This page intentionally left blank.

Sur le dernier théorème de Fermat; par E. Catalan, associé de l'Académie.

En 1884, M. de Jonquières a publié, sous ce titre (*), une très intéressante Note, contenant ce remarquable théorème :

Soient trois nombres entiers, a, b, c, *premiers entre eux, deux à deux, et vérifiant l'équation*

$$a^n + b^n = c^n \text{ (**)} :$$

1° a *et* b *ne peuvent être, simultanément, premiers ;*
2° *Si* a, *supposé inférieur à* b, *est premier,*

$$c = b + 1.$$

En suivant la voie indiquée par M. de Jonquières, on peut trouver d'autres *contributions* au théorème de Fermat. Afin de prendre date, j'énoncerai les propriétés suivantes (***).

I. $$a - 1 = \mathfrak{M}(n).$$

II. $$a^n - 1 = \mathfrak{M}(nb).$$

III. *Tout diviseur premier, de* c — a, *divise* a — 1.

IV. a + b *et* c — a *sont premiers entre eux.*

(*) *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei* (20 janvier 1884, Rome).

(**) Dans tout ce qui va suivre, l'*exposant* n *est premier et supérieur à* 3.

(***) Dans les neuf premières, *a* est supposé premier.

V. $2a - 1$ *et* $2b + 1$ *sont premiers entre eux.*

VI. *Le nombre premier*, a (*), *est compris entre*

$$\sqrt[n]{nb^{n-1}} \quad et \quad \sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}}.$$

VII. a *et* b *surpassent* n.

VIII. *Le nombre* b, *qui satisfait à l'équation*

$$(b+1)^n - b^n = a^n,$$

est compris entre

$$a\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}} \quad et \quad -1 + a\sqrt[n-1]{\frac{a}{n}}.$$

IX. *Soit* b *un nombre entier, supérieur au nombre entier* n. *Entre*

$$\sqrt[n]{nb^{n-1}} \quad et \quad \sqrt[n]{n(b+1)^{n-1}},$$

il y a, tout au plus, un nombre entier.

X. *Aucun des nombres*

$$a + b, \quad c - a, \quad c - b$$

n'est premier.

XI. *Chacun d'eux a la forme* N, *ou la forme* $\frac{1}{n}$ N, N *étant un nombre entier.*

XII. *Soient, s'il est possible :*

$$a + b = c'^n, \quad c - a = b'^n, \quad c - b = a'^n;$$

alors

$$c = \mathfrak{M}(n).$$

(*) S'il existe.

XIII. 1° $(x + y)^n - x^n - y^n = nxy\,(x + y)\,P;$

$$P = H_1\,x^{n-3} + H_2\,x^{n-4}\,y + \cdots + H_1\,y^{n-3}.$$

2° *Les coefficients sont donnés par la formule*

$$H_p = \frac{1}{n}\left[C_{n-1,\,p} \pm 1\right],$$

le signe $+$ *répondant au cas où* p *est pair.*

3° *Le polynôme* P *est divisible par*

$$x^2 + xy + y^2\ (^*).$$

XIV. *La différence des puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *de deux nombres entiers consécutifs,*

$$a, \quad a + 1,$$

étant diminuée de 1, *est divisible par*

$$na\,(a + 1)\,(a^2 + a + 1)\ (^{**}).$$

XV. *Si, dans l'équation de Fermat, le nombre* a *est premier, on a, par le théorème de M. de Jonquières,*

$$a^n - 1 = \mathcal{M}\left[nb\,(b + 1)\,(b^2 + b + 1)\right].$$

XVI. c *est compris entre*

$$a + b \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}(a + b).$$

(*) Et même par

$$(x^2 + xy + y^2)^2,$$

si

$$n = \mathcal{M}\,(6) + 1.$$

Cauchy, *Journal de Liouville*, tome V, page 213.

(**) Les facteurs

$$a, \quad a + 1, \quad a^2 + a + 1$$

sont premiers entre eux, deux à deux. En outre, le troisième égale le produit des deux autres, augmenté de 1.

—