tacitement il est vrai, que toutes les fonctions considérées étaient réelles. Cette discordance provient évidemment de la suppression du facteur $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, qui a été faite pour simplifier la formule. Mais si l'on rétablit ce facteur, et si d'ailleurs la transformation exprimée par les équations (21), est possible, la formule (43) ne pourra pas devenir imaginaire. Nous éclaircirons tout cela dans le paragraphe suivant.

27. Si l'on suppose $n=3$ et $a_3=0$, on trouve

$$dx_1.dx_2.dx_3 = du_1.du_2.du_3.\frac{(u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_3^2)(u_2^2-u_3^2)}{\sqrt{(u_1^2-a_1^2)(u_1^2-a_2^2)(a_1^2-u_2^2)(u_2^2-a_2^2)(a_1^2-u_3^2)(a_2^2-u_3^2)}}.$$

Cette valeur est semblable, sauf la notation, à celle qui a été employée par M. Lamé [1]. Seulement, ce savant géomètre est arrivé à sa formule par un calcul direct, et en faisant attention aux réductions entre les termes : or, cette méthode, bonne pour le but qu'il se proposait d'atteindre, ne pouvait nullement faire prévoir ce qui arriverait pour le cas de $n$ variables; elle était même tout à fait impraticable pour un nombre de variables supérieur à trois.

[1] *Journal de Liouville*, tom. II, pag. 158.

## QUATRIÈME PARTIE.

### THÉORÈME SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES ABÉLIENNES.

28. J'appliquerai les formules du paragraphe 3 à l'intégrale d'ordre $n$:

$$V = \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

les limites étant déterminées par

$$\frac{x_1^2}{a^2 - a_1^2} + \frac{x_2^2}{a^2 - a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a^2 - a_n^2} \overline{\gtrless} 1. \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

Les constantes positives $a_1^2, a_2^2, \ldots a_n^2$ sont supposées inégales, et telles que l'on ait

$$a^2 > a_1^2 > a_2^2 > \quad \ldots \quad > a_n^2.$$

Je supposerai, en outre, que les $n$ variables ne reçoivent que des valeurs positives.

29. Si nous voulons remplacer les variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ par d'autres $u_1, u_2, \ldots u_n$, de même nature que celles qui ont été considérées plus haut, il faudra, pour déterminer les limites de ces nouvelles variables, assigner aux anciennes des valeurs arbitraires, satisfaisant à la condition (45); puis, en désignant par $h^2$ la valeur positive et plus

petite que l'unité que prend alors le second membre, résoudre l'équation

$$\frac{x_1^2}{y-a_1^2}+\frac{x_2^2}{y-a_2^2}+\ldots\ldots+\frac{x_n^2}{y-a_n^2}=h^2: \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

les $n$ racines de cette équation seront les valeurs de $u_1^2$, $u_2^2$, .... $u_n^2$, correspondant aux valeurs choisies pour $x_1^2$, $x_2^2$, .... $x_n^2$.

Si par exemple $n=3$, et si $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont les coordonnées rectangulaires d'un point compris dans l'ellipsoïde représenté par l'équation (45), les trois racines de l'équation (46) seront les carrés des coordonnées elliptiques de ce point, ou les carrés des paramètres des trois surfaces orthogonales qui s'y croisent.

On prouve très-facilement que l'équation en $y$ a ses racines réelles et inégales [1] : cela démontre la possibilité du système de transformations représenté par les formules (24); système que nous avions admis jusqu'ici, mais sans justifier son emploi. On sait, en outre, qu'en désignant par $u_1^2$, $u_2^2$, .... $u_n^2$, les racines de cette même équation, l'on a

$$u_1^2>a_1^2>u_2^2>a_2^2> \ldots\ldots >u_n^2>a_n^2; \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

ce qui apprend que chacune des nouvelles variables, à l'exception de $u_1$, sera comprise entre deux termes de la suite $a_1$, $a_2$, .... $a_n$.

Afin de savoir si ces deux termes sont les limites de l'intégrale par rapport à cette nouvelle variable, je reprends les équations (25) :

1° En y supposant $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, auquel cas $h=0$, elles donnent

$$u_1=a_1, \quad u_2=a_2, \quad \ldots\ldots \quad u_n=a_n;$$

2° En posant, dans ces mêmes équations, $x_1^2=a^2-a_1^2$, et $x_2=x_3=\ldots=x_n=0$, ce qui donne $h=1$, il vient $u_1=a$, $u_2=a_2$, ......., $u_n=a_n$.

