This page intentionally left blank.

Sur une formule de M. Baschwitz; par E. Catalan, Associé de l'Académie.

Dans une Note présentée à l'Académie, M. Baschwitz donne la transformation exprimée par l'égalité

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots =$$
$$u_1 - \frac{u_2}{1+k_1} + \frac{u_3 - ku_2}{(1+k)^2} - \frac{u_4 - 2ku_3 + k^2u_2}{(1+k)^3} + \cdots; \quad . \quad . (1)$$

k étant une quantité *positive.* Mais l'honorable Auteur pense que cette formule subsiste généralement, même quand les deux séries sont divergentes. Je lui ai fait observer que, dans ce cas, les mots : *égales, équivalentes,...* n'ont pas de sens. N'ayant pu le convaincre, je crois devoir me borner à démontrer, d'une manière simple, la formule dont il s'agit, lorsque cette formule est *acceptable.*

I. Soit la série *convergente*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \mathrm{S} \quad . \quad . \quad . \quad . (2)$$

On a, identiquement,

$$1 = \frac{1}{(1+k)^u}\left[1 - \frac{k}{1+k}\right]^{-u}.$$

Donc

$$\mathrm{S} = u_1 - \frac{u_2}{1+u}\left[1 - \frac{k}{1+k}\right]^{-1} + \frac{u_3}{(1+u)^2}\left[1 - \frac{k}{1+k}\right]^{-2} - \ldots (3)$$

II. $\frac{k}{1+k}$ étant une *fraction proprement dite*, on a encore, par la formule du binôme,

$$\left.\begin{aligned}S=u_1-\frac{u_2}{1+k}\left[1+\frac{k}{1+k}+\frac{k^2}{(1+k)^2}+\frac{k_3}{(1+k)^3}+\cdots\right]\\+\frac{u_3}{(1+k)^2}\left[1+2\frac{k}{1+k}+3\frac{k^2}{(1+k)^2}+4\frac{k^3}{(1+k)^3}+\cdots\right]-\cdots\end{aligned}\right\} (4)$$

III. Admettons que les termes de la série double puissent être *groupés arbitrairement* (*). Rassemblant ceux qui contiennent, en dénominateur, une même puissance de I + k, nous aurons donc, en vertu de l'égalité (2) :

$$\left.\begin{aligned}u_1-u_2+u_3-4_4+\cdots=\\u_1-\frac{u_2}{1+k}+\frac{u_3-ku_2}{(1+k)^2}-\frac{u_4--2ku_3+k^2u_2}{(1+k)^3}+\cdots;\end{aligned}\right\}. \quad (A)$$

transformation trouvée par M. Baschwitz.

Encore une fois, ce *dérangement* dans l'ordre des termes peut conduire à des résultats absurdes.

En voici un exemple simple et *topique*.

Soit la formule connue :

$$l \cdot 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

Si l'on groupe ainsi les termes de la série :

$$\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\cdots\\\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\cdots\\\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}-\frac{1}{40}-\cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\end{array}$$

(*) Très souvent, cette hypothèse est inadmissible.

chaque série partielle a pour limite zéro. Donc

$$\mathcal{L}\cdot 2 = 0 : !!$$

Dans chaque cas particulier, une discussion est nécessaire.

IV. Pour simplifier cette formule (A), il suffit de poser :

$$u_1 = a_1, \qquad u_2 = ka_2, \qquad u_3 = k^2 a_3, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

On trouve, en effet,

$$a_1 - ka_2 + k^2 a_3 - k^3 a_4 + \cdots =$$
$$a_1 - \frac{k}{1+k} a_2 + \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 (a_3 - a_2) + \left(\frac{k}{1+k}\right)^3 (a_4 - 2a_3 + a_2) - \cdots;$$

ou, au moyen de la notation des *différences* :

$$a_1 - ka_2 + k^2 a_3 - \cdots =$$
$$a_1 - \left(\frac{k}{1+k}\right) a_2 + \left(\frac{k}{1+k}\right)^2 \Delta a_2 + \left(\frac{k}{1+k}\right)^3 \Delta^2 a_2 + \left(\frac{k}{1+k}\right)^4 \Delta^3 a_3 - \cdots; \quad (B)$$

formule due à Euler (*).

V. En particulier, si $k = 1$:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = u_1 - \frac{1}{2} u_2 + \frac{1}{4} \Delta u_2 - \frac{1}{8} \Delta^2 u_3 + \cdots (^{**}) \quad (C)$$

VI. Ayant oublié la relation (B), je dis à M. Baschwitz, dans une première lettre : « Vous avez généralisé une formule due à Euler. » On vient de voir que l'égalité (A) (supposée *acceptable*) est due aussi à ce grand Géomètre. M. Baschwitz n'a donc rien à regretter : il se trouve en excellente compagnie.

(*) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 254.

(**) *Traité élémentaire des séries*, p. 122.

P. S. — 25 novembre. — Dans une nouvelle lettre, reçue ce matin, M. Baschwitz prétend que sa transformation comprend, *comme cas particulier*, celle d'Euler.

La formule d'Euler est, d'après M. *Bertrand* :

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots =$$
$$u_0 + \frac{x}{1-x} u_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \Delta u_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \Delta^2 u_1 + \cdots$$

En augmentant d'une unité chacun des indices, nous avons donc :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + u_4 x^3 + \cdots = \\ u_1 + \dfrac{x}{1-x} u_2 + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2 \Delta u_2 + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3 \Delta^2 u_1 + \cdots \end{array}\right\} \quad (6)$$

La formule (1) de M. Baschwitz a été rapportée ci-dessus.

Dans cette formule (1), prenons

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = -a_2 x, \quad u_3 = a_3 x^2, \quad a_4 = -a_4 x^3, \cdots, \quad k = -x.$$

Elle devient

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots =$$
$$a_1 + \frac{a_2 x}{1-x} + \frac{a_3 x^2 + k a_2 x}{(1-x)^2} + \frac{a_4 x^3 + 2k a_3 x^2 + k^2 a_2 x}{(1-x)^3} + \cdots,$$

ou

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots =$$
$$a_1 + \frac{x}{1-x} a_2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \Delta a_2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \Delta^2 a_2 + \cdots;$$

ce qui est la formule (6).