This page intentionally left blank.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur une classe d'équations différentielles; par E. Catalan, Associé de l'Académie.

I. Dans la première *Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques,* j'ai fait observer que l'intégrale générale de l'équation *classique*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1-x^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

est réductible à la forme

$$y=\mathrm{E}(x)\left[\lambda\int\frac{dx}{x\,[\mathrm{E}(x)]^2}+\mu\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dans cette égalité, λ, μ sont les constantes arbitraires, et

$$\mathrm{E}(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}=\mathrm{E}_1(x).$$

Il résulte, de la formule (2), que l'équation (1) peut être transformée d'une manière simple et remarquable.

Posons, en effet,

$$y=\frac{z}{\sqrt{x}},\quad \sqrt{x}\;\mathrm{E}(x)=\mathrm{X}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

nous aurons

$$z=\mathrm{X}\left[\lambda\int\frac{dx}{\mathrm{X}^2}+\mu\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

puis, en divisant par X et en différentiant deux fois :

$$\frac{z''}{z} = \frac{X''}{X} \text{(*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

II. *Remarques.* 1° X étant une fonction *quelconque*, l'intégrale générale de l'équation (5) est donnée par la formule (4). On vérifie directement ce fait en observant qu'une intégrale particulière est

$$z_1 = X,$$

et en appliquant la méthode connue (**).

2° Une seconde intégrale particulière est, évidemment,

$$z_2 = X \int \frac{dx}{X^2} \text{(***)}.$$

III. Il n'est pas inutile de vérifier que

$$y = E(x)\left[\lambda \int \frac{dx}{x\,[F(x)]^2} + \mu\right], \quad \ldots \quad (2)$$

est l'intégrale générale de l'équation (1).

Pour plus de clarté dans le calcul, remplaçons, suivant l'usage, x par c, de manière que

$$\frac{y}{E(c)} = \lambda \int \frac{dc}{c\,[E(c)]^2} + \mu;$$

(*) Dans le tome V de la *Nouvelle Correspondance mathématique* (p. 331), j'ai ramené, à cette forme, une équation assez complexe, proposée par M. *Escary*.

(**) *Inventée*, ou du moins très heureusement employée par l'illustre Sturm, dans ses Mémoires sur la théorie de la chaleur. Il en a déduit son célèbre théorème.

(***) Ce qui précède remonte à 1879.

ou, sous forme abrégée :

$$\frac{y}{\mathrm{E}} = \lambda \int \frac{dc}{c\,\mathrm{E}^2} + \mu \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Les deux premières dérivées de cette équation sont

$$c\,(\mathrm{E}\,y' - y\,\mathrm{E}') = \lambda,$$

$$c\,\mathrm{E}\,y'' + \mathrm{E}\,y' - (c\,\mathrm{E}'' + \mathrm{E}')\,y = 0. \quad \ldots \quad (7)$$

On sait que

$$\mathrm{E}' = \frac{1}{c}[\mathrm{E} - \mathrm{F}], \quad \mathrm{F}' = \frac{\mathrm{E} - b^2\mathrm{F}}{b^2 c}\ (^*);$$

donc

$$\mathrm{E}'' = \frac{1}{c}[\mathrm{E}' - \mathrm{F}'] - \frac{1}{c^2}[\mathrm{E} - \mathrm{F}], \; c\mathrm{E}'' + \mathrm{E}' = \mathrm{E}' - \mathrm{F}' = -\frac{c}{b^2}\mathrm{E}.$$

La substitution dans (7) donne, après suppression du facteur commun E :

$$c y'' + y' + \frac{c}{b^2} y = 0;$$

ce qui ne diffère pas de l'équation (1).

IV. Si l'on veut, de la transformée (5), revenir à la proposée (1), on doit faire $z = y\sqrt{x}$. On trouve

$$\frac{4x^2y'' + 4xy' - y}{4x^2y} = \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

A cause de $\mathrm{X} = \sqrt{x}\,\mathrm{E}(x)$, cette équation paraît contradictoire avec l'équation (1). Mais un calcul semblable au précédent donne

$$\frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} = -\frac{1 + 3x^2}{4(1 - x^2)x^2}; \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

(*) Legendre, tome I, pp. 66 et 67.

puis

$$4x^2(1-x^2)\,y''+4x\,(1-x^2)y'-(1-x')y+(1+3x^2)y=0;$$

etc.