[1] Voyez, sur ce point, le *Journal de M. Liouville*, tom. III, p. 338.

Les valeurs limites de $u_1$ sont donc $a_1$ et $a$. On prouverait de la même manière que les limites de l'intégrale relative à $u_2$ seront $a_2$ et $a_1$; etc.

Ainsi, pour embrasser tous les éléments de l'intégrale V, on doit attribuer à chacune des variables $u_1$, $u_2$, .... $u_n$, toutes les valeurs comprises entre les deux constantes qui, dans les inégalités (47), comprennent entre elles cette même variable.

30. Il résulte de là, et de la formule (42), que l'intégrale (44) se transforme en

$$V=\int_{a_n}^{a_{n-1}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\cdots\int_{a_1}^{a} u_n du_n . u_{n-1} du_{n-1} \ldots u_1 du_1 . \sqrt{U_n . U_{n-1} \ldots U_i \ldots U_1}\,; \quad . \quad (48)$$

en représentant par $U_i$ la même fonction que précédemment; ou plutôt, en posant

$$U_i=\frac{(u_1^2-u_i^2)(u_2^2-u_i^2)\ldots(u_{i-1}^2-u_i^2)(u_i^2-u_{i+1}^2)\ldots(u_i^2-u_n^2)}{(a_1^2-u_i^2)(a_2^2-u_i^2)\ldots(a_{i-1}^2-u_i^2)(u_i^2-a_i^2)\ldots(u_i^2-a_n^2)}, \quad . \quad . \quad (49)$$

afin de n'avoir à considérer que des facteurs positifs.

D'un autre côté, si l'on applique à l'intégrale V la formule de M. Dirichlet [1], on trouve

$$V=\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots(a^2-a_n^2)}\,;$$

et en comparant cette valeur à la précédente, on arrive à ce résultat remarquable :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots(a^2-a_n^2)}\\ &=\int_{a_n}^{a_{n-1}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\cdots\int_{a_1}^{a} u_n du_n . u_{n-1} du_{n-1} \ldots u_1 du_1 . \sqrt{U_n . U_{n-1} \ldots U_1}.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

31. Cette formule intégrale est susceptible de la même simplifica-

[1] *Journal de Liouville*, tom. IV, pages 168 et 225.

tion que la formule différentielle (42). Il est clair, en effet, que toutes les différences telles que $(u_i^2 - u_l^2)$ se trouvent élevées au carré, sous le radical du second nombre; et que l'on a alors, sans ambiguïté de signes et sans imaginaires :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots.(a^2-a_n^2)} \\ = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n-1}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\ldots.\int_{a_1}^{a} u_n du_n . u_{n-1} du_{n-1} \ldots. u_1 du_1 . \frac{\Pi(u_k^2-u_l^2)}{\sqrt{D_1.D_2\ldots.D_n}}; \end{array}\right\} \quad (51)$$

en posant,

$$D_i = (a_1^2 - u_i^2)(a_2^2 - u_i^2)\ldots.(a_{i-1}^2 - u_i^2)(u_i^2 - a_i^2)\ldots.(u_i^2 - a_n^2) \quad (52)$$

Dans cette formule, l'indice $k$ doit varier de 1 à $n-1$ et l'indice $l$ doit être supérieur à $k$.

32. Afin de simplifier un peu, je suppose $a_n = 0$ : alors le facteur $u_i^2 - a_n^2$ de $D_i$ se réduisant à $u_i^2$, détruit le facteur $u_i$ qui se trouve sous les signes d'intégration; et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}a\sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots.(a^2-a_{n-1}^2)} \\ = \displaystyle\int_{0}^{a_{n-1}}\int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\ldots.\int_{a_1}^{a} du_n . du_{n-1} \ldots. du_1 . \frac{\Pi(u_k^2-u_l^2)}{\sqrt{D'_1.D'_2\ldots.D'_n}}; \end{array}\right\} \quad (53)$$

$D'_i$ étant égal à

$$(a_1^2 - u_i^2)(a_2^2 - u_i^2)\ldots.(a_{i-1}^2 - u_i^2)(u_i^2 - a_i^2)\ldots.(u_i^2 - a_{n-1}^2).$$

En prenant, dans cette dernière formule, $n = 3$, on retombe sur l'intégrale triple trouvée d'abord par M. Lamé, et qui, démontrée depuis par M. Poisson, l'a été tout récemment par M. Tortolini, de Rome [1].

