This page intentionally left blank.

Sur quelques produits indéfinis; par J. Beaupain.

Rapport de M. Catalan, premier Commissaire.

I.

« Au commencement de son intéressante Note, l'Auteur dit : « M. C. *critique, à tort, la formule* (159) ; puis, après l'avoir rappelée, M. Beaupain ajoute : « *elle contient une erreur de calcul ou une faute de typographie... cette formule doit être remplacée par la suivante* ». Dans ma lettre à M. Hermite, du 7 août 1892 (*), je n'ai guère dit autre chose.

II.

La formule (159), corrigée par M. Beaupain et par moi, est devenue

$$B(p, p) = \frac{1}{p \cdot 2^{p-1}} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{2\lambda(2\lambda + 2p - 1)}{(2\lambda + p - \frac{1}{2})(2\lambda + p)}. \quad (7^{bis}) \, (^{**})$$

En voulant appliquer, au cas de $p = \frac{1}{2}$, cette formule *rectifiée*, j'ai commis une faute de calcul. De là résulte que la relation (7^{bis}), que je croyais inexacte, ne l'est pas.

III.

Après avoir écrit ainsi sa formule (2),

$$(4) \quad B(p, p) = \frac{1}{p \cdot 2^{p-1}} \prod_{1}^{\infty} \left[1 - \frac{p^2 - p}{(2\lambda + p - 1)(2\lambda + p)} \right] (^{***}),$$

(*) *Recherches sur quelques produits indéfinis et sur la constante* G, p. 24.

(**) Lettre à M. Hermite, p. 25.

(***) Cette formule (4) semble contenir des *surcharges*. Je ne suis donc pas sûr de l'avoir copiée exactement.

M. Beaupain ajoute :

« *Or, la série*

$$(5)\quad \varsigma = \text{mod}.(p^2 - p)\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{4\lambda^2 \,\text{mod}\left[\left(1+\frac{p-1}{2\lambda}\right)\left(1+\frac{p}{2\lambda}\right)\right]}$$

» *est convergente, quel que soit le module de* p; *donc le*
» *produit indéfini* (4) *est absolument convergent. Ainsi,*
» *ce produit indéfini est une fonction uniforme... n'ayant*
» *des discontinuités qu'en des points isolés.* »

Comment un produit *absolument convergent* (*) peut-il avoir des discontinuités ?

Si $p = 1$, l'égalité (5) devient

$$\varsigma = 0 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{4\lambda^2 \,\text{mod}\left(1+\frac{1}{2\lambda}\right)}.$$

Cette série, dont tous les termes sont nuls, est-elle *convergente,* dans le sens habituel du mot? Je l'ignore; et, revenant au produit *absolument convergent* (excepté quand il est divergent), je songe à la question que j'adressais, naguère, à M. Hermite : *A-t-on, en Analyse, mis le cœur à droite, comme faisait Sganarelle* (**) ?

IV.

A la page 2 de la Note, M. Beaupain fait la remarque suivante :

« *Pour la série* (S), *il serait banal d'ajouter que la*

(*) Sous-entendu, sans doute : *quelle que soit la valeur attribuée à la variable.*

(**) *Intégrales eulériennes ou elliptiques,* p. 20.

valeur de cette série est infinie, quand on attribue à p *une valeur entière négative.* »

Contrairement à l'opinion exprimée par mon ancien excellent élève, je pense qu'il n'est pas *banal* de dire :

Telle série, habituellement convergente, devient divergente pour certaines valeurs de la variable.

V.

Dans les pages 2 et 3, M. B. s'attache à faire voir que plusieurs formules, démontrées dans mes Mémoires de Saint-Pétersbourg et de Bruxelles, sont des conséquences d'une célèbre égalité, due à Gauss. Accordé (*).

VI.

A la fin de sa Note, M. B. démontre la formule

$$2^\beta = lim \left[\frac{B(2n+\alpha+2\beta+1,\ n+1)}{B(2n+\alpha+\beta+1.\ n+\beta+1)}\right] n=\infty;$$

puis il dit :

M. C. a trouvé :

$$2^\alpha = lim \left[\frac{B(2n+\alpha+1,\ n+1)}{B(2n+1,\ n+\alpha+1)}\right] n=\infty.$$

Donc, probablement, l'un de nous deux s'est trompé, à moins que nous nous soyons trompés l'un et l'autre. On me permettra, je l'espère, de ne pas chercher la solution de ce problème, que je renvoie à mes jeunes et savants Confrères

---

(*) J'ai un peu connu, il y a cinquante ans, le philosophe Jacotot. Il avait pris, pour devise : *Tout est dans tout.*

VII.

Conclusions.

La Note de M. Beaupain me semble, comme les travaux précédents de ce jeune Géomètre, très digne d'être publiée dans les *Mémoires* in-4°, *après revision par l'Auteur.* »

Spa, 17 août 1893.

Rapport de M. P. Mansion, deuxième commissaire.

« Les numéros 1-2 de la note de M. Beaupain se rapportent à une formule de son mémoire antérieur, où M. Catalan avait signalé une petite erreur; les numéros 3 à 7 (numérotés 2 à 6 par inadvertance) contiennent la démonstration de diverses formules relatives aux eulériennes, les unes probablement nouvelles, les autres dues à M. Catalan.

Sur la première partie de la note soumise à notre examen, nous partageons l'avis du premier rapporteur. Puisque l'erreur dans la formule relative à $B(p, p)$ existe réellement, comme le reconnaît M. Beaupain, il est clair que M. Catalan n'a pas eu tort de la signaler. Le produit infini qui représente $B(p, p)$ ne subsiste pas pour p nul ou entier négatif; il en est de même de la série correspondante pour p entier négatif. M. Catalan a donc raison de demander que les dix dernières lignes du numéro 2 soient remplacées par un énoncé plus précis et moins long. Il suffirait de dire, par exemple : S *est convergente quel que soit* p, *sauf s'il est entier négatif; donc le produit indéfini est absolument convergent, sauf pour* p *nul ou entier négatif.*