Sur l'intégrale eulérienne de première espèce; par J. Beaupain.

(*) **Rapport de M. Catalan, premier Commissaire.**

« Au n° 9 de son Mémoire, M. Beaupain écrit la formule:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}=-\frac{(a+x)\sin(a+x)\pi\sin\frac{a\pi}{2}}{a\cos(a+2x)\frac{\pi}{2}\sin a\pi}\sum_0^\infty(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1}{(k+x)(k-a-x)},$$

dans laquelle

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Un simple changement de notation donne donc

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{B}(p,q)=-\frac{(p+q)\sin(p+q)\pi\sin\frac{p\pi}{2}}{p\cos(p+2q)\frac{\pi}{2}\sin p\pi}\times\\&\sum_0^\infty(-1)^k\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k}\frac{1}{(k+q)(k-p-q)}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Ce développement de l'intégrale B $(p,\ q)$ me semble *faux* ou *illusoire.*

D'abord, il n'est pas *symétrique.* Mais ce n'est pas tout. Si l'on prend le cas très simple de $p=3$, $q=2$, on trouve

$$\frac{1}{12}=-\frac{5}{3}\frac{\sin 5\pi\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{7\pi}{2}\sin 3\pi}\sum_0^\infty(-1)^k\frac{3.2\ldots(4-k)}{1.2.3\ldots k(k+2)(k-5)}.\quad(2)$$

(*) Ne me sachant pas premier Commissaire, j'avais intitulé ce qui suit : *Remarques,* et non *Rapport.*

La *vraie valeur* de la fraction $\frac{\sin 5\pi}{\sin 3\pi}$ est $\frac{5}{3}$(*). Ainsi

$$B(3,2) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \frac{1}{0} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{3.2\ldots(4-k)}{1.2.3\ldots k(k+2)(k-5)}.$$

Comment continuer ? Comment réduire le second membre à $\frac{1}{12}$? Cette *pierre d'achoppement* ne me permet pas d'étudier, plus au long, le Mémoire de mon cher et très intelligent ancien élève.

En résumé, je pense que le manuscrit doit être renvoyé à l'Auteur, pour qu'il y fasse les corrections nécessaires (**). »

(*) Conclusion contestée par M. Beaupain. Sur ce point, il semble avoir raison.

(**) M. Beaupain a oublié, probablement, la formule très simple :

$$B(p,q) = \frac{1}{q} \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(p+q+\lambda)}{(p+\lambda)(1+q+\lambda)},$$

qui donne, en particulier,

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2} \prod_0^\infty \frac{(1+\lambda)(5+\lambda)}{(3+\lambda)(3+\lambda)},$$

ou

$$\frac{1}{6} = \frac{1.5}{3.3} \cdot \frac{2.6}{4.4} \cdot \frac{3.7}{5.5} \cdot \frac{4.8}{6.6} \cdots$$

Je crois devoir faire observer, en outre, que le Mémoire *Sur quelques formules de calcul intégral* (1891), contient diverses fautes d'attention et de théorie.

—