[1] *Journal de M. Liouville*, tom. II, pages 167 et 185 ; Tortolini, *Sopra le trasformazioni e valori di alcuni intègrali definiti*, etc.

33. J'observe actuellement que si l'on développe le produit représenté par $\Pi(u_k^2 - u_l^2)$, ou

$$(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 - u_3^2) \ldots (u_1^2 - u_n^2)(u_2^2 - u_3^2)(u_2^2 - u_4^2) \ldots (u_2^2 - u_n^2) \ldots (u_{n-1}^2 - u_n^2), \quad (54)$$

on obtient une expression dont le premier terme est

$$u_1^{2n-2} . u_2^{2n-4} . u_2^{2n-6} . \ldots \ldots u_{n-1}^2 ;$$

et dont tous les autres sont positifs ou négatifs, mais de même forme que celui-là ; de façon que l'on peut écrire :

$$\Pi(u_k^2 - u_l^2) = \Sigma(\pm u_1^{2n-2} . u_2^{2n-4} \ldots u_{n-2}^4 . u_{n-1}^2) \quad \ldots \ldots (55)$$

Si nous remplaçons alors, dans l'équation (53), la fonction $\Pi$ par son développement, les variables se sépareront ; et l'on aura

$$\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} a \sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots (a^2 - a_{n-1}^2)} =$$

$$\Sigma\left(\pm \int_0^{a_{n-1}} \frac{du_n}{\sqrt{D'_n}} \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{u_{n-1}^2 \, du_{n-1}}{\sqrt{D'_{n-1}}} \ldots \int_{a_2}^{a_1} \frac{u_2^{2n-4} \, du_2}{\sqrt{D'_2}} \int_{a_1}^{a} \frac{u_1^{2n-2} \, du_1}{\sqrt{D'_1}}\right) \quad . \; . \; (56)$$

34. Pour bien faire comprendre le sens que l'on doit attacher au théorème exprimé par cette formule, je ferai observer d'abord que, dans le second membre, chaque signe d'intégration porte sur une fonction de la forme

$$\frac{x^{2(n-m)} \, dx}{\sqrt{A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + Nx^{2n-2}}};$$

$m$ étant une quantité entière, plus grande que l'unité, et au plus égale à $n$. Chaque facteur du second membre est donc une intégrale définie abélienne [1].

[1] Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, tom. III, 3me supplément, pag. 188. *Voy.* aussi différents mémoires de M. Jacobi et de l'illustre Abel, insérés dans le *Journal de Crelle*.

D'un autre côté, on prouve très-facilement, ainsi que l'a fait M. Poisson, que dans le cas de $n=3$, la propriété énoncée par la formule ci-dessus, revient à celle qui constitue le théorème de Legendre :

$$F_1(b)\,E_1(c)+F_1(c)\,E_1(b)-F_1(b)\,F_1(c)=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Il résulte, si je ne me trompe, de ces deux observations, que l'équation (56) donne, pour les intégrales définies abéliennes d'un ordre quelconque, le théorème trouvé par Legendre, seulement pour les fonctions elliptiques de première ou de seconde espèce.

Ordinairement, dans les intégrales définies abéliennes, on prend pour la limite inférieure, zéro. Il serait facile, au moyen d'un changement de variables, de transformer les intégrales ci-dessus en d'autres, satisfaisant à cette condition : mais comme la formule (56) serait remplacée alors par une autre assez compliquée, je me dispenserai de faire le calcul que j'indique ici.

35. Si l'on multiplie par $u_1^2.\,u_2^2\,\ldots\ldots\,u_n^2$ la fonction $\Pi$ développée, le résultat sera, comme on sait, égal au déterminant du système

$$\left.\begin{array}{lllll}
v_1^n, & v_2^n, & v_3^n, & \ldots\ldots & v_n^n, \\
v_1^{n-1}, & v_2^{n-1}, & v_3^{n-1}, & \ldots\ldots & v_n^{n-1}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
v_1^2, & v_2^2, & v_3^2, & \ldots\ldots & v_n^2, \\
v_1, & v_2, & v_3, & \ldots\ldots & v_n;
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

en posant, pour simplifier, $v_i=u_i^2$.

