Biodiversity Heritage Library

http://www.biodiversitylibrary.org/

Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.3:t.13 (1887): http://www.biodiversitylibrary.org/item/110091

Article/Chapter Title: Remarques sur une équation trinôme
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 414, Page 415, Page 416, Page 417

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library
Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 24 November 2015 3:21 AM
http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045660500110091

This page intentionally left blank.

temps, on voit qu'il n'est pas absolument exact de dire que les molécules d'un corps prennent l'arrangement correspondant au volume qu'elles peuvent occuper aussitôt que ce dernier est réalisé; mais on peut comprimer un corps sans changer son état si la durée de la compression n'est pas très grande. Cette remarque nous paraît avoir une grande importance; elle explique un certain nombre de résultats négatifs encore inédits, obtenus par l'un de nous, par exemple, la non-transformation du sulfure noir de mercure en sulfure rouge, même par une pression de 10000 atmosphères.

L'examen de cette partie de la question sera complété plus tard.

Remarques sur une équation trinôme; par E. Catalan, associé de l'Académie.

1. Soit l'équation

$$X = x^{2k} + x^k + 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dans laquelle $k = 2^{n-1}$.

On en déduit

$$x^k = \cos\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{3}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

après quoi l'on peut tirer, de cette formule (2), les valeurs des $2k$ racines. Mais il est plus intéressant de décomposer X en facteurs trinômes.

2. A cet effet, j'observe que si l'on pose, pour abréger,

$$P_n = x^{2k} - x^k + 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

on a, par des multiplications successives,

$$X = (x^2 + x + 1)\, P_1 \,.\, P_2 \,.\, P_3 \dots P_{n-1} \text{ (*)}. \quad . \quad . \quad (4)$$

Ainsi, le problème est réduit à la résolution des n équations

$$x^2 + x + 1 = 0,\ P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ \dots,\ P_{n-1} = 0.$$

3. A cause de $X = P_n + 2x^k$, l'*identité* (4) peut être remplacée par

$$P_n = -\,2x^k + (x^2 + x + 1)\, P_1 \,.\, P_2 \,.\, P_3 \dots P_{n-1}. \quad . \quad (5)$$

Celle-ci exprime la *loi de récurrence* des polynômes $P_1, P_2, \dots P_{n-1}, P_n$.

Il en résulte cette propriété :

Les polynômes $x^2 + x + 1$, P_1, P_2, $P_3, \dots$ P_{n-1}, $P_n, \dots$, *sont premiers entre eux, deux à deux.*

Soit, par exemple, $n=9$. Si P_9 et P_5 avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $2x^k$; ce qui est impossible.

4. Si l'on remplace x par un nombre entier a, on a donc ce théorème d'arithmétique :

Les nombres entiers

$$a^2 + a + 1,\ \ a^2 - a + 1,\ \ a^4 - a^2 + 1,\ \ a^8 - a^4 + 1,\ \ a^{16} - a^8 + 1,\ \cdots$$

sont premiers entre eux, deux à deux (**).

5. L'égalité (1) peut être écrite ainsi :

$$\frac{X}{x^2 + x + 1} = \frac{(x^{3k} - 1)(x - 1)}{(x^k - 1)(x^3 - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(*) *Sur un tableau numérique, et sur son application à certaines transcendantes.*

(**) Ces nombres sont *impairs, premiers avec* a, *premiers avec* $a-1$, etc. (*Sur un tableau numérique,...* 19).

D'après une propriété connue (*), le quotient de X, par x^2+x+1, a tous ses coefficients égaux à $+1$, -1 ou zéro. En d'autres termes :

Dans le produit

$$P = P_1 P_2 P_3 \ldots P^n \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

les coefficients sont $+1$, -1 *ou zéro.*

6. Cette propriété est démontrable directement, d'une manière fort simple.

Pour le faire voir, supposons que, dans l'*identité* (1), x soit une variable inférieure à l'unité, et faisons croître indéfiniment n. Nous aurons

$$1 = (1 + x + x^2)\, P_1 P_2 P_3 \ldots P_n \,.\, P_{n+1} \ldots, \; (^{**})$$

ou

$$\frac{1-x}{1-x^3} = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n P_{n+1} \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ou encore,

$$P_1 P_2 P_3 \ldots P_n P_{n+1} \ldots = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \cdots \; (9)$$

Cela posé, d'après les formules (7), (3), le produit P se termine par

$$x^{2+4+8+\ldots+2k} = x^{2(2k-1)};$$

de sorte que le *terme du milieu* contient x^{2k-1}. Or,

$$P_{n+1} = 1 - x^{2k} + 2^{4k}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) *Remarques sur l'équation* $x^m - 1 =$. (*Bulletin de l'Académie*, février 1870, p. 184.)

(**) Cette *identité*, qui devient évidente par les multiplications successives, en rappelle une autre, due à Euler. (*Introduction à l'Analyse*, p. 234.)

donc *la multiplication de* P, *par* P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}..., *ne donnera pas de termes semblables à ceux qui composent la première moitié de* P. Autrement dit, *cette première moitié* (y compris le terme du milieu) *est identique avec le second membre de l'égalité* (9), *limité au terme en* x_{2k-1}. Enfin, le polynôme P est, évidemment, *symétrique* ou *réciproque*, etc.

7. En vertu de cette réciprocité, on peut, au moyen de la série

$$1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+x^{12}-x^{13}+x^{15}-x^{16}+x^{18}-x^{19}+\ldots,$$

former, *à vue*, le produit P.

Par exemple :

$$P_1P_2=1-x+x^3-x^5+x^6,$$

$$P_1P_2P_3=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^8-x^{10}+x^{11}-x^{13}+x^{14},$$

$$P_1P_2P_3P_4=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+x^{12}-x^{13}+x^{15}$$
$$-x^{17}+x^{18}-x^{20}+x^{21}-x^{23}+x^{24}-x^{26}+x^{27}-x^{29},$$
$$+x^{30};$$

etc.

Sur la circulation céphalique croisée, ou échange de sang carotidien entre deux animaux : Communication préliminaire; par Léon Fredericq, correspondant de l'Académie.

Je prends deux chiens ou deux très grands lapins A et B, convenablement anesthésiés. Sur tous deux, je lie les vertébrales et je prépare les carotides. Sur tous deux, l'une des carotides, celle de droite, par exemple, est coupée en travers; puis je relie le bout central, cardiaque de la