This page intentionally left blank.

Bewegung der Erdaxe; — b) Douze tables pour le calcul des réductions stellaires; par F. Folie. Bruxelles, 1883; 2 vol. in-4°;

3° *Zur Theorie der dynamoelectrischen Maschinen;* par R. Clausius, associé. Leipzig; extr. in-8°;

4° *Essai de physique comparée;* par P. De Heen (ouvrage couronné par la Classe en 1882). Extr. in-8°;

5° *Le déterminisme et la science rationnelle;* par J. Putsage. 1re partie : Le monde physique; 2e partie : Le problème moral. 2 extr. in-8°.

— M. Boset, ancien professeur à l'Athénée royal de Bruxelles, sera, sur sa demande, remis en possession de son travail relatif aux *courbes et surfaces focales,* présenté à la séance du 13 octobre dernier, et sur lequel il n'a pas encore été fait de rapport.

JUGEMENT DU CONCOURS ANNUEL.

Rapport de M. E. Catalan.

« L'Académie a reçu deux Mémoires en réponse à la deuxième Question, ainsi conçue :

Prouver l'exactitude ou la fausseté de la proposition suivante, avancée par Fermat.

Décomposer un cube en deux autres cubes, une quatrième puissance et généralement une puissance quelconque en deux puissances du même nom, au-dessus de la seconde puissance, est une chose impossible.

De ces Mémoires, l'un est accompagné de la devise : *Les nombres ont toujours été l'objet d'une légitime curiosité;* l'autre porte celle-ci : *Les sciences rapprochent les nations.*

I.

L'Auteur du premier travail, au moyen d'une transformation ingénieuse, ramène l'équation *trinôme*

$$x^m + y^m = z^m,$$

à l'équation *binôme*

$$u^m = m\alpha\beta q,$$

dans laquelle α, β, q sont des nombres entiers, premiers entre eux, deux à deux.

Malheureusement, ayant à diviser (*)

$$T = t^{m-1} + at^{m-2} + a^2t^{m-3} + \cdots + a^{m-1},$$

par $t - a$, il trouve, comme *quotient*,

$$t^{m-2} + at^{m-3} + a^2t^{m-4} + \cdots + a^{m-2},$$

et, comme *reste*, $2a^{m-1}$. Le véritable reste étant ma^{m-1} (**), cette proposition :

Si t — a *est divisible par* m, *le polynôme* T *ne peut l'être;* cette proposition, disons-nous, tombe, et entraîne, avec elle, toute la suite du Mémoire.

(*) Page 4.

(**) Comment l'Auteur ne s'est-il pas rappelé la formule

$$f(t) = (t - a)\,Q + f(a)\,?$$

II.

Le second manuscrit se compose d'environ 120 pages, très défectueuses au point de vue calligraphique, et, par conséquent, fort pénibles à lire (*). Signalons les parties principales de ce volumineux travail.

THÉORÈME. *La suite des nombres premiers* p, *de la forme* $2kn + 1$, *est illimitée, quel que soit le nombre premier* n (p. 11).

THÉORÈME. *Les nombres premiers, de la forme* $2kn+1$, *dans lesquels* n *est un nombre composé ..., forment une suite illimitée* (p. 49).

Ces deux propositions sont comprises dans le théorème énoncé par Legendre, et démontré par Dirichlet (*Journal de Liouville*, 1839). De plus, la première se rencontre dans les *Exercices d'analyse numérique*, par Lebesgue (p. 91).

THÉORÈME. *Tous les résidus des puissances* n$^{\text{ièmes}}$ *des nombres, par rapport à un nombre premier* p, *de la forme* $2kn+1$, *sont exprimés par les puissances d'un même nombre* (p. 23).

Cette proposition, par laquelle l'Auteur aurait pu commencer, réduit la *théorie des résidus* de

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n, \ldots,$$

à la *théorie des résidus* de

$$1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3, \ldots$$

(*) Si l'Auteur, comme on peut le supposer, *refait* son Mémoire, il devra tâcher d'en enlever les détails inutiles, les propositions et les démonstrations connues; et de le *rédiger*, en outre, de manière qu'il puisse être *livré à l'imprimeur*.

Or, celle-ci a été donnée par Gauss.

THÉORÈME. *Les* 2k *résidus des puissances* n^ièmes *des nombres, par rapport à* $p = 2kn + 1$, *peuvent toujours* (en désignant par r un diviseur premier quelconque de $2k$) *former* $\frac{2k}{r}$ *groupes; chaque groupe contenant* r *résidus, dont la somme est un multiple de* p (p. 36).

III.