Il résulte de là que l'on pourra déterminer la fonction placée sous le signe $\Sigma$ dans la dernière formule, soit par la multiplication, soit en appliquant au système ci-dessus la règle relative aux déterminants. On devra avoir soin, si l'on emploie ce dernier moyen, de diminuer d'une unité chacun des exposants des lettres $v$.

36. En terminant, je ferai observer que, si l'on donne d'autres formes à la fonction placée sous le signe $\int$, dans l'intégrale (44), on ob-

tiendra des théorèmes sur les intégrales définies abéliennes, lesquels seront aussi généraux que celui qui a été démontré dans ce paragraphe. J'en ai trouvé de la sorte plusieurs, que je ferai connaître dans un autre mémoire. (Ici s'arrêtait le mémoire envoyé au concours).

37. Prenons, pour second exemple de l'application des formules contenues dans le paragraphe 3, l'intégrale

$$B = \int dx_2 . dx_3 \dots . dx_n \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{dx_3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_1}{dx_n}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

dans laquelle $x_2$, $x_3$, .... $x_n$ seront des variables indépendantes, et $x_1$ une fonction de ces variables, déterminée par la première des équations (25). On suppose cette intégrale étendue à toutes les valeurs positives de $x_2$, $x_3$, .... $x_n$ satisfaisant à la condition

$$\frac{x_2^2}{u_1^2 - a_2^2} + \frac{x_3^2}{u_1^2 - a_3^2} + \dots + \frac{x_n^2}{u_1^2 - a_n^2} \leqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

La valeur de $x_1$ donne

$$\frac{dx_1}{dx_i} = -\frac{x_i}{x_1} \frac{u_1^2 - a_1^2}{u_1^2 - a_i^2};$$

donc la quantité sous le radical se transforme en

$$\left(\frac{u_1^2 - a_1^2}{x_1}\right)^2 \left[\left(\frac{x_1}{u_1^2 - a_1^2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{u_1^2 - a_2^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{u_1^2 - a_n^2}\right)^2\right] = \left(\frac{u_1^2 - a_1^2}{x_1}\right)^2 \Sigma_1^n \left(\frac{x_i}{u_1^2 - a_i^2}\right)^2.$$

D'après le n° 26,

$$\Sigma_1^n \left(\frac{x_i}{u_1^2 - a_i^2}\right)^2 = \frac{(u_1^2 - u_2^2)(u_1^2 - u_3^2) \dots (u_1^2 - u_n^2)}{(u_1^2 - a_1^2)(u_1^2 - a_2^2) \dots (u_1^2 - a_n^2)}.$$

Le radical devient

$$\sqrt{\frac{u_1^2 - a_1^2}{x_1^2} \cdot \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 - a_2^2} \dots \frac{u_1^2 - u_n^2}{u_1^2 - a_n^2}};$$

ou, en mettant pour $x_1^2$ sa valeur :

$$\sqrt{\frac{a_1^2-a_2}{a_1^2-u_2^2}\cdot\frac{a_1^2-a_3^2}{a_1^2-u_3^2}\cdots\cdot\frac{a_1^2-a_n^2}{a_1^2-u_n^2}\times\frac{u_1^2-u_2^2}{u_1^2-a_2^2}\cdots\cdot\frac{u_1^2-u_n^2}{u_1^2-a_n^2}}.$$

38. Actuellement, afin d'obtenir l'expression transformée du produit $dx_2, dx_3, \ldots. dx_n$, j'emploie les équations (26), en supprimant la première, et supposant $u_1$ constante.

Pour simplifier, je pose en même temps

$$x_2 = z_2\sqrt{\frac{u_1^2-a_2^2}{a_1^2-a_2^2}},\quad x_3 = z_3\sqrt{\frac{u_1^2-a_3^2}{a_1^2-a_3^2}},\quad \ldots.\ x_n = z_n\sqrt{\frac{u_1^2-a_n^2}{a_1^2-a_n^2}} \quad \ldots \quad (60)$$

