



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et
des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.3:t.24 (1892): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/110935>

Article/Chapter Title: Rapport sur l'intégrale eulérienne de première
espèce par M. Beaupain

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 606, Page 607

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library

Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 25 November 2015 6:09 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045705300110935>

This page intentionally left blank.

Sur l'intégrale eulérienne de première espèce;
par J. Beaupain.

(*) *Rapport de M. Catalan, premier Commissaire.*

« Au n° 9 de son Mémoire, M. Beaupain écrit la formule:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{(a+x)\sin(a+x)\pi \sin \frac{a\pi}{2}}{a \cos(a+2x) \frac{\pi}{2} \sin a\pi} \sum_0^\infty (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1}{(k+x)(k-a-x)},$$

dans laquelle

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{1.2.3\dots k}.$$

Un simple changement de notation donne donc

$$B(p, q) = \frac{(p+q)\sin(p+q)\pi \sin \frac{p\pi}{2}}{p \cos(p+2q) \frac{\pi}{2} \sin p\pi} \times \sum_0^\infty (-1)^k \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k} \frac{1}{(k+q)(k-p-q)}. \quad (1)$$

Ce développement de l'intégrale $B(p, q)$ me semble *faux* ou *illusoire*.

D'abord, il n'est pas *symétrique*. Mais ce n'est pas tout. Si l'on prend le cas très simple de $p = 3, q = 2$, on trouve

$$\frac{1}{12} = \frac{5}{5} \frac{\sin 5\pi \sin \frac{5\pi}{2}}{\cos \frac{7\pi}{2} \sin 3\pi} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{3.2\dots(4-k)}{1.2.3\dots k(k+2)(k-5)}. \quad (2)$$

(*) Ne me sachant pas premier Commissaire, j'avais intitulé ce qui suit : *Remarques*, et non *Rapport*.

La vraie valeur de la fraction $\frac{\sin 5\pi}{\sin 3\pi}$ est $\frac{5}{3}$ (*). Ainsi

$$B(3, 2) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \frac{1}{0} \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{3 \cdot 2 \dots (4 - k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k(k+2)(k-5)}$$

Comment continuer? Comment réduire le second membre à $\frac{1}{12}$? Cette *pierre d'achoppement* ne me permet pas d'étudier, plus au long, le Mémoire de mon cher et très intelligent ancien élève.

En résumé, je pense que le manuscrit doit être renvoyé à l'Auteur, pour qu'il y fasse les corrections nécessaires (**).»

(*) Conclusion contestée par M. Beaupain. Sur ce point, il semble avoir raison.

(**) M. Beaupain a oublié, probablement, la formule très simple :

$$B(p, q) = \frac{1}{q} \prod_0^{\infty} \frac{(1 + \lambda)(p + q + \lambda)}{(p + \lambda)(1 + q + \lambda)}$$

qui donne, en particulier,

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \prod_0^{\infty} \frac{(1 + \lambda)(5 + \lambda)}{(3 + \lambda)(3 + \lambda)}$$

ou

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 8}{6 \cdot 6} \dots$$

Je crois devoir faire observer, en outre, que le Mémoire *Sur quelques formules de calcul intégral (1891)* , contient diverses fautes d'attention et de théorie.