Le dernier théorème, bien remarquable, est-il nouveau? Je ne le pense pas (*).

Quoi qu'il en soit, l'auteur croit pouvoir en déduire l'impossibilité de l'équation

$$x^n + y^n = z^n.$$

Voici comment :

Si l'on suppose $r = 3$, le théorème prend la forme suivante :

Les 2k *résidus des puissances* n^ièmes *des nombres*

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,$$

par rapport à $p = 2kn + 1$, *peuvent toujours être groupés en sommes ternaires* (**), *égales à des multiples de* p. (A).

Soit maintenant

$$a^n + b^n = c^n;$$

et soit p un nombre premier, qui ne divise ni a, ni b, ni c.

(*) Il rappelle certaines propriétés des résidus de

$$1, a, a^2, \ldots,$$

ou propriétés *des fractions décimales périodiques.* (Voir, par exemple, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome I.)

(**) Expression adoptée par l'Auteur.

De

$$a^n = \mathfrak{M}.p + \alpha, \quad b^n = \mathfrak{M}.p + \beta, \quad c^n = \mathfrak{M}.p + \gamma,$$

on tire

$$\alpha^n + b^n - c^n = 0 = \mathfrak{M}.p + (\alpha + \beta - \gamma);$$

puis

$$\alpha + \beta + (p - \gamma) = \mathfrak{M}.p.$$

Or, $p-\gamma$ est le résidu de $(p-c)^n$.

En conséquence :

Soit, s'il est possible, $a^n + b^n = c^n$. *Soit* $p = 2kn + 1$. *Si* p *ne divise ni* a, *ni* b, *ni* c; *ce nombre* p, *supposé premier, donne lieu à une somme ternaire, multiple de* p (*).

De cette propriété (évidente *a priori*), l'auteur conclut la proposition suivante :

Si, pour une infinité de nombres premiers p, *de la forme* $2kn+1$, *il n'y a pas de sommes ternaires, multiples de* p, *l'équation* $x^n + y^n = z^n$ *est impossible en nombres entiers* (**). (B).

« Car (dit l'Auteur), x, y, z, devraient alors avoir le
» nombre p en *quantité infinie* (?) pour diviseur; ce qui
» ne peut avoir lieu, x, y, z étant des nombres finis, déter-
» minés. »

Le raisonnement est spécieux, mais il ne me convainc pas (***). Voici pourquoi : l'Auteur, après avoir établi que *Si* $p = \alpha kn + 1$, *les résidus de*

$$1^n, \quad 2^n, \quad 3^n, \ldots$$

forment des sommes ternaires, multiples de p, n'a pas

(*) Énoncé équivalent à celui de la page 61.

(**) Énoncé équivalent à celui de la page 62.

(***) Pourquoi l'Auteur n'a-t-il point appliqué sa méthode à quelque équation particulière, par exemple à

$$x^7 + y^7 = z^7\,?$$

démontré la proposition suivante, complémentaire de la première (mais peut-être inexacte) :

Pour toute autre forme du nombre premier p, *les résidus ne peuvent former des sommes ternaires, multiples de* p.

Dès lors, comment peut-il, de (A), conclure (B)?

Du reste, il ne paraît pas convaincu, lui-même, de l'excellence de sa démonstration. On lit, en effet, à la p. 86 :

« Il résulte d'une note du père pépin, insérée dans les
» comptes rendus des séances de l'Institut de france,
» tome XCI, n° 7, 16 août 1880, que tous les p dont la
» valeur est $2kn+1$ et qui sont relatifs à $n=3$, donnent
» lieu à des sommes ternaires *m.* de p, excepté pour $p=7$,
» $p=13$; il y aurait donc, pour élucider cette difficile
» question, à examiner si pour $n=3$, comme pour $n=2$,
» on ne trouve pas un motif d'exception à ce qui vient
» d'être développé (*). »

$p=7$ donne $k=1$; $p=13$ donne $k=2$. Or, le théorème sur les *sommes ternaires* suppose $k=3k$. L'exception signalée par le Père Pépin est donc toute naturelle; et, si l'Auteur s'était rappelé l'hypothèse sur laquelle son théorème est basé, il n'aurait pas, me semble-t-il, écrit la remarque ci-dessus.

IV.

En résumé, le second Mémoire, remarquable sous divers rapports, a besoin d'être *abrégé*, *remanié*, *mieux écrit;* et, en conséquence, j'ai l'honneur de proposer, à l'Académie, la prorogation du Concours. »

(*) La Note du P. Pépin reproduit la critique, faite par Libri, d'une soi-disant démonstration du Théorème de Fermat, analogue à celle dont fait usage l'Auteur du Mémoire.