Ainsi, la fonction $\frac{X''}{X}$, au lieu d'être transcendante, est *algébrique et rationnelle.* Cela devait arriver; car deux équations différentes ne peuvent avoir même intégrale générale.

V. Lorsque $X=\sqrt{x}\,E(x)$, l'équation (5) est donc

$$\frac{z''}{z}+\frac{1+3x^2}{4\,(1-x^2)\,x^2}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Cette transformée de l'équation (1), plus simple que celle-ci, a pour intégrale, comme on l'a vu :

$$z=X\left[\lambda\int\frac{dx}{X^2}+\mu\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

VI. *Généralisation.* L'équation (5) est comprise dans cette autre :

$$X^2z''+kXX'z'-\left[XX''+kX'^2\right]z=0; \quad . \quad (11)$$

k désignant une constante donnée.

En l'écrivant ainsi :

$$\frac{Xz''-X''z}{Xz'-X'z}+k\frac{X'}{X}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

on reconnaît qu'une intégrale première est

$$(Xz'-Xz)\,X^k=A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

L'intégrale générale a donc pour expression

$$z = X\left[A\int\frac{dx}{X^{\lambda+2}} + B\right] (*) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

VII. Sauf le cas où X est un monôme, la méthode précédente ne semble point applicable à l'équation

$$\frac{z^{(p)}}{z} = \frac{X^{(p)}}{X}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

p surpassant 2.

Mais soit $X = x^n$; et, par conséquent,

$$\frac{z^{(p)}}{z} = n(n-1)\cdots(n-p+1)\,x^{-p}. \quad . \quad . \quad (16)$$

Si l'on essaie

$$z = x^\lambda,$$

on trouve

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-p+1) = n(n-1)\cdots(n-p+1). \quad (17)$$

Cette équation *algébrique*, du degré p, dont la discussion est intéressante, est vérifiée par

$$\lambda = n\,(**);$$

et, lorsque p est *pair*, par

$$\lambda = -(n-p+1).$$

L'intégrale générale de l'équation (15) (***) est donc, si p

(*) On arrive à la même conclusion en observant que l'équation (11) est vérifiée par $z = X$.

(**) L'existence de cette racine était évidente *a priori*.

(***) Equation *linéaire*, à *coefficients constants*.

est *pair* :

$$z = Ax^n + Bx^{p-n-1} + A_1 x^{\lambda_1} + \cdots + A_{p-2} x^{\lambda_{p-2}}; \quad (18)$$

et, si p est *impair* :

$$z = Ax^n + A_1 x^{\lambda_1} + \cdots + A_{p-1} x^{\lambda_{p-1}}. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

VIII. *Application.* Soient $n = 3$, $p = 4$; auquel cas l'équation (16) devient

$$\frac{z^{\text{IV}}}{z} = \frac{9.8.7.6}{x^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

L'équation auxiliaire (17) est

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 3\,024,$$

ou

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda - 3\,024 = 0.$$

Elle a pour racines :

$$9, -6, \ \frac{1}{2}(3 + \sqrt{215}\sqrt{-1}), \frac{1}{2}(3 - \sqrt{215}\sqrt{-1}).$$

L'intégrale générale de l'équation (20) est donc

$$z = Ax^9 + Bx^{-6} + \left[A_1 x^{\frac{\sqrt{215}}{2}\sqrt{-1}} + A_2 x^{-\frac{\sqrt{215}}{2}\sqrt{-1}}\right] x^{\frac{3}{2}};$$

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$z = Ax^9 + Bx^{-6} + Cx^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{215}}{2}\, \mathcal{L}.\alpha x\right) (*) \quad . \quad (21)$$

(*) Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\sqrt{215}}{2} = m,$$

les quatre premières dérivées de :

$$z_1 = x^{\frac{2}{3}} \sin(m\, \mathcal{L}.\,\alpha x)$$

Addition.