Les équations (26) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} z_2^2 + \dfrac{(a_2^2-u_2^2)\ \ldots.\ (a_2^2-u_n^2)}{(a_2^1-a_3^2)\ \ldots.\ (a_2^2-a_n^2)} = 0, \\ z_3^2 + \dfrac{(a_3^2-u_2^2)\ \ldots.\ (a_3^2-u_n^2)}{(a_3^2-a_2^2)\ \ldots.\ (a_3^2-a_n^2)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n^2 + \dfrac{(a_n^2-u_2^2)\ \ldots.\ (a_n^2-u_n^2)}{(a_n^2-a_2^2)\ \ldots.\ (a_n^2-a_{n-1}^2)} = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

Or, ces équations ne diffèrent des équations (26), appliquées à $n-1$ inconnues, que par le changement des indices $1, 2, 3, \ldots. n-1$ en $2, 3, \ldots. n$. Elles donneront pour $dz_2 \ldots. dz_n$ une valeur qui se déduira de la formule (44) par le même changement; c'est-à-dire que l'on aura

$$dz_2.dz_3 \ldots. dz_n = u_2.u_3 \ldots. u_n.du_2.du_3 \ldots. du_n \frac{\Pi(u_i^2-u_l^2)}{\sqrt{D_2.D_3 \ldots. D_m \ldots. D_n}} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

en posant

$$D_m = (u_m^2-a_2^2)(u_m^2-a_3^2) \quad \ldots. \quad (u_m^2-a_n^2).$$

Dans cette formule, les indices $i$ et $m$ croissent de 2 à $n-1$ et de 2 à $n$, et l'indice $l$ doit être plus grand que $i$.

Au moyen des formules (60) et (62), et en employant pour le radical de $dB$, la valeur trouvée plus haut, on a

$$dB = u_2 u_3 \dots u_n . du_2 du_3 \dots du_n \sqrt{\frac{u_1^2 - u_2^2}{a_1^2 - u_2^2} \dots \frac{u_1^2 - u_n^2}{a_1^2 - u_n^2}} \frac{\Pi(u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{D_2 . D_3 \dots D_m \dots D_n}} \quad . \quad . \quad (63)$$

**39.** Si, comme au n° 32, nous supposons $a_n = 0$, la formule précédente se transformera facilement en celle-ci :

$$dB = \frac{du_2 . du_3 \dots du_n . \Pi(u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{\Delta_2 . \Delta_3 \dots \Delta_m \dots \Delta_n}} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

l'indice $i$ peut actuellement croître de 1 à $n-1$, et

$$\Delta_m = (u_1^2 - u_m^2)(a_1^2 - u_m^2) \dots (a_{m-1}^2 - u_m^2)(u_m^2 - a_m^2) \dots (u_m^2 - a_{n-1}^2).$$

En employant ensuite toutes les considérations du n° 30, je trouve

$$B = \int_{a_2}^{a_1} \int_{a_3}^{a_2} \dots \int_{0}^{a_{n-1}} \frac{du_2 . du_3 \dots du_n \Pi(u_i^2 - u_l^2)}{\sqrt{\Delta_2 . \Delta_3 \dots \Delta_m \dots \Delta_n}} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

ou, en effectuant le produit $\Pi$, et adoptant la même notation qu'au n° 33 :

$$B = \Sigma \left( \pm \int_0^{a_{n-1}} \frac{du_n}{\sqrt{\Delta_n}} \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{u_{n-1}^2 du_{n-1}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}} \dots \int_{a_2}^{a_1} \frac{u_2^{2n-4} du_2}{\sqrt{\Delta_2}} u_1^{2n-2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

**40.** On peut obtenir une autre expression de l'intégrale B. Observons pour cela, qu'en posant dans la formule (55) :

$$x_2 = y_2 \sqrt{u_1^2 - a_2^2}, \quad x_3 = y_3 \sqrt{u_1^2 - a_3^2}, \quad \dots \quad x_n = y_n \sqrt{u_1^2 - a_n^2};$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{u_1^2 - a_2^2}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{u_1^2 - a_3^2}}, \quad \dots \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_n^2}{u_1^2 - a_n^2}};$$

elle se transforme en

$$B = \sqrt{(a_1^2 - a_2^2)(u_1^2 - a_3^2) \dots (u_1^2 - a_n^2)} \int dy_2 . dy_3 \dots dy_n \sqrt{\frac{1 - \lambda_2^2 y_2^2 - \dots - \lambda_n^2 y_n^2}{1 - y_2^2 - \dots - y_n}} ; \quad . \quad . \quad (67)$$