



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et
des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.3:t.7 (1884): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/110084>

Article/Chapter Title: Quelques théorèmes d'arithmétique

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 448, Page 449

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library

Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 20 November 2015 4:42 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045556500110084>

This page intentionally left blank.

Quelques théorèmes d'arithmétique; par E. Catalan (),
Associé de l'Académie.*

THÉORÈME I. (Théorème de Lionnet (**).) *Soit*

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p,$$

p étant un nombre entier, plus grand que zéro. Si le nombre n, supérieur à p + 1, est premier, il divise S_p.

THÉORÈME II. *Si n + 1 est un nombre premier, supérieur à p + 1, il divise S_p.*

THÉORÈME III. *Si n est un nombre premier, la quantité S_{n-1} est un multiple de n, diminué de l'unité.*

THÉORÈME IV. *Si n est un nombre premier, supérieur à 2, et tel que n — 1 ne divise point p, S_p est multiple de n.*

THÉORÈME V. *Si n est un nombre premier, supérieur à 2, et tel que n — 1 divise p, S_p est un multiple de n, diminué de l'unité.*

THÉORÈME VI. *Soit n = a^αb^βc^γ..., a, b, c, étant premiers, inégaux et impairs :*

1° *Si aucun des nombres a — 1, b — 1, c — 1.. ne divise p, S_p est divisible par n;*

2° *Dans le cas contraire, S_p n'est pas divisible par n.*

THÉORÈME VII. *Si n est un nombre premier, supérieur à 2, et tel que n — 1 ne divise point p + p', la quantité*

$$S = 1^p (n - 1)^{p'} + 2^p (n - 2)^{p'} + \dots + (n - 1)^p 1^{p'}$$

est multiple de n.

(*) Cette Note, destinée au *Bulletin*, contient seulement les énoncés. Les démonstrations seront imprimées ultérieurement.

(**) En 1842, M. Lionnet, alors Professeur au collège Louis le Grand, publia, dans le premier volume des *Nouvelles Annales de mathématiques*, le théorème auquel nous croyons devoir donner le nom de notre vénérable ancien Collègue.

THÉORÈME VIII. Si n est un nombre premier, supérieur à 2, et tel que $n - 1$ divise $p + p'$, S est un multiple de n , diminué de $(-1)^{p'}$.

THÉORÈME IX. Si n est un nombre impair, et que p, p' soient de parités contraires, n divise S .

THÉORÈME X (*). n, k étant des nombres entiers, et x un nombre quelconque :

$$\begin{aligned} [E(x)]^k + \left[E\left(x + \frac{1}{n}\right) \right]^k + \dots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \right]^k \\ = (n-p)[E(x)]^k + p[1 + E(x)]^k (**). \end{aligned}$$

COROLLAIRE. Si x est compris entre zéro et un :

$$[E(x)]^k + \left[E\left(x + \frac{1}{n}\right) \right]^k + \dots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \right]^k = E(nx).$$

THÉORÈME XI. Si le nombre entier n croît indéfiniment, la quantité

$$\frac{1}{n} \left[x^p + \left(x + \frac{1}{n}\right)^p + \dots + \left(x + \frac{n-1}{n}\right)^p \right]$$

tend vers

$$\frac{1}{p+1} [(x+1)^{p+1} - x^{p+1}].$$

COROLLAIRE. Si n croît indéfiniment, la quantité

$$\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$$

tend vers $\frac{1}{p+1}$.

(*) Généralisation d'un théorème de M. Hermite, que l'illustre Géomètre a bien voulu me communiquer.

(**) Dans cette égalité, on suppose

$$a + \frac{p}{n} \leq x < n + \frac{p+1}{n};$$

a étant un nombre entier.