IX. M. De Tilly m'écrit (*) qu'il sait intégrer

$$\frac{z^{(p)}}{z} = \mathrm{A}x^{m},$$

m étant *quelconque*. C'est là un très grand progrès. En effet, la méthode de Kummer (**), fort ingénieuse, exige des transformations longues et pénibles; et, jusques dans ces derniers temps, j'ai cru que l'intégrale de la simple

---

sont :

$$z^{\mathrm{I}}_1 = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin(m \mathcal{L}.\, \alpha x) + m x^{\frac{1}{2}} \cos(m \mathcal{L}.\, \alpha x),$$

$$z^{\mathrm{II}}_1 = \left(\frac{3}{4} - m^2\right) x^{-\frac{1}{2}} \sin(m \mathcal{L}.\, \alpha x) + 2m\, x^{-\frac{1}{2}} \cos(m \mathcal{L}.\, \alpha x),$$

$$z^{\mathrm{III}}_1 = -\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}m^2\right) x^{-\frac{3}{2}} \sin(m \mathcal{L}.\, \alpha x) - \left(\frac{1}{4}m + m^3\right) x^{-\frac{3}{2}} \cos(m \mathcal{L}.\, \alpha x),$$

$$z^{\mathrm{IV}}_1 = \left(\frac{9}{16} + \frac{5}{2}m^2 + m^4\right) x^{\frac{5}{2}} \sin(m \mathcal{L}.\, \alpha x).$$

Egalant, à

$$3024\, x^{-\frac{5}{2}} \sin(m \mathcal{L}.\, \alpha x),$$

cette dernière expression, on a donc

$$m^4 + \frac{5}{2}m^2 - \frac{48\,375}{16} = 0;$$

d'où, en négligeant les racines imaginaires,

$$m^2 = \frac{215}{4};$$

etc.

Spa, 29 juin 1886.

(*) Lettre du 4 juillet.

(**) *Journal de Liouville*, tome IV.

équation

$$\frac{z^{(p)}}{z} = x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

ne pouvait être exprimée que par des intégrales définies. Voici, en peu de mots, le résultat auquel je suis parvenu, il y a quelques années.

Soit θ_1 *une racine primitive de l'équation binôme* $x^{p+1} - 1 = 0$. L'*équation* (22) *est vérifiée par*

$$z_1 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^{p+1}}{p+1}} \left(e^{\alpha x} + e^{\alpha \theta_1 x} + \cdots + e^{\alpha \theta_p x}\right) d\alpha \, . \quad . \quad (23)$$

Conséquemment, l'intégrale générale est la somme de p *intégrales définies, respectivement multipliées par des constantes.*

X. *Remarque*. Soit $p = 1$. L'intégrale générale de

$$\frac{z'}{z} = x$$

serait donc

$$z = A \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) d\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Or, cette intégrale est

$$z = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi l'on doit avoir

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) dx = ke^{\frac{x^2}{2}}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve $k = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})\, d\alpha = \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{x^2}{2}}; \quad . \quad . \quad (25)$$

formule connue.

Dans le cas général, la comparaison de la valeur de z, déduite de la formule (23), avec celle qui résulte de la méthode due à mon savant Confrère, fera connaître de nouvelles intégrales définies.

Spa, 15 juillet 1886.

Essai sur l'origine des raies de Fraunhofer, en rapport avec la constitution du Soleil ; par Ch. Fievez, chargé de cours à l'Université de Liège.

J'ai discuté, dans un travail précédent (1), les diverses causes capables d'altérer les caractères des raies spectrales. D'une série d'expériences conduites de manière à ne faire varier qu'une à une toutes les conditions dans lesquelles les altérations se produisent, j'ai cru pouvoir conclure qu'un accroissement de complexité dans la constitution d'une raie est un indice d'accroissement de la température de la vapeur émissive.

Depuis lors, d'autres expériences ont jeté quelques doutes sur la rigueur de cette conclusion et je me suis

---

(1) *De l'influence de la température sur les caractères des raies spectrales.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3e série, t. VII.)