This page intentionally left blank.

Quelques théorèmes d'arithmétique; par E. Catalan (*), Associé de l'Académie.

Théorème I. (Théorème de Lionnet (**).) *Soit*

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

p *étant un nombre entier, plus grand que zéro. Si le nombre* n, *supérieur à* p + 1, *est premier, il divise* S_p.

Théorème II. *Si* n + 1 *est un nombre premier, supérieur à* p + 1, *il divise* S_p.

Théorème III. *Si* n *est un nombre premier, la quantité* S_{n-1} *est un multiple de* n, *diminué de l'unité.*

Théorème IV. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *ne divise point* p, S_p *est multiple de* n.

Théorème V. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *divise* p, S_p *est un multiple de* n, *diminué de l'unité.*

Théorème VI. *Soit* $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, a, b, c, *étant premiers, inégaux et impairs :*

1° *Si aucun des nombres* a — 1, b — 1, c — 1.. *ne divise* p, S_p *est divisible par* n;

2° *Dans le cas contraire,* S_p *n'est pas divisible par* n.

Théorème VII. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, *et tel que* n — 1 *ne divise point* p + p', *la quantité*

$$S = 1^p (n-1)^{p'} + 2^p (n-2)^{p'} + \cdots + (n-1)^p 1^{p'}$$

est multiple de n.

(*) Cette Note, destinée au *Bulletin*, contient seulement les énoncés. Les démonstrations seront imprimées ultérieurement.

(**) En 1842, M. Lionnet, alors Professeur au collège Louis le Grand, publia, dans le premier volume des *Nouvelles Annales de mathématiques*, le théorème auquel nous croyons devoir donner le nom de notre vénérable ancien Collègue.

THÉORÈME VIII. *Si* n *est un nombre premier, supérieur à* 2, et *tel que* n — 1 *divise* p + p′, S *est un multiple de* n, *diminué de* $(-1)^{p'}$.

THÉORÈME IX. *Si* n *est un nombre impair, et que* p, p′ *soient de parités contraires,* n *divise* S.

THÉORÈME X (*). n, k *étant des nombres entiers, et* x *un nombre quelconque :*

$$\left[E(x)\right]^k + \left[E\left(x + \frac{1}{n}\right)\right]^k + \cdots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right]^k$$
$$= (n-p)\left[E(x)\right]^k + p\left[1 + E(x)\right]^k \text{ (**)}.$$

COROLLAIRE. *Si* x *est compris entre zéro et un :*

$$\left[E(x)\right]^k + \left[E\left(x + \frac{1}{n}\right)\right]^k + \cdots + \left[E\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right]^k = E(nx).$$

THÉORÈME XI. *Si le nombre entier* n *croît indéfiniment, la quantité*

$$\frac{1}{n}\left[x^p + \left(x + \frac{1}{n}\right)^p + \cdots + \left(x + \frac{n-1}{n}\right)^p\right]$$

tend vers

$$\frac{1}{p+1}\left[(x+1)^{p+1} - x^{p+1}\right].$$

COROLLAIRE. *Si* n *croît indéfiniment, la quantité*

$$\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^p$$

tend vers $\frac{1}{p+1}$.

(*) Généralisation d'un théorème de M. Hermite, que l'illustre Géomètre a bien voulu me communiquer.

(**) Dans cette égalité, on suppose

$$a + \frac{p}{n} \leqq x < n + \frac{p+1}{n};$$

a étant un nombre entier.